М.И.Дроботенко

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Abstract

Рассматривается двумерная внешняя обратная задача (ОЗ) логарифмического потенциала. Выделен класс единственности, построено приближенное решение, исследована его сходимость.

1. Постановка задачи. Введем обозначения, используемые в дальнейшем:

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ - ограниченная область с липшицевой границей, $\Omega_1 = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$;

$X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty},\ x_i \in \Omega_1,\ x_i \neq x_j$ при $i \neq j$;

для $z \in \mathbf{R}^2 \quad |z|^2 = z_1^2 + z_2^2,\ \varphi(x,y) = \ln \frac{1}{|x-y|},\ \varphi_i(y) = \varphi(x_i, y),\ i = \overline{1,\infty}$;

$L_2 = L_2(\Omega), \quad (\cdot,\cdot),\ \|\cdot\|$ - скалярное произведение и норма в L_2.

При сделанных предположениях относительно X справедлива следующая

Лемма 1. 1. $\varphi_i \in L_2,\ i = \overline{1,\infty}$;

2. Множество $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ линейно независимое.

$\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ - ортонормированное множество функций, полученное из $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$; $\mathcal{L}(\{\varphi_i\})$ - линейная оболочка множества $\{\varphi_i\}$; $L = \overline{\mathcal{L}(\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty})}$, $L^{\perp}$ - ортогональное дополнение L в L_2; $L^m = \mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = \mathcal{L}(\psi_1, \ldots, \psi_m)$.

Пусть $\sigma \in L_2$. Функцию $(\sigma,\varphi)(x) = \int_{\Omega} \sigma(y)\varphi(x,y)dy,\ x \in \Omega_1$ будем называть логарифмическим потенциалом, σ - его плотностью.

Рассмотрим множество $H = \{\sigma \in L_2,\ (\sigma,\varphi)(x) = 0$ для любого $x \in \Omega_1\}$. Пусть $\sigma_n \in H,\ \sigma_n \to \sigma$ при $n \to \infty$. Тогда для произвольного $x \in \Omega_1$ получим

$$|(\sigma,\varphi)(x)| = |(\sigma - \sigma_n, \varphi)(x)| \leq \|\sigma - \sigma_n\| \left(\int_{\Omega} \varphi^2(x,y)dy\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

при $n \to \infty$, поэтому $\sigma \in H$. Это доказывает замкнутость H, из чего следует, что H линейное подпространство L_2.

Обозначим через $H^{\perp}$ ортогональное дополнение H в L_2. Будем говорить, что множество X удовлетворяет **условию единственности**, если для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in H^{\perp}$ из $(\sigma_1, \varphi_i) = (\sigma_2, \varphi_i),\ i = \overline{1,\infty}$ следует $\sigma_1 = \sigma_2$.

В дальнейшем будем считать, что задан логарифмический потенциал, называемый **образующим**, $\sigma \in L_2$ - его плотность,

$$V_i = (\sigma,\varphi)(x_i) = (\sigma,\varphi_i), \quad i = \overline{1,\infty}, \tag{1}$$

его значения на множестве X.

Внешняя задача логарифмического потенциала состоит в отыскании плотности образующего потенциала по заданным значениям X и $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$.

2. Решение ОЗ и его свойства. Пусть $\sigma \in L_2$ удовлетворяет (1), $\sigma = \sigma' + \sigma''$, $\sigma' \in L$, $0 \neq \sigma'' \in L^{\perp}$. Тогда $(\sigma'', \varphi_i) = 0$, $i = \overline{1, \infty}$, поэтому

$$(\sigma', \varphi_i) = V_i, \quad i = \overline{1, \infty},$$

то есть σ' удовлетворяет (1). Кроме того, $\|\sigma'\|^2 < \|\sigma'\|^2 + \|\sigma''\|^2 = \|\sigma' + \sigma''\|^2 = \|\sigma\|^2$. Если $\eta \in L$ также удовлетворяет (1), то

$$(\sigma' - \eta, \varphi_i) = 0, \quad i = \overline{1, \infty}. \tag{2}$$

В силу плотности $\mathcal{L}\left(\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}\right)$ в L из (2) следует, что $\eta = \sigma'$.

Функцию $\sigma' \in L$, удовлетворяющую (1), будем называть **решением ОЗ**.

Итак, доказана

Теорема 1. Существует единственное решение ОЗ $\sigma' \in L$. Если $\sigma \in L_2$ также удовлетворяет (1), $\sigma \neq \sigma'$, то $\|\sigma'\| < \|\sigma\|$.

Следствие. Решение ОЗ есть гармоническая Ω в функция.

Доказательство. Так как $x \notin \Omega$, то φ_i - гармоническая в Ω функция ([1],стр.194). Предел последовательности гармонических функций есть гармоническая функция ([1],стр.218), поэтому L содержит только гармонические функции.

3. Приближенное решение ОЗ. В практических задачах, например, гравиразведки (см.[2], стр.152) требуется по конечному числу значений логарифмического потенциала, найденных с некоторой погрешностью, определить (приближенно) плотность этого потенциала. Поэтому, предполагая заданными такие $m \in \mathbf{N}$, $\delta > 0$, $\left\{V_i^{\delta}\right\}_{i=1}^{m}$, что выполняется условие

$$|V_i - V_i^{\delta}| \leq \delta, \quad i = \overline{1, m}, \tag{3}$$

решим "приближенную" ОЗ.

Теорема 2. Для любого $\left\{V_i^{\delta}\right\}_{i=1}^{m}$ существует единственная функция $\sigma^m \in L^m$, удовлетворяющая условию

$$(\sigma^m, \varphi)(x_i) = (\sigma^m, \varphi_i) = V_i^{\delta}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Если $\sigma \in L_2$ также удовлетворяет (4), $\sigma \neq \sigma^m$, то $\|\sigma^m\| < \|\sigma\|$.

Для доказательства заметим, что $\sigma^m = \sum_{i=1}^m \sigma_i^m \varphi_i$, поэтому (4) есть система линейных алгебраических уравнений относительно $\{\sigma_i^m\}_{i=1}^m$. Матрица этой системы - матрица Грама системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$, откуда следует существование и единственность σ^m. Неравенство $\|\sigma^m\| < \|\sigma\|$ следует из теоремы 1.

Будем называть определенную в теореме 2 функцию σ^m **приближенным решением ОЗ**. Обозначим решение ОЗ через σ. Выясним, как зависит $\sigma^m - \sigma$ от m и δ.

Поскольку $\sigma \in L$, то $\sigma = \sum_{i=1}^\infty \sigma_i \psi_i$. Определим функцию $\sigma(m) = \sum_{i=1}^m \sigma_i \psi_i$, тогда

$$\|\sigma^m - \sigma\| \le \|\sigma^m - \sigma(m)\| + \|\sigma(m) - \sigma\|.$$

Так как $\|\sigma\|^2 = \sum_{i=1}^\infty \sigma_i^2 < \infty$, то

$$\|\sigma(m) - \sigma\|^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} \sigma_i^2 = \varepsilon_m^2 \to 0$$

при $m \to \infty$.

Оценим величину $\|\sigma^m - \sigma(m)\|$. Из (3) следует, что $|V_i - V_i^\delta| \le \delta$, то есть $|(\sigma^m - \sigma, \varphi_i)| \le \delta$, откуда

$$\left|\left(\sigma^m - \sigma, \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}\right)\right| \le \delta \|\varphi_i\|^{-1}. \tag{5}$$

Оценим сверху величину $\|\varphi_i\|^{-1}$. Пусть $x \in \Omega_1$. Обозначим $\Omega_k(x) = \left\{y \in \mathbf{R}^2, |\varphi(x,y)| < k\right\}$. Очевидно, $|\Omega_k(x)|$ не зависит от x.

Пусть $k > 0$ такое, что $|\Omega_k(x)| \le d < |\Omega|$. Тогда

$$\|\varphi(x)\|^2 = \int_\Omega \varphi^2(x,y)dy \ge \int_{\Omega\setminus\Omega_k(x)} \varphi^2(x,y)dy \ge k^2|\Omega \setminus \Omega_k(x)| \ge$$

$$\ge k^2\left(|\Omega| - d\right) = \frac{1}{c^2}.$$

Итак, $\|\varphi(x)\|^{-1} \le c$ для любого $x \in \Omega_1$. Поэтому $\|\varphi_i\|^{-1} \le c, \ i = \overline{1,m}$.

Из неравенства (5) и оценки для $\|\varphi_i\|$ следует справедливость неравенства

$$\left|\left(\sigma^m - \sigma, \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}\right)\right| \le c\delta.$$

Пусть $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^m, \ \alpha_i \in \mathbf{R}, \ \alpha_i \ge 0, \ \sum_{i=1}^m \alpha_i \le 1$; тогда из последнего неравенства получаем

$$\left|\left(\sigma^m - \sigma, \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\gamma_i \varphi_i}{\|\varphi_i\|}\right)\right| \le c\delta \tag{6}$$

для любого $\gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^m,\ \gamma_i \in \{-1, 1\}$.

Пусть M выпуклая оболочка множества $\left\{\frac{\pm\varphi_i}{\|\varphi_i\|}\right\}_{i=1}^m$, тогда (6) означает, что для любого $\eta \in M$ выполняется неравенство

$$|(\sigma^m - \sigma, \eta)| \le c\delta. \tag{7}$$

Так как множество функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ линейно независимое, то существует такое $\lambda > 0$, что

$$\{\eta \in L^m,\ \|\eta\| \le \lambda\} \subset M. \tag{8}$$

Пусть теперь $\xi \in L^m,\ \|\xi\| \le 1$; тогда из (8) следует, что $\eta = \lambda\xi \in M$, поэтому с учетом (7) получаем

$$|(\sigma^m - \sigma, \xi)| = \lambda^{-1}|(\sigma^m - \sigma, \eta)| \le c\delta\lambda^{-1}. \tag{9}$$

Так как $\xi \in L^m$, то $\xi = \sum_{i=1}^m \xi_i\psi_i$, поэтому

$$(\sigma, \xi) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i\psi_i, \sum_{i=1}^{m} \xi_i\psi_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} \sigma_i\psi_i, \sum_{i=1}^{m} \xi_i\psi_i\right) = (\sigma(m), \xi).$$

С учетом последнего равенства получаем из (9) для любого $\xi \in L^m$, $\|\xi\| \le 1$

$$|(\sigma^m - \sigma(m), \xi)| = |(\sigma^m - \sigma, \xi)| \le c\delta\lambda^{-1}. \tag{10}$$

Пусть теперь $\eta \in L_2,\ \|\eta\| = 1$, тогда $\eta = \sum_{i=1}^\infty \eta_i\psi_i + \eta',\ \eta' \in L^\perp$. Так как

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} \eta_i\psi_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \eta_i^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2 + \|\eta'\|^2 = \|\eta\|^2 = 1,$$

то $\sum_{i=1}^m \eta_i\psi_i \in L^m,\ \|\sum_{i=1}^m \eta_i\psi_i\| \le 1$. Поэтому с учетом (10) получаем неравенство

$$|(\sigma^m - \sigma(m), \eta)| = \left|\left(\sigma^m - \sigma(m), \sum_{i=1}^{m} \eta_i\psi_i\right)\right| \le c\delta\lambda^{-1}.$$

Так как последнее неравенство выполняется для произвольной функции $\eta \in L_2$, удовлетворяющей условию $\|\eta\| = 1$, то из него следует, что

$$\|\sigma^m - \sigma(m)\| \le c\delta\lambda^{-1}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть функции σ и σ^m - решение и приближенное решение ОЗ; пусть выполнены условия (3),(8), тогда существует такая константа $c > 0$, не зависящая от m, что

$$\|\sigma - \sigma^m\| \le c\delta\lambda^{-1} + \varepsilon_m, \tag{11}$$

где $\varepsilon_m^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} \sigma_i^2 \to 0$ при $m \to \infty$.

Замечание 1. Скорость сходимости σ^m к σ зависит от выбора X. При этом $\varepsilon_m^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} \sigma_i^2 = \|\sigma\|^2 - \|\sigma(m)\|^2$, поэтому для повышения скорости сходимости σ^m к σ за счет уменьшения второго слагаемого в правой части (11) необходима априорная информация о σ.

Чтобы выполнялось условие (8), достаточно, чтобы для любого $j \le m$ выполнялось неравенство

$$\rho\left(\frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|}, L^{j-1}\right) \ge \lambda, \tag{12}$$

поэтому для уменьшения первого слагаемого в правой части (11) надо выбирать X так, чтобы (12) выполнялось с наибольшим значением λ.

Оптимальным по скорости сходимости был бы такой выбор X, чтобы $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ были ортогональными (тогда $\lambda = 1$), а $\|\sigma(m)\|^2 = \sup_{j=(j_1,\dots,j_m)} \sum_{i=1}^m \sigma_{j_i}^2$.

4. Полное решение ОЗ. Пространство L, а значит и решение ОЗ, вообще говоря, зависит от выбора множества X. Если X удовлетворяет условию единственности, то соответствующее решение ОЗ назовем **полным**. Выясним свойства полного решения ОЗ.

Лемма 2. $L \subseteq H^\perp$; $L = H^\perp$ тогда и только тогда, когда X удовлетворяет условию единственности.

Доказательство. Пусть $\sigma \in H$, тогда $(\sigma, \varphi)(x) = 0,\ x \in \Omega_1$, поэтому $(\sigma, \varphi_i) = 0, i = \overline{1, \infty}$, следовательно, $\sigma \in L^\perp$, откуда $H \subseteq L^\perp,\ L \subseteq H^\perp$.

Пусть X удовлетворяет условию единственности. Если $L \ne H^\perp$, то существует $\psi \in H^\perp,\ \psi \perp L$. Тогда для $\sigma \in L$ справедливы равенства

$$(\sigma, \varphi_i) = (\sigma + \psi, \varphi_i), \quad i = \overline{1, \infty}. \tag{13}$$

Так как $L \subset H^\perp$, то $\sigma, \sigma + \psi \in H^\perp$, поэтому из (13) следует $\sigma = \sigma + \psi$, откуда $\psi = 0,\ L = H^\perp$.

Пусть теперь $L = H^\perp,\ \sigma_1, \sigma_2 \in H^\perp,\ (\sigma_1, \varphi_i) = (\sigma_2, \varphi_i),\ i = \overline{1, \infty}$. Тогда

$$(\sigma_1 - \sigma_2, \varphi_i) = 0, \quad i = \overline{1, \infty}. \tag{14}$$

Так как $\sigma_1 - \sigma_2 \in L$, то в силу плотности $\mathcal{L}\left(\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}\right)$ в L из (14) следует, что $\sigma_1 = \sigma_2$ в $L = H^\perp$. Это означает, что X удовлетворяет условию единственности. Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть $\sigma \in L_2$ - плотность образующего потенциала, $\sigma' \in H^\perp$ - полное решение ОЗ. Тогда

1. σ' не зависит от выбора множества X;

2. $\sigma - \sigma' \in H$, то есть полное решение ОЗ восстанавливает плотность образующего потенциала с точностью до функции, являющейся плотностью нулевого потенциала.

3. σ' есть гармоническая в Ω функция.

Доказательство. Пусть множества $X_1 = \{x_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ и $X_2 = \{x_i^2\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяют условию единственности; σ_1, σ_2 - решения соответствующих ОЗ. По лемме 2 $\sigma_1, \sigma_2 \in H^{\perp}$. Представим плотность образующего потенциала σ в виде $\sigma = \sigma' + \sigma'',\ \sigma' \in H^{\perp},\ \sigma'' \in H$ Так как

$$(\sigma_1, \varphi_i^1) = (\sigma, \varphi_i^1) = (\sigma', \varphi_i^1), \quad (\sigma_2, \varphi_i^2) = (\sigma, \varphi_i^2) = (\sigma', \varphi_i^2), \quad i = \overline{1, \infty},$$

то в силу свойств X_1, X_2 получаем $\sigma_1 = \sigma',\ \sigma_2 = \sigma'$, то есть любое полное решение ОЗ равняется σ'. Гармоничность σ' следует из следствия теоремы 1. Теорема доказана.

Следствие. Пусть множество X удовлетворяет условию единственности; σ - плотность образующего потенциала, $\sigma = \sigma' + \sigma'',\ \sigma' \in H^{\perp},\ \sigma'' \in H$; σ_m - приближенное решение ОЗ; выполнены условия (3),(8); тогда существует такая константа $c > 0$, не зависящая от m, что

$$\|\sigma' - \sigma^m\| \leq c\delta\lambda^{-1} + \varepsilon_m. \tag{15}$$

Доказательство следует из утверждения теоремы и (11).

Как следует из леммы 2 и теоремы 4, множества, удовлетворяющие условию единственности, играют особую роль при решении рассматриваемых ОЗ. Такого рода условия рассматривались, например, в [3].

Литература

[1] **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.

[2] Гравиразведка: справочник геофизика / Под ред. Е.А.Мудрецовой. М.: Недра, 1981.

[3] **Лежнев В.Г.** Аппроксимация обратных задач ньютонова потенциала // Численные методы анализа. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. С.52-67.