М.Ю.Захаров

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ И ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Abstract

В работе рассматривается: а) задача определения плотности $g(x)$ логарифмического потенциала двойного слоя $u(x) = (g(y), \frac{\partial}{\partial n_y} \ln |x-y|^{-1})_{L_2(S)}, x \in Q^+ = R^2 \setminus \bar{Q}$, где Q -односвязная ограниченная область, $S = \partial Q$; показаны условия существования и единственности решения с точностью до произвольного постоянного слагаемого, сформулирована вариационная аппроксимационная задача, и для нее указан алгоритм решения; б) метод решения второй внутренней краевой задачи для уравнения Пуассона в R^2, основанный на интегральном представлении решения и использующий технику и алгоритмы внешней обратной задачи определения плотности логарифмического потенциала двойного слоя.

Внешняя обратная задача определения плотности логарифмического потенциала двойного слоя.

Рассматривается задача определения плотности $g(x)$ логарифмического потенциала двойного слоя, распределенной по замкнутой кривой S, кривая S задана.

Пусть Q - односвязная ограниченная область в пространстве R^2, с достаточно гладкой границей S, $Q^+ = R^2 \setminus \bar{Q}, \quad Q^- = Q, \quad x = (x_1, x_2)$. В области Q^+ рассматривается функция $u(x)$, принадлежащая множеству $\Sigma(Q^+)$ гармонических в Q^+ стремящихся к нулю при $|x| \to \infty$ функций, имеющих на S след, принадлежащий $L_2(S)$.

Рассматривается задача представления функции $u(x)$ в виде логарифмического потенциала двойного слоя

$$u(x) = \int\limits_S g_0(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} ds_y, \quad x \in Q^+, \tag{1}$$

т.е. задача определения плотности $g_0(x)$ в представлении (1) функции $u(x)$, если $u(x)$ задана в Q^+. Рассматриваются соответствующие теоремы существования и единственности, аппроксимационная задача и алгоритм приближенного решения.

Множество точек x^k, $\quad k=1,2,\ldots$, принадлежащих области $Q\subset R^2$, назовем последовательностью единственности для гармонических функций, если для любых гармонических в Q функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из равенства $f_1(x^k)=f_2(x^k)$, $\quad k=1,2,\ldots$, следует тождество $f_1(x)\equiv f_2(x)$ в области Q.

Рассмотрим следующую обратную задачу для функции $u(x)\in\Sigma(Q^+)$, если кривая S задана.

З а д а ч а D_2**.** Найти функцию $g_0(x)$ в представлении (1) функции $u(x)\in\Sigma(Q^+)$, если заданы значения $u^m=u(x^m)$, $\quad m=1,2,\ldots$, точки $x^m\in Q^+$ отделены от границы S и являются последовательностью единственности для гармонических функций в R^2.

Данная задача является частной обратной задачей теории потенциала. Этим задачам посвящены многочисленные работы, большая библиография содержится, например, в [1]. Подход к решению данной задачи аналогичен изложенному в [9] для случая логарифмического потенциала простого слоя.

Обозначим
$$L_2^c=\{f(x):f\in L_2(S),(f,1)_{L_2(S)}=0\}$$
подпространство в $L_2(S)$ функций, ортогональных единице.

При любой плотности $g_0(x)\in L_2(S)$ потенциал в формуле (1) гармоничен вне S, стремится к нулю при $|x|\to\infty$.

Можно показать справедливость следующих лемм.

Л е м м а 1. Система функций
$$\beta_m(y)=\frac{\partial}{\partial n_y}\ln\frac{1}{|x^m-y|}=\frac{(x^m-y,n_y)}{|x^m-y|^2},\quad y\in S,\quad m=1,\ldots,N,$$
где n_y - единичная внешняя к S нормаль в точке y, является линейно независимой при любом наборе точек $x^m\in Q^+$, $\quad m=1,2,\ldots,N$.

Л е м м а 2. Если точки $x^m\in Q^+$, отделены от границы S и являются последовательностью единственности для гармонических функций в R^2, то система функций $\beta_m(y)$, $\quad y\in S$, $\quad m=1,2,\ldots$, является полной в подпространстве L_2^c.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Решение g_0 задачи D_2 существует и единственно с точностью до произвольного постоянного слагаемого, если след на границе S функции $u(x)$ принадлежит $C(S)$, $\quad S\in C^2$.

Доказательство. В силу того, что $u(x)$, рассматриваемая в задаче D_2, принадлежит $\Sigma(Q^+)$, функция $u(x)$ является стремящимся к нулю при $|x| \to \infty$ решением внешней задачи Дирихле :

$$\triangle w(x) = 0, \quad x \in Q^+,$$

$$w\mid_S = \varphi(x),$$

где $\varphi = u(x)\mid_S \in C(S)$. Для $u(x)$, как для регулярного в смысле R^2 решения внешней задачи Дирихле, существует представление [3]:

$$u(x) = \int\limits_S f(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} ds_y + \alpha. \tag{2}$$

Так как $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ и интегральное слагаемое в формуле (2) стремится к нулю при $|x| \to \infty$, то $\alpha = 0$. Следовательно, представление для функции $u(x)$ в виде логарифмического потенциала двойного слоя с некоторой плотностью $f(x) \in L_2(S)$ существует, $g_0(x) = f(x)$.

Для доказательства единственности предположим, что существует функция $g_1(x) \in L_2(S)$ такая, что для функции $k(x)$

$$k(x) = \int\limits_S g_1(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} ds_y$$

выполняются равенства $k(x^m) = u^m, \quad m = 1, 2, \ldots$. Для разности $z(x) = u(x) - k(x)$ имеем $z(x^m) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots$, или

$$(g_0 - g_1, \beta_m)_{L_2(S)} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Из полноты системы β_m в L_2^c следует, что проекция $(g_0 - g_1)$ на L_2^c равна нулю, а значит, $(g_0 - g_1) = const$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что в подпространстве L_2^c решение $g_0(x)$ задачи D_2 единственно.

Рассмотрим метод приближенного решения задачи D_2. Изложение приближенных методов для случая R^3 содержится в работе [6]. Обозначим через $E_N = \{\beta_n\}_1^N$ подпространство в L_2^c, натянутое на функции $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N, \quad P_N$ - оператор ортогонального проектирования в $L_2(S)$ на $E_N, \quad h^N(y)$ - элемент из E_N. Вследствие леммы 2 имеем, что подпространства E_N при $N \to \infty$ исчерпывают пространство L_2^c, и можно записать

$$\lim_{N \to \infty} E_N = L_2^c.$$

Рассмотрим в E_N функционал

$$\Phi_{MN}(h^N) = \sum_{m=1}^{M} \left[(h^N, \beta_m) - u^m\right]^2,$$

где $M \geq N$, $\quad (,)$ – скалярное произведение в $L_2(S)$.

З а д а ч а W_N: найти

$$\mu_N = \inf_{E_N} \Phi_{MN}(h^N)$$

и минимизирующую функцию $h_1^N(y)$.

Л е м м а 3. Функционал $\Phi_{MN}(h^N)$ является строго выпуклым в E_N.

Т е о р е м а 2. Если $N = M$, то решение $h_1^N(y)$ задачи W_N существует и единственно; при $N \to \infty$ эти решения сходятся к единственному в L_2^c решению $h_0(y)$ задачи D_2.

Доказательство. Для решения $h_0(y) \in L_2(S)$ задачи D_2 по обозначению имеем

$$u^m = \int_S h_0(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x^m - y|} ds_y = (h_0, \beta_m),$$

и функционал $\Phi_{NN}(h^N)$ можно переписать в виде

$$\Phi_{NN}(h^N) = \sum_{m=1}^{N} (h^N - h_0, \beta_m)^2 = \sum_{m=1}^{N} (h^N - P_N h_0, \beta_m)^2.$$

Следовательно, решение задачи минимизации W_N существует, и решением является функция

$$h_1^N = P_N h_0 \in E_N.$$

Сходимость приближенных решений $h_1^N(y)$ к решению $h_0(y)$ из L_2^c задачи D_2 следует очевидным образом,

$$P_N h_0 \to h_0, \quad N \to \infty,$$

так как при $N \to \infty$ подпространства E_N исчерпывают пространство L_2^c.

Единственность решения задачи W_N следует из строгой выпуклости функционала $\Phi_{MN}(h^N)$. Теорема доказана.

Приближенное решение $h_1^N(y)$ можно получить следующим образом. Любая функция $h^N(y)$ записывается в виде

$$h^N(y) = \sum_{n=1}^{N} c_n \beta_n(y),$$

функционал $\Phi_{MN}(h^N)$ можно рассматривать как функцию переменных $c=(c_1,c_2,\ldots,c_N)$, обозначим ее $F(c)$. Для решения задачи минимизации W_N используем необходимое условие экстремума функции $F(c)$ и получим систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов c_n.

Если обозначить ее решение $c^0=(c_1^0,c_2^0,\ldots,c_N^0)$, то функция

$$v^N(y)=\sum_{n=1}^{N}c_n^0\beta_n(y)$$

представляет собой решение задачи W_N, аппроксимирующее проекцию на L_2^c искомой плотности $g_0(y)$ задачи D_2.

Был проведены пробные численные эксперименты по восстановлению плотности логарифмического потенциала двойного слоя и логарифмического потенциала простого слоя, применялись методы регуляризации [8].

Метод обратной задачи решения второй внутренней краевой задачи для уравнения Пуассона.

Рассматривается ограниченная односвязная область $Q\subset R^2$ с достаточно гладкой границей S. В области Q рассматривается вторая краевая задача для уравнения Пуассона

$$\begin{cases}\Delta u(x)=f(x), & x\in Q,\\ \frac{\partial u}{\partial n}(x)\mid_S=g(x).\end{cases}\tag{3}$$

Приближенные методы решения краевых задач для уравнения Пуассона изложены в [4]; в [5] изложен метод разностных потенциалов решения таких задач; метод обратной задачи потенциала решения краевых задач для уравнения Пуассона в R^3 изложен в [6], [7]. В данной работе излагается метод обратной задачи потенциала решения второй внутренней краевой задачи для уравнения Пуассона в R^2. Этот метод может быть удобен, в частности, в случае сложной границы.

Для любой функции $v(x)\in C^2(\bar{Q})$ справедливо интегральное представление [2]

$$\begin{gathered}Av(x)=-\int\limits_Q\Delta v(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy-\\ \int\limits_S\left[v(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln\frac{1}{|x-y|}+\frac{\partial v}{\partial n}(y)\ln\frac{1}{|x-y|}\right]ds_y,\end{gathered}\tag{4}$$

где

$$A=\begin{cases}2\pi, & x\in Q,\\ \pi, & x\in S,\\ 0, & x\in Q^+=R^2\setminus\bar{Q}.\end{cases}$$

Для решения $u(x)$ задачи (3) представление (4) имеет вид

$$\begin{aligned} Au(x) = -\int\limits_{Q} \Delta u(y) \ln \tfrac{1}{|x-y|} dy - \int\limits_{S} u(y) \tfrac{\partial}{\partial n_y} \ln \tfrac{1}{|x-y|} ds_y \\ + \int\limits_{S} \tfrac{\partial u}{\partial n}(y) \ln \tfrac{1}{|x-y|} ds_y, \end{aligned} \tag{5}$$

где известны функции $\Delta u(x) = f(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial n}(x) \mid_S = g(x)$.

Для того, чтобы получить решение задачи (3) в виде (5), надо определить оставшуюся неизвестную функцию $u(y) \mid_S$. Для ее определения перейдем в формуле (5) в область Q^+, левая часть (5) станет равна нулю. Обозначим сумму интегралов с известными плотностями через $w(x)$, тогда

$$\begin{aligned} \int\limits_{S} u(y) \tfrac{\partial}{\partial n_y} \ln \tfrac{1}{|x-y|} ds_y = w(x) \equiv \\ -\int\limits_{Q} f(y) \ln \tfrac{1}{|x-y|} dy + \int\limits_{S} g(y) \ln \tfrac{1}{|x-y|} ds_y, \quad x \in Q^+. \end{aligned} \tag{6}$$

То есть по известным внешним значениям логарифмического потенциала двойного слоя $w(x)$ надо определить плотность $u(y)$ этого потенциала. Получили внешнюю обратную задачу определения плотности логарифмического потенциала двойного слоя.

На основание первой части этой работы решение обратной задачи существует и единственно с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Известно, что логарифмический потенциал двойного слоя с постоянной плотностью постоянен внутри замкнутой кривой, по которой распределена его плотность. Следовательно, добавление постоянного слагаемого к плотности этого потенциала обуславливает, на основание (5), добавление некоторого постоянного слагаемого к решению $u(x)$ задачи (3), т.е решение задачи (3) единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Для того, чтобы приближенно восстановить неизвестную плотность, необходимо в силу первой части работы найти минимум функции

$$F(c_1, c_2, \ldots, c_N) = \sum_{m=1}^{M} \left[\left(\sum_{n=1}^{N} c_n \beta_n, \beta_m \right)_{L_2(S)} - w^m \right]^2, \tag{7}$$

где $M \geq N$; числа $w^m = w(x^m)$ известны, $m = 1, 2, \ldots, M$; точки $\{x^m\}_{m=1}^{M} \subset Q^+$, выбираются, например, равномерно на окружности, охватывающей область Q.

Для нахождения минимума функции $F(c_1, c_2, \ldots, c_N)$ используем необходимые условия минимума и получаем отсюда систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_N$. Функция

$$v^N(y) := \sum_{n=1}^{N} c_n^0 \beta_n(y)$$

будет приближением искомой плотности $u \mid_S$.

Подставляя в формулу (5) решение $v^N(y)$ задачи W_N, получим приближенное решение $u_N(y)$ задачи (3):

$$\begin{aligned} &2\pi u_N(x) = -\int_Q f(y) \ln \tfrac{1}{|x-y|} dy + \\ &\int_S \left[g(y) \ln \tfrac{1}{|x-y|} - \textstyle\sum_{n=1}^{N} c_n^0 \beta_n(y) \tfrac{(x-y, n_y)}{|x-y|^2} \right] ds_y, \quad x \in Q. \end{aligned} \tag{8}$$

Был проведен пробный численный эксперимент. Методом обратной задачи потенциала решалась следующая краевая задача

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), \quad x \in Q, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) \mid_S = g(x), \end{cases} \tag{9}$$

где область $Q = \{x \in R^2 : |x| < 1\}$ - единичный круг с центром в начале координат; решение задачи (9) бралось равным $\frac{3}{2}x_1^2 - x_2^2$, и исходя из этого определялись функции $f(x) \equiv 1$ и $g(x) = g_1(r, \varphi) = r(5\cos^2\varphi - 2) \mid_{r=1} = 5\cos^2\varphi - 2$.

Параметры и результаты вычислений: число измерений $M = 150$; $|x^m| = 1.5$ для всех x^m; число базисных функций $N = 30$; шаг интегрирования по границе S равен 0.0055; шаги интегрирования в области Q по r и по φ равны 0.003; приближенное и точное решение совпадают в 3-5 знаках.

Литература

[1] **Прилепко А.И.** Избранные вопросы в обратных задачах математической физики // Усл.–корр. задачи матем. физики и анализа. Новосибирск, 1992. С.151-162.

[2] **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

[3] **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

[4] **Бахвалов Н.С.** Численные методы. М.: Наука, 1987.

[5] **Рябенький В.С.** Метод разностных потенциалов для решения некоторых задач механики сплошных сред. М.: Наука, 1987.

[6] **Лежнев В.Г.** Аппроксимация обратных задач ньютонова потенциала // Численные методы анализа. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. С.52-67.

[7] **Лежнев В.Г.** Метод решения краевых задач уравнения Пуассона // Численный анализ: методы и алгоритмы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. С.36–44.

[8] **Морозов В.А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.

[9] **Захаров М.Ю.** Внешняя обратная задача определения плотности логарифмического потенциала простого слоя // Численный анализ: методы и алгоритмы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. С.45-52.