Ю.К.Демьянович, С.Ю.Маракова

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ЗАДАЧ В КЛАССАХ МИНИМАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ[1]

1. Постановка задачи

Изучению различных сплайнов посвящена обширная литература (см., например, [1-7]). В частности, ранее были рассмотрены вопросы классификации элементарных минимальных сплайнов и изучены представления аппроксимационных соотношений (см. [8]). В данной работе строятся биортогональные системы функционалов для упомянутых сплайнов и полученные результаты применяются к решению некоторых новых интерполяционных задач.

Известно (см., например, [5]), что непрерывные сплайны с интерполяционным локальным базисом дают прямое решение соответствующей задачи Лагранжа в том смысле, что для определения интерполирующего сплайна не требуется решать систему линейных алгебраических уравнений, порядок которой равен числу узлов интерполяции. Возникает вопрос, не соответствует ли каждому типу минимальных сплайнов своя интерполяционная задача, для которой упомянутый тип сплайнов позволяет получить прямое решение. Определенный ответ на этот вопрос содержится в предлагаемой работе.

Для дальнейшего удобно ввести $\mathcal{G}$-непрерывность (которая представляет собой обобщение обычной непрерывности функций) с тем, чтобы интерполировать в пространстве $\mathcal{G}$-непрерывных функций. Далее рассматриваются условия $\mathcal{G}$-непрерывности A-сплайнов (см. [9, 10]); последние используются для построения минимальных сплайнов с локальным интерполяционным базисом, дающим прямое решение упомянутой выше задачи интерполяции. В результате найдены полиномиальные сплайны, пригодные для прямого решения некоторых новых интерполяционных задач (в частности, широко известные B-сплайны дают прямые решения при определенных нестандартных интерполяциях).

Сначала дадим подходящую общую формулировку задачи.

Рассмотрим некоторое линейное пространство U измеримых функций, заданных на промежутке (a, b).

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 96–15–96088 и 98–01–00345)

Выделим в интервале (a, b) некоторое множество Y, $\quad Y \subset (a, b)$, и каждому $y \in Y$ поставим в соответствие линейный функционал f_y,

$$f_y \in U^*. \tag{1.1}$$

Семейство этих функционалов обозначим F,

$$F = \{f_y\}_{y \in Y}. \tag{1.2}$$

Если $\mathcal{S}$ – некоторое множество из пространства U, а v_y – заданная функция (ее аргумент записан в виде индекса) с областью определения Y, то задача об отыскании элемента $\tilde{u}$ из $\mathcal{S}$, удовлетворяющего условиям

$$f_y(\tilde{u}) = v_y, \qquad y \in Y, \tag{1.3}$$

называется *обобщенной интерполяционной задачей* (иногда ее также называют *моментной задачей*) в классе $\mathcal{S}$.

Для наших целей удобно рассмотреть семейство

$$\mathcal{G} = \{g_y\}_{y \in Y} \tag{1.4}$$

пар $G_y = (g_y^-, g_y^+)$ функционалов g_y^-, g_y^+ из U^*:

$$g_y^-, g_y^+ \in B^*, \qquad \forall y \in Y. \tag{1.5}$$

Фактически здесь мы имеем дело с двумя семействами функционалов $G^- = \{g_y^-\}_{y \in Y}$ и $G^+ = \{g_y^+\}_{y \in Y}$, для каждого из которых можно рассмотреть обобщенную интерполяционную задачу. Такую задачу для первого семейства

$$g_y^-(\tilde{u}) = v^-(y), \qquad y \in Y, \tag{1.6}$$

назовем G^-*-интерполяцией,* а для второго семейства

$$g_y^+(\tilde{u}) = v^+(y), \qquad y \in Y, \tag{1.7}$$

– G^+*-интерполяцией* (функции $v^-(y)$ и $v^+(y)$ считаются данными).

Определение 1. *Говорят, что функция $u \in U$ является $\mathcal{G}$-непрерывной в точке $y \in Y$, если*

$$g_y^-(u) = g_y^+(u). \tag{1.8}$$

Функцию u будем называть $\mathcal{G}$-непрерывной на Y, если соотношение (1.8) выполнено для всех точек y из множества Y.

Таким образом, значения функционалов g_y^- и g_y^+ для $\mathcal{G}$-непрерывной функции u одинаковы; их общее значение обозначим $g_y(u)$, так что

$$g_y(u) = g_y^-(u) = g_y^+(u). \tag{1.9}$$

Введем линейное пространство $\hat{U}$ функций $u \in U$, удовлетворяющих условию (1.8),

$$\hat{U} = \{u | g_y^-(u) = g_y^+(u), \;\; u \in B, \; y \in Y\}. \tag{1.10}$$

Если $\mathcal{S} \subset \hat{U}$, то при $v_y = v_y^- = v_y^+$ задачи (1.6) и (1.7) совпадают; ввиду соотношения (1.9) в этом случае их можно переписать в виде

$$g_y(\tilde{u}) = v_y, \quad \forall y \in Y, \qquad \tilde{u} \in \mathcal{S} \subset \hat{U}. \tag{1.11}$$

В данной работе нас будут интересовать определенные варианты задачи (1.11), называемой задачей $\mathcal{G}$-интерполяции.

2. А-минимальные сплайны

Рассмотрим множество $A = \{a_j\}_{j \in J}$ ненулевых вектор-столбцов a_j из пространства R^{m+1} с компонентами

$$a_{ji}, \quad i = 0, 1, \ldots, m;$$

множество A будем называть цепочкой векторов из R^{m+1} (или просто цепочкой).

Определение 2. *Цепочка $A = \{a_j\}_{j \in J}$, $a_j \in R^{m+1}$, называется полной, если любые $m+1$ последовательных векторов цепочки линейно независимы.*

Пусть

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t) \tag{2.1}$$

– линейно независимая система функций из пространства U.

На промежутке (a, b) введем (бесконечную в обе стороны) сетку $X = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$,

$$X: \qquad \ldots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots,$$
$$\lim_{j \to -\infty} x_j = a, \quad \lim_{j \to +\infty} x_j = b \tag{2.2}$$

(случаи $a = -\infty$ и $b = +\infty$ не исключаются). Предположим, что целые числа l и m удовлетворяют условию

$$l + s = m + 1.$$

Поставим вопрос о существовании функций $\omega_j(t)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\sum_{j\in J} a_j\omega_j(t) = \varphi(t), \quad t \in (a,b)\backslash X, \tag{2.3}$$

$$supp\omega_j = [x_{j-s}, x_{j+l}], \tag{2.4}$$

где $A = \{a_j\}_{j\in J}$ – цепочка из R^{m+1}, $\varphi(t)$ – вектор-функция вида $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))^T$. Соотношения (2.1) называются аппроксимационными.

Справедливо следующее утверждение (см. [9]).

Теорема 1. *Для существования функций $\omega_j(t)$, удовлетворяющих соотношениям (2.3)-(2.4) при $t \in (a,b)\backslash X$, необходимо и достаточно, чтобы цепочка A была полной.*

Определение 3. *Линейные комбинации функций ω_j, удовлетворяющих условиям (2.3)-(2.4), называются A-минимальными элементарными сплайнами (или просто A-сплайнами), а множество $\{\omega_j\}_{j\in J}$ – главным базисом этих сплайнов.*

Заметим, что упомянутые в предыдущем пункте минимальные сплайны с интерполяционным локальным базисом в пространстве $U = C(a,b)$ на сетке X являются частным случаем A-сплайнов при

$$a_{ji} = x_j^i, \quad \varphi_i(t) = t^i, \quad i = 0,1,\ldots,m, \quad j \in \mathcal{Z}. \tag{2.5}$$

3. Обобщенная непрерывность A-сплайнов

Здесь даны необходимые и достаточные условия $\mathcal{G}$-непрерывности функций ω_j в узлах сетки X.

Пусть задано семейство (1.4) и $x_k \in Y$. Обозначая буквой T транспонирование, рассмотрим вектор-столбец

$$g_{(x_k)}(\varphi) = (g^+_{x_k}(\varphi_0), \ldots, (g^+_{x_k}(\varphi_m))^T. \tag{3.1}$$

Может быть доказано следующее утверждение (см. [8]).

Теорема 2. *Пусть $A = \{a_j\}_{j\in J}$ – полная цепочка, $x_k \in Y$, и функции φ_i $\mathcal{G}$-непрерывны в точке x_k. Для того чтобы A-сплайны были $\mathcal{G}$-непрерывными в точке x_k, необходимо и достаточно, чтобы векторы*

$$g_{(x_k)}(\varphi), a_{k-l+1}, \ldots, a_{k+s-1} \tag{3.2}$$

были линейно зависимы.

Если в формуле (1.4) положить $Y = X$ и

$$g_x^+ u = u(x+0), \quad g_x^- u = u(x-0), \quad x \in X, \tag{3.3}$$

то в этом случае g-непрерывность совпадает с обычной непрерывностью в точках $x_k \in X$, и в условиях (2.5) можно применить теорему 2. Таким образом, для непрерывности элементарных минимальных сплайнов необходимо и достаточно, чтобы при всех целых k наборы векторов $\varphi(x_k), a_{k-l+1}, \ldots, a_{k+s-1}$ были линейно зависимы, что эквивалентно условию

$$s \geq 1, l \geq 1. \tag{3.4}$$

4. А-сплайны с $\mathcal{G}$-интерполяционным главным базисом

Пусть, как и прежде, функции φ_i $\mathcal{G}$-непрерывны на сетке X. Предположим, что дана полная цепочка $A \stackrel{def}{=} \{a_k\}_{k \in \mathcal{Z}}$ из векторов

$$a_k = g_{(x_k)}(\varphi). \tag{4.1}$$

Теорема 3. *Для того чтобы А-сплайны, построенные с помощью цепочки (4.1), были $\mathcal{G}$-непрерывны на X, необходимо и достаточно, чтобы*

$$l \geq 1, \; s \geq 1. \tag{4.2}$$

Доказательство достаточно провести для главного базиса, а для него доказываемое утверждение легко вытекает из теоремы 2. ■

Следствие 1. *В условиях теоремы 3 главный базис ω_j обладает свойством*

$$g_{x_k}(\omega_j) = \delta_{j,k}, \tag{4.3}$$

где $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера.

Базис ω_j со свойством (4.3) называется $\mathcal{G}$-*интерполяционным.*

Рассмотрим интерполяционную задачу (1.11) при $Y = X$; ее можно записать в виде

$$g_{x_k}(\tilde{u}) = v_{x_k}, \quad k \in \mathcal{Z}, \tilde{u} \in \mathcal{S}. \tag{4.4}$$

В качестве $\mathcal{S}$ возьмем пространство A-сплайнов, порожденных цепочкой векторов вида (4.1),

$$\mathcal{S} = \{\tilde{u} | \tilde{u} = \sum_{j \in \mathcal{Z}} c_j \omega_j, \quad c_j \in \mathcal{R}^1, \; j \in \mathcal{Z}\}, \tag{4.5}$$

где $\{\omega_j\}$ – главный базис рассматриваемых A-сплайнов.

Определение 4. *Говорят, что интерполяционная задача (4.4)-(4.5) имеет прямое решение, если интерполянт имеет вид*

$$\tilde{u} = \sum_{j\in\mathcal{Z}} v_{x_j}\omega_j. \tag{4.6}$$

Теорема 4. *В условиях теоремы 3 задача (4.4)-(4.5) имеет прямое решение (4.6).*

Доказательство легко следует из формул (4.3). ■

5. Полиномиальные сплайны: образующие минимальные сплайны и их представления

Здесь ограничимся равномерной целочисленной сеткой X, полагая

$$a = -\infty,\ b = +\infty,\ x_j = j, \quad \forall j \in \mathcal{Z}.$$

Для удобства введем обозначение

$$e = -s,$$

так что $l = e + m + 1$.

Рассмотрим вектор $\mu = (1, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)^T$ евклидова пространства $\mathcal{R}^{n+1}$, а также вектор-функцию $\varphi(t) = (1, t, t^2, \ldots, t^m)^T$.

Определение 5. *Образующим минимальным (μ, e, m)-сплайном называется функция $\omega_{\mu,e,m}(t)$, $t \in \mathcal{R}^1$, удовлетворяющая условиям*

$$supp\omega_{\mu,e,m} = [e, e+m+1], \tag{5.1}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{Z}} \varphi(j)\omega_{\mu,e,m}(t-j) = \sum_{0\le\alpha\le m} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}\mu_\alpha\varphi^{(\alpha)}(t). \tag{5.2}$$

Для краткости образующий минимальный $(\mu, 0, m)$-сплайн называют просто *образующим сплайном.*

Рассмотрим нижнетреугольную квадратную матрицу A порядка $m+1$ с элементами $a_{\gamma\alpha}$ вида

$$a_{\gamma\alpha} = \binom{\gamma}{\alpha} \quad \text{при} \quad 0 \le \alpha \le \gamma, \qquad a_{\gamma\alpha} = 0 \quad \text{при } \gamma < \alpha \le m. \tag{5.3}$$

Лемма 1. *Матрица A обратима, а ее степень A^k с показателем k, $k \in \mathcal{Z}, k \ne 0$, представляет собой нижнетреугольную матрицу вида*

$$A^k = (a^{(k)}_{\gamma\alpha}), \tag{5.4}$$

где
$$a^{(k)}_{\gamma\alpha} = \begin{cases} \binom{\gamma}{\alpha} k^{\gamma-\alpha} & \textit{при } 0 \le \alpha \le \gamma, \\ 0 & \textit{при } \gamma < \alpha \le m. \end{cases}$$

Доказательство этой леммы проводится по индукции. ■

Теорема 5. *Для любого целого r справедливо тождество*

$$\omega_{\mu,e,m}(t-r) = \omega_{A^r\mu,e+r,m}(t) \qquad \textit{при} \quad \forall t \in \mathcal{R}^1. \tag{5.5}$$

Доказательство. Применим индукцию. Установим тождество (5.5) при $r = 1$. Из (5.2) найдем

$$\sum_{j\in\mathcal{Z}} \varphi(j)\omega_{\mu,e,m}(t-1-j) = \sum_{0\le\alpha\le m} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}\mu_\alpha \varphi^{(\alpha)}(t-1). \tag{5.6}$$

По формуле Тейлора для многочленов степени не выше m получим

$$\varphi^{(\alpha)}(t-1) = \sum_{0\le\beta\le m-\alpha} \frac{(-1)^\beta}{\beta!}\varphi^{(\alpha+\beta)}(t); \tag{5.7}$$

подставляя (5.7) в формулу (5.6), будем иметь

$$\sum_{j\in\mathcal{Z}} \varphi(j)\omega_{\mu,e,m}(t-1-j) = \sum_{0\le\alpha\le m} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}\mu_\alpha \sum_{0\le\beta\le m-\alpha} \frac{(-1)^\beta}{\beta!}\varphi^{(\alpha+\beta)}(t). \tag{5.8}$$

После замены индекса суммирования β на $\gamma = \alpha+\beta$ и после перестановки порядка суммирования получим

$$\sum_{j\in\mathcal{Z}} \varphi(j)\omega_{\mu,e,m}(t-1-j) = \sum_{0\le\alpha\le m} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}\mu_\alpha \sum_{\alpha\le\gamma\le m} \frac{(-1)^{\gamma-\alpha}}{(\gamma-\alpha)!}\varphi^{(\gamma)}(t) =$$

$$= \sum_{0\le\gamma\le m}\sum_{0\le\alpha\le\gamma} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}\mu_\alpha \frac{(-1)^{\gamma-\alpha}}{(\gamma-\alpha)!}\varphi^{(\gamma)}(t) =$$

$$= \sum_{0\le\gamma\le m} \frac{(-1)^\gamma}{\gamma!}\varphi^{(\gamma)}(t) \sum_{0\le\alpha\le\gamma} \binom{\gamma}{\alpha}\mu_\alpha. \tag{5.9}$$

Последняя сумма представляет собой компоненту с номером γ вектора $\mu^{(1)} = A\mu$, и потому функция $\omega_{\mu,e,m}(t-1)$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{j\in\mathcal{Z}} \varphi(j)\omega_{\mu,e,m}(t-j-1) = \sum_{0\le\gamma\le m} \frac{(-1)^\gamma}{\gamma!}\mu^{(1)}_\gamma \varphi^{(\gamma)}(t). \tag{5.10}$$

Аналогичному соотношению удовлетворяет (см. определение 1) и функция $\omega_{A\mu,e+1,m}(t-1)$, а именно

$$\sum_{j\in\mathcal{Z}}\varphi(j)\omega_{A\mu,e+1,m}(t-j)=\sum_{0\le\gamma\le m}\frac{(-1)^{\gamma}}{\gamma!}\mu_{\gamma}^{(1)}\varphi^{(\gamma)}(t). \tag{5.11}$$

Поскольку

$$supp\omega_{\mu,e,m}(t-1)=[e+1,e+m+2],$$
$$supp\omega_{A\mu,e+1,m}(t)=[e+1,e+m+2],$$

то мы находимся в условиях единственности (суммирование в суммах левых частей формул (5.10) и (5.11) распространяется по одним и тем же индексам: при $t\in(k,k+1)$ индекс j пробегает числа $k-1-l-m,\dots,k-1-l)$ и, следовательно,

$$\omega_{\mu,e,m}(t-1)=\omega_{A\mu,e+1,m}(t).$$

Итак, формула (5.5) установлена при $r=1$,

$$\omega_{\mu,e,m}(t-1)=\omega_{A\mu,e+1,m}(t). \tag{5.12}$$

Введем обозначения $A\mu=\mu',e+1=e'$; тогда (5.12) можно переписать в виде

$$\omega_{\mu',e',m}(t'+1)=\omega_{A^{-1}\mu,e-1,m}(t'), \tag{5.13}$$

что по существу и означает справедливость (5.5) при $r=-1$. При $r=2,3,4,\dots$ соотношение (5.5) получается индукцией по r, базой для которой является (5.12), а при $r=-2,-3,-4,\dots$ упомянутое соотношение получается тоже индукцией с базой (5.13).

Теорема полностью доказана. ∎

Пусть M_m – гиперплоскость векторов вида $\mu=(1,\mu_1,\dots,\mu_m)$ в $\mathcal{R}^{m+1}$. Обозначим $\mathcal{S}_e^{(m)}$ множество сплайнов, удовлетворяющих условиям 1), 2) при некотором $\mu\in M_m$.

Определение 6. *Сплайны из множества $\mathcal{S}_e^{(m)}$ называются образующими (e,m)-сплайнами.*

Ясно, что каждый (e,m)-сплайн является (μ,e,m)-сплайном при некотором $\mu\in M_m$, определяемом однозначно, и каждое $\mu\in M_m$ однозначно определяет образующий (e,m)-сплайн в $\mathcal{S}_e^{(m)}$. Вектор $\mu\in M_m$ называется *μ-представлением* образующего (e,m)-сплайна $\omega_{\mu,e,m}$.

6. Операция инволюции

В этом пункте введем понятие инволютивного вектора и понятие класса эквивалентных аппроксимационных соотношений.

Рассмотрим квадратную нижнетреугольную матрицу $Q_{(\mu)}$ размера $m+1$ вида

$$Q_{(\mu)} = (q^{(\mu)}_{\gamma\beta}), \qquad q^{(\mu)}_{\gamma\beta} = (-1)^{\gamma-\beta}\binom{\gamma}{\beta}\mu_{\gamma-\beta} \tag{6.1}$$

для $0 \le \beta \le \gamma \le m$ (остальные элементы – нули).

По вектору $\mu = (1, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)^T \in M_m$ построим вектор $\nu = (1, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)^T \in M_m$, используя формулы

$$\nu_n = -\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\mu_i\nu_{n-i}, \quad n = 1, \ldots, m. \tag{6.2}$$

Теорема 6. *Матрицы $Q_{(\mu)}$ и $Q_{(\nu)}$ взаимно обратны.*

Доказательство этого утверждения дано одним из авторов ранее (см. формулы (1.7) - (1.10) в работе [10]).

Переход от вектора μ к вектору ν по формулам (6.2) будем обозначать значком $\diamond$ (ромб), так что $\nu = \mu^\diamond$.

Теорема 7. *Если $\mu \in M_m$ и $\nu = \mu^\diamond$, то*

$$\nu \in M_m, \qquad \mu = \nu^\diamond. \tag{6.3}$$

Доказательство. По вектору $\nu = \mu^\diamond$ построим вектор $\lambda = \nu^\diamond$ и установим, что $\lambda = \mu$. Согласно (6.2) для вектора $\lambda = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$

$$\lambda_n = -\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\nu_i\lambda_{n-i}, \quad n = 1, \ldots, m. \tag{6.4}$$

По теореме 5 матрица $Q_{(\lambda)}$ является обратной к $Q_{(\nu)}$; но к последней обратна матрица $Q_{(\mu)}$. В силу единственности обратной матрицы

$$Q_{(\lambda)} = Q_{(\mu)},$$

откуда

$$q^{(\lambda)}_{\gamma\beta} = q^{(\mu)}_{\gamma\beta}, \qquad 0 \le \beta \le \gamma \le m.$$

Ввиду (6.1) это означает, что

$$\lambda_{\gamma-\beta} = \mu_{\gamma-\beta},$$

так что $\lambda = \mu$. Итак, соотношение (6.3) доказано. ∎

Следствие 1. *Операция перехода от вектора μ к вектору ν по формулам (6.2) является инволюцией,*

$$(\mu^\diamond)^\diamond = \mu. \tag{6.5}$$

Вектор $\nu = \mu^\diamond$ называется *инволютивным образом* вектора $\mu \in M_m$; о векторах μ и ν говорят, что они взаимно инволютивны.

Лемма 2. *Справедливо представление*

$$Q_{(\mu)}\varphi(t) = \sum_{\alpha=0}^{m}(-1)^\alpha \mu_\alpha \varphi^{(\alpha)}(t)/\alpha!. \tag{6.6}$$

Доказательство дано ранее (см. с.10 работы [9]). ■

Следствие 2. *Соотношениям (5.2) можно придать форму*

$$\sum_{j\in\mathcal{Z}} \varphi(j)\omega_{\mu,e,m}(t-j) = Q_{(\mu)}\varphi(t). \tag{6.7}$$

Определение 7. *Соотношения, получаемые из (6.7) умножением на неособенную квадратную матрицу порядка $m+1$, называются эквивалентными, а множество эквивалентных соотношений называется классом эквивалентности аппроксимационных соотношений, соответствующим параметру μ; его будем обозначать K_μ. Множество всех классов эквивалентности обозначим $\mathcal{K}$.*

Следствие 3. *Эквивалентным аппроксимационным соотношениям соответствует один и тот же минимальный образующий сплайн.*

Действительно, от умножения соотношений (6.7) на неособенную квадратную матрицу их решение не изменится, и потому при условии (5.1) они будут определять один и тот же минимальный образующий (μ, e, m)-сплайн.

Следствие 4. *Тождества (6.7) могут быть записаны в виде*

$$\sum_{j\in\mathcal{Z}} Q_{(\mu^\diamond)}\varphi(j)\omega_{\mu,e,m}(t-j) = \varphi(t). \tag{6.8}$$

Задание вектора $\nu = \mu^\diamond$ однозначно определяет (e, m, μ)-сплайн; этот вектор называется ν-представлением этого сплайна, а тождества (6.8) – *ν-формой* аппроксимационных соотношений.

Очевидно, что соотношения (6.7) и (6.8) эквивалентны.

Определение 8. *Соотношения (6.7) и (6.8) называются μ и $\mu^\diamond$-представителями класса K_μ (соответственно).*

Различные представители класса K_μ позволяют получить различные представления минимального образующего сплайна (с различными способами введения определяющих параметров).

Теорема 8. *Справедлива формула*

$$(A\mu)^\diamond = A^{-1}\mu^\diamond \qquad (\mu_0 \neq 0). \tag{6.9}$$

Для краткости дадим лишь иллюстрацию доказательства для

$$m = 2. \tag{6.10}$$

Используя формулу (5.3), имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

Из формул (6.2) находим

$$\nu_0 = 1, \nu_1 = -\mu_1, \nu_2 = 2\mu_1^2 - \mu_2, \tag{6.13}$$

так что

$$\mu^\diamond = \nu = (1, -\mu_1, 2\mu_1^2 - \mu_2). \tag{6.14}$$

Очевидно, что

$$A\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \mu_1 \\ 1 + 2\mu_1 + \mu_2 \end{pmatrix}. \tag{6.15}$$

Используя снова формулы (6.2), получим

$$(A^{-1}\mu)^\diamond = (1, -1 - \mu_1, 1 + 2\mu_1 + 2\mu_1^2 - \mu_2)^T. \tag{6.16}$$

С другой стороны,

$$A^{-1}\mu^\diamond = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \mu_1 \\ 1 + 2\mu_1 + 2\mu_1^2 - \mu_2 \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Сравнение формул (6.16) и (6.17) показывает справедливость теоремы 8 при $m = 2$.

При произвольном натуральном m теорема доказывается аналогично, но формулы длиннее; подробности оставляем читателю. ■

7. О $\mathcal{G}$-интерполяции минимальными сплайнами

Пусть $\omega_{\mu,e,m}(t)$ – минимальный образующий (μ, e, m)-сплайн на целочисленной сетке X, так что выполнены соотношения (5.1) и (6.7).

Формула (5.5) из теоремы 5 означает, что функция

$$\omega^{\{r\}}(t) \stackrel{def}{=} \omega_{\mu,e,,m}(t-r) \tag{7.1}$$

удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{j\in\mathcal{Z}} \varphi(j)\omega^{\{r\}}(t-j) = Q_{(A^r\mu)}\varphi(t), \tag{7.2}$$

$$supp\omega^{\{r\}} = [e+r, e+r+m+1]. \tag{7.3}$$

Согласно теореме 6, из формулы (7.2) найдем

$$\sum_{j\in\mathcal{Z}} Q_{(A^r\mu)^\diamond}\varphi(j)\omega^{\{r\}}(t-j) = \varphi(t). \tag{7.4}$$

Полагая $\nu' = (A^r\mu)^\diamond$, $\nu' = (\nu'_0, \ldots, \nu'_m)$, с помощью представления (6.6) из (7.4) найдем

$$\sum_{j\in\mathcal{Z}} \sum_{\alpha=0}^{m'} (-1)^\alpha \nu'_\alpha \varphi^{(\alpha)}(j)/\alpha!\omega^{\{r\}}(t-j) = \varphi(t), \tag{7.5}$$

где $m' \stackrel{def}{=} max\{i|\nu'_i \neq 0\}$.

Теперь будут конкретизированы линейные пространства функций, используемые в дальнейшем.

Множество определенных и непрерывных на отрезке $[c,d]$ функций обозначается $C[c,d]$, множество функций, непрерывных в каждой точке открытого интервала (c,d), обозначается $C(c,d)$, наконец, множество тех функций из $C(c,d)$, которые могут быть распространены по непрерывности до функций из $C[c,d]$, обозначается $C\langle c,d\rangle$. Введенные множества представляют собой линейные пространства, и для них верны включения

$$C[c,d] \subset C\langle c,d\rangle \subset C(c,d). \tag{7.6}$$

Ясно, что если функция $u \in C\langle c,d\rangle$, то существуют конечные пределы $u(c+0) = \lim_{t\to c, t>a} u(t)$, $\qquad u(d-0) = \lim_{t\to d, t<d} u(t)$, и при подходящем

отождествлении элементов можно считать, что $C[c,d]=C\langle c,d\rangle$.

Аналогичным образом вводятся линейные пространства $C^{m'}[c,d]$, $C^{m'}(c,d)$, $C^{m'}\langle c,d\rangle$ – это пространства функций, у которых существуют производные $u^{(j)}$, $j=0,1,\ldots,m'$, удовлетворяющие условиям

$$u^{(j)}\in C[c,d],\quad u^{(j)}\in C(c,d),\quad u^{(j)}\in C\langle c,d\rangle \tag{7.7}$$

соответственно.

Рассмотрим линейное пространство

$$U=\{u|u\in\bigcap_{j\in\mathcal{Z}}C^{m'}\langle j,j+1\rangle\} \tag{7.8}$$

и определим на этом пространстве линейные функционалы

$$g_j^+(u)=\sum_{\alpha=0}^{m'}(-1)^\alpha\frac{\nu'_\alpha}{\alpha!}u^{(\alpha)}(j+0), \tag{7.9}$$

$$g_j^-(u)=\sum_{\alpha=0}^{m'}(-1)^\alpha\frac{\nu'_\alpha}{\alpha!}u^{(\alpha)}(j-0). \tag{7.10}$$

Введем еще линейное пространство $\hat{\hat{U}}=C^{m'}(\mathcal{R}^1)$ функций, непрерывных вместе со своими производными вплоть до m'-го порядка включительно на всей вещественной оси $\mathcal{R}^1$. На этом пространстве зададим линейные функционалы

$$g_j(u)=\sum_{\alpha=0}^{m'}(-1)^\alpha\frac{\nu'_\alpha}{\alpha!}u^{(\alpha)}(j). \tag{7.11}$$

Очевидно, эти функционалы можно доопределить непрерывным образом на $\hat{U}$ (см. формулу (1.10)); ясно также, что $\hat{\hat{U}}\subset\hat{U}\subset U$, и выполнены соотношения (1.9).

Выберем целое число r так, чтобы

$$s\stackrel{def}{=}-e-r\geq 1,\quad l\stackrel{def}{=}e+r+m+1\geq 1; \tag{7.12}$$

иначе говоря,

$$r\in\{-e-m,-e-m+1,\ldots,-e-2,-e-1\}. \tag{7.13}$$

В соответствии с теоремой 3 и следствием 1 при условии (7.13) главный базис $\omega_j(t)\stackrel{def}{=}\omega^{\{r\}}(t-j)$ является G-непрерывным и G-интерполяционным, так что

$$g_k(\omega_j)=\delta_{j,k}. \tag{7.14}$$

Поэтому (в силу теоремы 4) интерполяционная задача

$$g_k(\tilde{u}) = v_k, \quad k \in \mathcal{Z}, \tag{7.15}$$

в классе $\mathcal{S}$ сплайнов

$$\mathcal{S} = \{\tilde{u}|\tilde{u} = \sum_{j\in\mathcal{Z}} c_j\omega^{\{r\}}(t-j), \qquad c_j \in \mathcal{R}^1\} \tag{7.16}$$

имеет прямое решение.

8. Об интерполяционных задачах для B-сплайнов

Соотношение (6.2) показывает, что величины ν_n определяются рекуррентно и не зависят от числа m. Нетрудно видеть,что это соотношение генерирует бесконечную последовательность

$$\nu_0 = 1,\ \nu_1 = -\mu_1,\ \nu_2 = 2\mu_1^2 - \mu_2,\ \nu_3 = -6\mu_1^3 + 6\mu_1\mu_2 - \mu_3,$$
$$\nu_4 = 24\mu_1^4 - 36\mu_1^2\mu_2 + 8\mu_1\mu_3 + 6\mu_2^2 - \mu_4,$$
$$\nu_5 = -120\mu_1^5 + 240\mu_1^3\mu_2 - 60\mu_1^2\mu_3 - 90\mu_1\mu_2^2 + 10\mu_1\mu_4 + 20\mu_2\mu_3 - \mu_5,$$
$$\nu_6 = 720\mu_1^6 - 1800\mu_1^4\mu_2 + 480\mu_1^3\mu_3 + 1080\mu_1^2\mu_2^2 - 90\mu_1^2\mu_4 - 360\mu_1\mu_2\mu_3 +$$
$$+12\mu_1\mu_5 + 30\mu_2\mu_4 - 90\mu_2^3 + 20\mu_3^2 - \mu_6, \ldots, \tag{8.1}$$

позволяющую построить вектор $\nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ при любом натуральном m: достаточно взять первые $m+1$ членов этой последовательности.

Напомним (см.[9]), что характеристическим многочленом $P_{(\mu)}(t)$ образующего сплайна называется многочлен, представляющий след этого сплайна на промежутке (0,1); этот многочлен будем записывать в виде

$$P_{(\mu)}(t) = \sum_{i=0}^{m} p_i t^i. \tag{8.2}$$

В соответствии с теоремой 10 работы [9] для образующего сплайна компоненты вектора μ выражаются через коэффициенты характеристического многочлена по формуле

$$\mu_s = \sum_{i=0}^{m} p_i \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m+1}{j} \sum_{k=j}^{m} k^s (k-j)^i. \tag{8.3}$$

Отсюда нетрудно получить вектор μ как линейную комбинацию векторов $\varphi(k), \quad k = 0, 1, \ldots, m$, а именно,

$$\mu = \sum_{k=0}^{m} \varphi(k) \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{m+1}{j} P_{(\mu)}(k-j). \tag{8.4}$$

Теперь займемся отысканием интерполяционных задач, которые имеют прямое решение с помощью B-сплайнов. Сначала найдем вектор μ, соответствующий B-сплайну m-й степени с носителем $[0, m+1]$; этот вектор будем обозначать $\mu^{B,m}$.

Как известно (см., например, [9]), для B-сплайна характеристический многочлен $P_{(\mu)}^{B,m}$ имеет вид

$$P_{(\mu)}^{B,m}(t) = t^m/m!, \tag{8.5}$$

так что согласно формуле (8.4)

$$\mu^{B,m} = \sum_{k=0}^{m} \varphi(k) \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{m+1}{j} (k-j)^m/m!. \tag{8.6}$$

Из соотношения (8.6) при $m = 1, 2, \ldots, 7$ получим

$$\mu^{B,1} = (1, 1), \qquad \mu^{B,2} = (1, 3/2, 5/2), \qquad \mu^{B,3} = (1, 2, 13/3, 10),$$

$$\mu^{B,4} = (1, 5/2, 20/3, 75/4, 331/6),$$
$$\mu^{B,5} = (1, 3, 19/2, 63/2, 1087/10, 777/2),$$
$$\mu^{B,6} = (1, 7/2, 77/6, 49, 1939/10, 4753/6, 9992/3),$$
$$\mu^{B,7} = (1, 4, 50/3, 72, 4819/15, 1476, 146240/21, 33664). \tag{8.7}$$

Для определения вида функционалов $Q_{(A^r\mu)^\diamond}\varphi(j)$ сначала вычислим выражение

$$\nu' = (A^r\mu)^\diamond \tag{8.8}$$

при различных значениях

$$r \in \{-m, -m+1, \ldots, -1\}, \tag{8.9}$$

а затем воспользуемся формулами (7.11). Представим эти выражения для некоторых m и для соответствующих значений r из (8.9) в случае приведенного образующего B-сплайна m-й степени

$$\omega^{(B,m)}(t) \overset{def}{=} \omega_{\mu^{B,m},0,m}(t),$$

обозначая его сдвиг символом

$$\omega^{\{r\}(B,m)}(t) \overset{def}{=} \omega^{(B,m)}(t-r).$$

Линейное пространство B-сплайнов m-й степени обозначим $\mathcal{S}^{(B,m)}$,

$$\mathcal{S}^{(B,m)} = \{\tilde{u} | \tilde{u} = \sum_{j\in\mathcal{Z}} c_j \omega^{(B,m)}(t-j), \quad \forall c_j \in \mathcal{R}^1\}. \tag{8.10}$$

8.1. B-сплайны $\omega^{(B,1)}(t)$ первой степени ($m = 1$). В этом случае согласно (8.9) имеется лишь одно возможное значение r, а именно, $r = -1$, и лишь один соответствующий вектор $\nu' = (1, 0)$ и одна интерполяционная задача, допускающая прямое решение, – обычная задача Лагранжа на бесконечной сетке

$$u(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}. \tag{8.11}$$

Ее прямое решение в пространстве $\mathcal{S}^{(B,1)}$ имеет вид

$$\tilde{u} = \sum_{j\in\mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-1\}(B,1)}(t-j). \tag{8.12}$$

8.2. B-сплайны $\omega^{(B,2)}(t)$ второй степени ($m = 2$). В этом случае согласно (8.9) имеется два возможных значения r, а именно, $r = -2, -1$.

8.2.а. При $r = -2$ получим $\nu' = (1, 1/2, 0)$, так что согласно формулам (7.11) соответствующая интерполяционная задача имеет вид

$$u(j) - \frac{1}{2}u'(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}. \tag{8.13}$$

а ее прямое решение в пространстве $\mathcal{S}^{(B,2)}$ дает формула

$$\tilde{u} = \sum_{j\in\mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-2\}(B,2)}(t-j). \tag{8.14}$$

8.2.б. При $r = -1$ получим $\nu' = (1, -1/2, 0)$, и интерполяционная задача такова:

$$u(j) + \frac{1}{2}u'(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}. \tag{8.15}$$

Ее прямое решение в пространстве $\mathcal{S}^{(B,2)}$ имеет вид

$$\tilde{u} = \sum_{j\in\mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-1\}(B,2)}(t-j). \tag{8.16}$$

8.3. B-сплайны $\omega^{(B,3)}(t)$ третьей степени ($m = 3$). В этом случае согласно (8.9) имеется три интересующих нас значения r, а именно, $r = -3, -2, -1$.

8.3.а. При $r = -3$ получим $\nu' = (1, 1, 2/3, 0)$, так что соответствующая интерполяционная задача имеет вид

$$u(j) - u'(j) + \frac{1}{3}u''(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}, \tag{8.17}$$

а ее прямое решение в пространстве $\mathcal{S}^{(B,3)}$ дает формула

$$\tilde{u} = \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-3\}(B,3)}(t-j). \tag{8.18}$$

8.3.б. При $r = -2$ получим $\nu' = (1, 0, -1/3, 0)$, так что искомая интерполяционная задача имеет форму

$$u(j) - \frac{1}{6}u''(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}, \tag{8.19}$$

а ее прямое решение в пространстве $\mathcal{S}^{(B,3)}$ получается так:

$$\tilde{u} = \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-2\}(B,3)}(t-j). \tag{8.20}$$

8.3.в. При $r = -1$ получим $\nu' = (1, -1, 2/3, 0)$, так что соответствующая интерполяционная задача имеет вид

$$u(j) + u'(j) + \frac{1}{3}u''(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}, \tag{8.21}$$

а ее прямое решение в пространстве $\mathcal{S}^{(B,3)}$ найдем из формулы

$$\tilde{u} = \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-1\}(B,3)}(t-j). \tag{8.22}$$

8.4. B-сплайны $\omega^{(B,4)}(t)$ четвертой степени ($m = 4$). В этом случае согласно (8.9) рассмотрим четыре значения r, а именно, $r = -4, -3, -2, -1$.

8.4.а. При $r = -4$ найдем $\nu' = (1, 3/2, 11/6, 3/2, 0)$, и значит интерполяционная задача имеет вид

$$u(j) - \frac{3}{2}u'(j) + \frac{11}{12}u''(j) - \frac{1}{4}u'''(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}, \tag{8.23}$$

а ее прямое решение в пространстве $\mathcal{S}^{(B,4)}$ таково:

$$\tilde{u} = \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-4\}(B,4)}(t-j). \tag{8.24}$$

8.4.б. При $r = -3$ найдем $\nu' = (1, 1/2, -1/6, -1/2, 0)$, и потому интерполяционная задача имеет вид

$$u(j) - \frac{1}{2}u'(j) - \frac{1}{12}u''(j) + \frac{1}{12}u'''(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}, \tag{8.25}$$

а ее прямое решение в пространстве $\mathcal{S}^{(B,4)}$ таково:

$$\tilde{u} = \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-3\}(B,4)}(t-j). \tag{8.26}$$

8.4.в. При $r=-2$ найдем $\nu' = (1, -1/2, -1/6, 1/2, 0)$, интерполяционная задача имеет форму

$$u(j) + \frac{1}{2}u'(j) - \frac{1}{12}u''(j) - \frac{1}{12}u'''(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}, \tag{8.27}$$

а ее прямое решение в пространстве $\mathcal{S}^{(B,4)}$ таково:

$$\tilde{u} = \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-2\}(B,4)}(t-j). \tag{8.28}$$

8.4.г. При $r=-1$ найдем $\nu' = (1, -3/2, 11/6, -3/2, 0)$, и значит интерполяционной задаче можно придать вид

$$u(j) + \frac{3}{2}u'(j) + \frac{11}{12}u''(j) + \frac{1}{4}u'''(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}, \tag{8.29}$$

а ее прямое решение в пространстве $\mathcal{S}^{(B,4)}$ таково:

$$\tilde{u} = \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-1\}(B,4)}(t-j). \tag{8.30}$$

8.5. B-сплайны $\omega^{(B,5)}(t)$ пятой степени ($m=5$). В этом случае из (8.9) найдем пять значений r, $r=-5,-4,-3,-2,-1$.

8.5.а. При $r=-5$ найдем $\nu' = (1, 2, 7/2, 5, 24/5, 0)$, откуда

$$u(j) - 2u'(j) + \frac{7}{4}u''(j) - \frac{5}{6}u'''(j) + \frac{1}{5}u''''(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}, \tag{8.31}$$

а ее прямое решение в пространстве $\mathcal{S}^{(B,5)}$ таково:

$$\tilde{u} = \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-5\}(B,5)}(t-j). \tag{8.32}$$

8.5.б. При $r=-4$ найдем $\nu' = (1, 1, 1/2, -1/2, -6/5, 0)$, откуда

$$u(j) - u'(j) + \frac{1}{4}u''(j) + \frac{1}{12}u'''(j) - \frac{1}{20}u''''(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}, \tag{8.33}$$

а ее прямое решение в пространстве $\mathcal{S}^{(B,5)}$ дает формула

$$\tilde{u} = \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-4\}(B,5)}(t-j). \tag{8.34}$$

8.5.в. При $r = -3$ найдем $\nu' = (1, 0, -1/2, 0, 4/5, 0)$, и значит

$$u(j) - \frac{1}{4}u''(j) + \frac{1}{30}u''''(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}, \tag{8.35}$$

а ее прямое решение в пространстве $\mathcal{S}^{(B,5)}$ таково:

$$\tilde{u} = \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-3\}(B,5)}(t - j). \tag{8.36}$$

8.5.г. При $r = -2$ получаем $\nu' = (1, -1, 1/2, 1/2, -6/5, 0)$ и

$$u(j) + u'(j) + \frac{1}{4}u''(j) - \frac{1}{12}u'''(j) - \frac{1}{20}u''''(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}, \tag{8.37}$$

а ее прямое решение в пространстве $\mathcal{S}^{(B,5)}$ найдем так:

$$\tilde{u} = \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-2\}(B,5)}(t - j). \tag{8.38}$$

8.5.д. При $r = -1$ найдем $\nu' = (1, -2, 7/2, -5, 24/5, 0)$, откуда

$$u(j) + 2u'(j) + \frac{7}{4}u''(j) + \frac{5}{6}u'''(j) + \frac{1}{5}u''''(j) = v_j, \quad j \in \mathcal{Z}. \tag{8.39}$$

Прямое решение последней задачи в пространстве $\mathcal{S}^{(B,5)}$ таково:

$$\tilde{u} = \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega^{\{-1\}(B,5)}(t - j). \tag{8.40}$$

9. О некоторых других интерполяционных задачах

9.1. Рассмотрим случай $m = 1$ для произвольного вектора $\mu = (1, \mu_1)$. При $t \in (k, k+1)$ аппроксимационные соотношения (6.7) можно записать в виде

$$\sum_{j=k-1}^{k} \varphi(j)\omega_{(\mu)}(t - j) = \varphi(t) - \mu_1\varphi'(t), \tag{9.1}$$

или в эквивалентной форме

$$\begin{cases} \omega_{(\mu)}(t - k + 1) + \omega_{(\mu)}(t - k) = 1 \\ (k - 1)\omega_{(\mu)}(t - k + 1) + k\omega_{(\mu)}(t - k) = t - \mu_1. \end{cases} \tag{9.2}$$

Из этих соотношений найдем

$$\omega_{(\mu)}(t) = \begin{cases} t - \mu_1 + 1 & \text{при } t \in (0, 1), \\ -t + \mu_1 + 1 & \text{при } t \in (1, 2). \end{cases} \tag{9.3}$$

Приступая к определению аппроксимационных функционалов, заметим, что множество (7.13) в данном случае сводится к одному элементу, так что достаточно рассмотреть случай $r = -1$. Поскольку в этом случае

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A^{-1}\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \mu_1 \end{pmatrix},$$

и потому $\nu \overset{def}{=} \mu^\diamond = (1, 1 - \mu_1)$.

Таким образом, для $u \in \pi_1$ функционалы g_j определяются равенством

$$g_j(u) = u(j) - (1 - \mu_1)u'(j). \tag{9.4}$$

Из бесчисленного множества вариантов их непрерывного распространения на U приведем два: первый из них

$$g_j(u) = u(j + 0) - (1 - \mu_1)u'(j + 0), \tag{9.5}$$

а второй таков

$$g_j(u) = u(j - 0) - (1 - \mu_1)u'(j - 0). \tag{9.6}$$

В соответствии с первым из приведенных вариантов прямым решением интерполяционной задачи вида

$$\tilde{u}(j + 0) - (1 - \mu_1)\tilde{u}'(j + 0) = v_j \tag{9.7}$$

служит функция

$$\tilde{u} = \sum_j v_j \omega_{(\mu)}(t + 1 - j), \tag{9.8}$$

где $\omega_{(\mu)}(t)$ определяется формулой (9.3).

9.2. Здесь рассмотрим аналогичным образом сплайны второй степени ($m = 2$). Как и ранее, из соотношений

$$\sum_j \varphi(j)\omega_{(\mu)}(t - j) = \varphi(t) - \mu_1\varphi'(t) + \frac{\mu_2}{2}\varphi''(t), \tag{9.9}$$

$$supp\omega_{(\mu)} = [0, 3], \tag{9.10}$$

найдем

$$\omega_{(\mu)}(t) = \begin{cases} t^2/2 - (2\mu_1 - 3)t/2 + (2 - 3\mu_1 + \mu_2)/2 & \text{при } t \in (0, 1), \\ -t^2 + 2\mu_1 t + 1 - \mu_2 & \text{при } t \in (1, 2), \\ t^2/2 - (2\mu_1 + 3)t/2 + (2 + 3\mu_1 + \mu_2)/2 & \text{при } t \in (2, 3), \\ 0 & \text{при } t \notin [0, 3], \end{cases} \tag{9.11}$$

Множество (7.13) здесь состоит из двух чисел: $\{-2,-1\}$; рассмотрим сначала случай $r=-1$. Имеем

$$A^{-1}\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\mu_1 \\ 1-2\mu_1+\mu_2 \end{pmatrix},$$

и потому $\nu \overset{def}{=} \mu^\diamond = (1, 1-\mu_1, (\mu_1-1)^2+\mu_1^2-\mu_2)$. Следовательно, при $m=2,\ r=-1$ получаем

$$g_j^\pm(u) = u(j\pm 0) - (1-mu_1)u'(j\pm 0) + [(\mu_1-1)^2+\mu_1^2-\mu_2]u''(j\pm 0)/2. \quad (9.12)$$

Производя простейшее распространение этих функционалов, приходим к двум интерполяционным задачам вида

$$\tilde{u}(j\pm 0) - (1-\mu_1)\tilde{u}'(j\pm 0) + [(\mu_1-1)^2+\mu_1^2-\mu_2]\tilde{u}''(j\pm 0)/2 = v_j, \quad (9.13)$$

где в первой задаче следует всюду взять $+$, а во второй задаче взять $-$. Решением каждой из этих задач является выражение

$$\tilde{u}(j) = \sum_j v_j \omega_{(\mu)}(t+1-j), \quad (9.14)$$

где функция $\omega_{(\mu)}(t)$ определяется формулами (9.11).

Обращаясь к случаю $m=2,\ r=-2$, найдем

$$A^{-2}\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+\mu_1 \\ 4-4\mu_1+\mu_2, \end{pmatrix}$$

и $\nu \overset{def}{=} \mu^\diamond = (1, 2-\mu_1, (\mu_1-2)^2+\mu_1^2-\mu_2)$, откуда

$$g_j^\pm(u) = u(j\pm 0) - (2-\mu_1)u'(j\pm 0) + [(\mu_1-2)^2+\mu_1^2-\mu_2]u''(j\pm 0)/2. \quad (9.15)$$

Таким образом решение интерполяционных задач

$$\tilde{u}(j\pm 0) - (2-\mu_1)\tilde{u}'(j\pm 0) + [(\mu_1-2)^2+\mu_1^2-\mu_2]\tilde{u}''(j\pm 0)/2 = v_j \quad (9.16)$$

имеет вид

$$\tilde{u}(j) = \sum_j v_j \omega_{(\mu)}(t+2-j), \quad (9.17)$$

где функция $\omega_{(\mu)}(t)$ та же, что и выше (см. формулы (9.11)).

10. О построении интерполяционных задач без производных, допускающих прямое решение с помощью минимальных сплайнов

Сделаем несколько замечаний о путях построения других интерполяционных задач, касаясь в основном ситуации, рассмотренной в двух предыдущих пунктах.

Пусть $P(t)$ – многочлен степени не выше m. Поскольку $P^{(m+1)}(t) \equiv 0$, то по формуле Тейлора получим

$$P(t+a) = \sum_{i=0}^{m} \frac{P^{(i)}(a)}{i!} t^i. \tag{10.1}$$

Рассмотрим множество T, состоящее из $m+1$ различных точек вещественной оси. Записывая соотношение (10.1) в каждой точке этого множества, получим однозначно разрешимую систему $m+1$ уравнений относительно $m+1$ неизвестных $\frac{P^{(i)}(a)}{i!}$ с определителем Вандермонда. Например, если

$$T = \{0, 1, \ldots, m\}, \tag{10.2}$$

то упомянутая система имеет вид

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{P^{(i)}(a)}{i!} j^i = P(a+j), \quad j = 0, 1, \ldots, m. \tag{10.3}$$

Из этой системы найдем

$$P^{(i)}(a) = \sum_{j=0}^{m} c_{i,j} P(a+j), \tag{10.4}$$

где $c_{i,j}$ – определенные коэффициенты.

Таким образом, для вектора $\varphi(t) = (1, t, t^2, \ldots, t^m)^T$ можно написать

$$\varphi^{(i)}(a) = \sum_{j=0}^{m} c_{i,j} \varphi(a+j), \tag{10.5}$$

где $c_{i,j}$ – упомянутые выше коэффициенты.

Заменим в (7.11) фигурирующие там производные $u^{(\alpha)}(j)$ на выражения $\sum_{j'=0}^{m} c_{\alpha,j'} u(j+j')$, обозначим полученный функционал $g'_j(u)$ и вместо интерполяционной задачи (7.15) рассмотрим задачу

$$g'_k(\tilde{u}) = v_k, \quad k \in \mathcal{Z}. \tag{10.6}$$

Нетрудно видеть, что интерполяционная задача (10.6) имеет прямое решение в классе сплайнов (7.16).

Имеющийся произвол в выборе $m+1$ точек множества T ведет к различным интерполяционным задачам без производных. "Склеивая" некоторые соседние точки упомянутого множества (т.е. переходя к "кратным узлам"), можно включить производные различными способами; все эти задачи будут иметь прямое решение в соответствующем классе сплайнов. Дальнейшее исследование этих вопросов будет дано в другом месте.

Литература

[1] **Schoenberg I.J.** Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quart.Appl. Math. 1946. V.4. P.45–99, 112–141.

[2] **Рябенький В.С.** Об устойчивости конечно-разностнх уравнений: Дис. канд. физ. мат. наук. М., 1952.

[3] **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

[4] **Морозов В.А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.

[5] **Демьянович Ю.К.** Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1994.

[6] **Strang G., Fix G.** Fourier Analysis of the finite element method in Ritz – Galerkin Theory // Stud. Appl. Math. 1969. V.48. N.3. P.265–273.

[7] **Демьянович Ю.К., Михлин С.Г.** О сеточной аппроксимации функций соболевских пространств. Численные методы и функциональный анализ // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1973. Т.35. С.6–11.

[8] **Demjanovich Y.K.** Some Propeties of Minimal Splines // Math. Nachr. 1996. V.177. P.57–79.

[9] **Демьянович Ю.К.** О классификации пространств минимальных сплайнов. Деп. в ВИНИТИ 2486-В97 от 24.07.1997.

[10] **Демьянович Ю.К.** Об образующих минимальных сплайнах и их характеристических многочленах. Деп. в ВИНИТИ 2485-В97 от 24.07.1997.