Б.В.Алексеев, Д.В.Афанасьева, А.Ю.Иваницкий

ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ ДЛЯ ФУНКЦИИ НАКОПЛЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕННОЙ АКСИОМАМИ

Abstract

Работа посвящена исследованию общих свойств математической модели накопления капитала, инвестированного в некоторый проект. При этом предполагаются выполненными лишь наиболее общие свойства рациональности и состоятельности функции накопления, отражающей внутренние характеристики проекта. Рассматриваются дискретный и непрерывный потоки инвестиций. Получены формулы стоимости потока платежей в общем случае произвольной функции накопления, а также для известных ранее и новых примеров функций накопления.

Введение

Основным элементом математической модели инвестиций является функция накопления капитала, которая обычно в работах по финансовой математике [1-4] рассматривается в виде

$$A = C \cdot A(t_0, t), \tag{1}$$

где C — первоначальный капитал; t_0 — дата вложения этого капитала в некоторый инвестиционный проект, описываемый данной функцией; t — текущий момент времени. При этом для функции A предполагаются выполненными следующие свойства (приведенные, например, в работах [2,4]):

а) условие рациональности рынка:

$$A(t, t) = 1, \tag{2}$$

б) условие состоятельности рынка:

$$A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1) \cdot A(t_1, t_2). \tag{3}$$

Мы рассматриваем более широкий класс функций, не предполагая пропорциональность накопленного капитала вложенному. Такой подход актуален, поскольку все ресурсы в нашем мире конечны (каждый рынок характеризуется некоторой предельной емкостью и накопленная величина капитала также не превышает этого предельного значения). Первый раздел статьи содержит описание модели накопления капитала для функций накопления с обобщенными аксиомами рациональности и состоятельности. Во втором, третьем и четвертом разделах приведены формулы стоимости потока платежей соответственно для дискретного, непрерывного и смешанного случая. Пятый раздел содержит расчет стоимости различных потоков платежей для конкретных примеров функций накопления. Один из этих примеров учитывает конечную емкость рынка.

1. Описание и основные свойства модели

Пусть существует некоторый инвестиционный проект, описываемый функцией $A = A(C, t_0, t)$. Мы предполагаем, что неотрицательная функция накопления $A = A(C, t_0, t)$, определенная для значения $C \geq 0$, удовлетворяет двум аксиомам:

$$\begin{array}{ll} 1. & A(C,t,t) = C, \\ 2. & A(A(C,t_0,t_1),t_1,t_2) = A(C,t_0,t_2). \end{array} \tag{4}$$

Очевидно, что если к этим двум аксиомам добавить еще одну $A(C, t_0, t) = C \cdot A(1, t_0, t)$, то получим класс функций, рассмотренных ранее.

Легко проверить, что функция

$$A = \frac{\Delta \cdot C}{(\Delta - C)e^{-\delta(t-t_0)} + C} \tag{5}$$

удовлетворяет аксиомам (4) и может поэтому рассматриваться, как функция накопления, характеризующая некоторый финансовый рынок. При этом из соотношения (5) видно, что накопленное значение не является прямо пропорциональным вложенному капиталу. Кроме того, легко видеть, что значения функции (5) находятся в интервале $0 < A < \Delta$, если первоначальный капитал C также удовлетворяет неравенству $0 < C < \Delta$.

Функция накопления в финансовой математике решает задачу определения величины накопленного капитала на будущий момент времени. Часто приходится решать и обратную задачу — нахождение первоначального капитала C_0, необходимого для того, чтобы к моменту t_1 накопленное значение капитала составило C_1. Этот процесс называется дисконтированием. Найдем C_0. Имеем $C_1 = A(C_0, t_0, t_1)$. Тогда $C_0 = A(C_0, t_0, t_0) = A(A(C_0, t_0, t_1), t_1, t_0) = A(C_1, t_1, t_0)$. Таким образом, функция дисконтирования является частным случаем функции аккумулирования — в случае, когда третий аргумент меньше второго.

2. Дискретный поток платежей

Пусть в инвестиционный проект, описываемый функцией $A = A(C, t_0, t)$, осуществляется поток платежей: в моменты времени $t_1 \dots t_n$ вносятся суммы $C_1 \dots C_n$. Вообще говоря, величины C_i могут быть и отрицательными, что соответствует изъятию капитала. Надо найти значение наращенной суммы в любой момент времени. Для оценки стоимости платежей введем две функции: функцию накопления капитала инвестора $S(t)$ — это стоимость платежей с учетом только тех C_i, которые поступили до момента времени t, и функцию $V(t)$ — стоимость всего потока платежей, дисконтированная на момент времени t. Получаем

$$\begin{aligned}
t < t_1 &\;\Rightarrow\; S(t) = 0,\\
t_1 < t < t_2 &\;\Rightarrow\; S(t) = A(C_1, t_1, t),\\
t_2 \le t < t_3 &\;\Rightarrow\; S(t) = A(A(C_1, t_1, t_2) + C_2, t_2, t),\\
t_2 \le t < t_3 &\;\Rightarrow\; S(t) = A(A(A(C_1, t_1, t_2) + C_2, t_2, t) + C_3, t_3, t),\\
&\;\dots
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
&A_1 = C_1,\\
&A_2 = A(A_1, t_1, t_2) + C_2,\\
&A_3 = A(A(A_1, t_1, t_2) + C_2, t_2, t_3) + C_3 = A(A_3, t_2, t_3) + C_3,\\
&\dots\\
&A_n = A(A_{n-1}, t_{n-1}, t_n) + C_n.
\end{aligned} \tag{6}$$

С учетом этих обозначений

$$S(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1,\\ A(A_1, t_1, t), & t_1 \le t < t_2,\\ A(A_2, t_2, t), & t_2 \le t < t_3,\\ \quad\dots & \\ A(A_n, t_n, t), & t \ge t_n. \end{cases}$$

Стоимость всего потока платежей на момент времени t равна

$$V(t) = A(A_n, t_n, t), \text{ где } A_n = A(A_{n-1}, t_{n-1}, t_n) + C_n \text{ и } A_1 = C_1. \tag{7}$$

Замечание 1. Эта формула, как и формула для $S(t)$, намного упрощается, если выполняется следующее соотношение аддитивности

$$A(C_1 + C_2, t_0, t) = A(C_1, t_0, t) + A(C_2, t_0, t). \tag{8}$$

Действительно

$$A(A_k, t_k, t) = A(A(A_{k-1}, t_{k-1}, t_k) + C_k, t_k, t) =$$
$$= A(A(A_{k-1}, t_{k-1}, t_k), t_k, t) + A(C_k, t_k, t) =$$
$$= A(A_{k-1}, t_{k-1}, t) + A(C_k, t_k, t) = \ldots = \sum_{i=1}^{k} A(C_i, t_i, t).$$

Формула для $S(t)$ принимает вид

$$S(t) = \begin{cases} 0, \quad t < t_1, \\ A(A_1, t_1, t), \quad t_1 \le t \le t_2, \\ A(C_1, t_1, t) + A(C_2, t_2, t), \quad t_2 \le t < t_3, \\ \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A(C_i, t_i, t), \quad t \ge t_n. \end{cases}$$

Таким образом, стоимость всего потока платежей равна

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} A(C_i, t_i, t), \text{ для } \forall\, t.$$

Замечание 2. Как можно показать, требование аддитивности (8) функции накопления (4) равносильно системе аксиом (2),(3). Таким образом, соотношение (8) выполняется не для всех функций $A = A(C, t_0, t)$, удовлетворяющих аксиомам (4). Например, функция (5) удовлетворяет этим аксиомам, но для нее не выполняется соотношение (8). В пятом разделе функция (5) будет изучена подробнее.

3. Непрерывный поток платежей

Непрерывный поток платежей задан на промежутке $[t_0, T]$ функцией $M(t_0, t)$, представляющей собой количество всех денег, поступивших за период $[t_0, t]$. Интенсивностью потока платежей называется функция $\rho(t)$

$$\rho(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{M(t, t + \Delta t) - M(t, t)}{\Delta t} = \frac{\partial M(t, \omega)}{\partial \omega}\Big|_{\omega = t}.$$

Пусть в момент времени $t = t_0$ в инвестиционном проекте имеется сумма $A = A_0$. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $t_0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. При достаточно малом $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ имеем

$$\Delta M_k = M(t_0, t_k + \Delta t_k) - M(t_0, t_k) = M(t_k, t_k + \Delta t_k) - M(t_k, t_k) =$$
$$= \rho(\xi_k)\Delta t_k + o(\Delta t_k),$$

где $t_k < \xi_k < t_{k+1}$.

M_k — количество денег, поступивших за время Δt_k. Подобно дискретному случаю обозначим

$$\begin{aligned}
&A_1 = A(A_0, t_0, \xi_1) + \Delta M_1 = A(A_0, t_0, \xi_1) + \rho(\xi_1)\Delta t_1 + o(\Delta t_1),\\
&A_2 = A(A_1, \xi_1, \xi_2) + \Delta M_2 = A(A_1, \xi_1, \xi_2) + \rho(\xi_2)\Delta t_2 + o(\Delta t_2),\\
&\ldots\\
&A_{n-1} = A(A_{n-2}, \xi_{n-2}, \xi_{n-1}) + \Delta M_{n-1} =\\
&= A(A_{n-2}, \xi_{n-2}, \xi_{n-1}) + \rho(\xi_{n-1})\Delta t_{n-1} + o(\Delta t_{n-1}).
\end{aligned} \tag{9}$$

Весь поток платежей на момент времени T равен

$$V(T) = \lim_{\max_i \Delta t_i \to 0} A(A_{n-1}, \xi_{n-1}, T). \tag{10}$$

Найдем значение $V(T)$, используя равномерное разбиение отрезка $[t_0, T]$, то есть полагая $\Delta t_i = \Delta t$ (мы предполагаем, что предел существует). Разложим A_i в ряд по Δ в окрестности нуля

$$\begin{aligned}
A_2 = A(A(A_0, t_0, \xi_1) + \rho(\xi_1)\Delta t + o(\Delta t), \xi_1, \xi_2) + \rho(\xi_2)\Delta t + o(\Delta t) =\\
= A(A, t_0, \xi_2) + \frac{\partial A(A_0, t_0, \xi_2)}{\partial C}\rho(\xi_1)\Delta t + \rho(\xi_2)\Delta t + o(\Delta t),\\
\ldots\\
A_{n-1} = A(A_0, t_0, \xi_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-2} \prod_{k=i+1}^{n-1} \frac{\partial A(A(A_0, t_0, \xi_{k-1}), \xi_{k-1}, \xi_k)}{\partial C}\rho(\xi_i)\Delta t +\\
+\rho(\xi_{n-1})\Delta t + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

Используя вторую аксиому, имеем

$$A(A(A_0, t_0, \xi_i), \xi_i, \xi_{i+2}) = A(A(A(A_0, t_0, \xi_i), \xi_i, \xi_{i+1}), \xi_{i+1}, \xi_{i+2}).$$

Дифференцируя обе части по первой переменной, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A(A(A_0, t_0, \xi_i), \xi_i, \xi_{i+2})}{\partial C} =\\
= \frac{\partial A(A(A(A_0, t_0, \xi_i), \xi_i, \xi_{i+1}), \xi_{i+1}, \xi_{i+2})}{\partial C}\frac{\partial A(A(A_0, t_0, \xi_i), \xi_i, \xi_{i+1})}{\partial C} =\\
= \frac{\partial A(A(A_0, t_0, \xi_{i+1}), \xi_{i+1}, \xi_{i+2})}{\partial C}\frac{\partial A(A(A_0, t_0, \xi_i), \xi_i, \xi_{i+1})}{\partial C}.
\end{aligned}$$

Аналогично методом математической индукции легко доказать, что для нашего класса функций накопления выполняется

$$\prod_{k=i+1}^{n-1} \frac{\partial A(A(A_0, t_0, \xi_{k+1}), \xi_{k+1}, \xi_k)}{\partial C} = \frac{\partial A(A(A_0, t_0, \xi_i), \xi_i, \xi_{n-1})}{\partial C}.$$

Отсюда

$$A_{n-1} = A(A_0, t_0, \xi_{n-1}) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial A(A(A_0, t_0, \xi_i), \xi_i, \xi_{n-1})}{\partial C} \rho(\xi_i)\Delta t + \rho(\xi_{n-1})\Delta t + o(\Delta t),$$

$$V(T) = \lim_{\max_i \Delta t_i \to 0} A(A_{n-1}, \xi_{n-1}, T) =$$
$$= A(A_0, t_0, T) + \int_{t_0}^{T} \frac{\partial A(A(A_0, t_0, t), t, T)}{\partial C} \rho(t) dt. \tag{11}$$

Для того, чтобы получить стоимость потока платежей в любой момент времени, надо дисконтировать $V(T)$ на момент времени t $V(t) = A(V(T), T, t)$. Функция накопления капитала инвестора при этом примет вид

$$S(t) = A(A_0, t_0, t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial A(A(A_0, t_0, \tau), \tau, t)}{\partial C} \rho(\tau)\, d\tau, \quad t \in [t_0, T].$$

4. Смешанный поток платежей

Пусть на промежутке $[t_0, T]$ задан непрерывный поток платежей с интенсивностью $\rho(t)$ и, кроме того, в моменты времени t_i $(t_0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T)$ вносятся суммы $C_1 \ldots C_n$. В момент времени $t = t_0$ в инвестиционном проекте имеется сумма $A = A_0$. Найдем сумму, которая будет находиться в инвестиционном проекте в момент времени T. Значение потока платежей, поступивших до момента времени $t = t_1$ включительно, равно

$$A_1 = A(A_0, t_0, t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial A(A(A_0, t_0, \tau), \tau, t_1)}{\partial C} \rho(\tau)\, d\tau + C_1.$$

Аналогично, в следующие моменты времени функция накопления принимает значения

$$A_i = A(A_{i-1}, t_{i-1}, t_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\partial A(A(A_{i-1}, t_{i-1}, \tau), \tau, t_i)}{\partial C} \rho(\tau)\, d\tau + C_i.$$

Таким образом,

$$V(T) = A(A_n, t_n, T) + \int_{t_i}^{T} \frac{\partial A(A(A_n, t_n, \tau), \tau, T)}{\partial C} \rho(\tau)\, d\tau,$$

где A_n определяется итерационно с учетом предыдущих формул.

5. Расчет стоимости различных потоков платежей с конкретными функциями накопления

5.1. Функция накопления с интенсивностью процентов, зависящей от времени

Пусть на рынке действует функция накопления

$$A = C\exp(\int_{t_0}^{t} \delta(t)\,dt), \tag{12}$$

где $\delta(t)$ — интенсивность выплаты процентов.

Рассмотрим *дискретный* поток платежей. Пусть в моменты времени t_i поступают платежи C_i, $i = 1, \ldots, n$. Функция (12) аддитивна по первой переменной , поэтому

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} A(C_i, t_i, t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp(\int_{t_i}^{t} \delta(t)\,dt).$$

Это стоимость всего потока платежей на момент времени t.

Если платежи производятся достаточно часто, имеет смысл поток платежей описывать *непрерывным* случаем. Пусть задана интенсивность выплаты платежей $\rho(t)$ на отрезке времени $[t_0, T]$. В момент $t = t_0$ в инвестиционном проекте имеется сумма $A = A_0$. Тогда

$$V(T) = A(A_0, t_0, T) + \int_{t_0}^{T} \frac{\partial A(A(A_0, t_0, t), t, T)}{\partial C} \rho(t)\,dt =$$
$$= A_0 \exp(\int_{t_0}^{T} \delta(t)\,dt) + \int_{t_0}^{T} \rho(t) \exp(\int_{t}^{T} \delta(t)\,dt)\,dt.$$

Заметим, что эти формулы, как для дискретного потока, так и для непрерывного, соответствуют полученным ранее другими авторами. Например, аналогичные формулы описываются в [2].

5.2. Функция накопления для рынка с ограниченной емкостью

Рассматривается функция накопления (5)

$$A = \frac{\Delta \cdot C}{(\Delta - C)e^{-\delta(t-t_0)} + C}.$$

Дискретный поток: в моменты времени t_i поступают платежи C_i, $i = 1, \ldots, n$. По формулам (6) для дискретного случая, получаем

$$A_1 = C_1,$$
$$A_2 = C_2 + \frac{1}{\dfrac{1}{\Delta}\left(1 - \exp(-\delta(t_2 - t_1))\right) + \dfrac{1}{C_1 \exp(\delta(t_2 - t_1))}}.$$

Эти формулы можно продолжить. При этом возникает представление накопленного капитала в виде цепной дроби, причем каждый следующий платеж соответствует двум новым звеньям дроби. Общее выражение накопленного капитала имеет вид

$$A_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

где

$$a_{2k-1} = \tfrac{1}{\Delta}(1 - \exp(-\delta(t_{n-k} - t_{n-k-1})))\exp(-\delta(t_n - t_{n-k+1})),$$
$$a_{2k} = C_{n-k}\exp(\delta(t_n - t_{n-k})).$$

Непрерывный поток: на отрезке $[t_0, T]$ задана интенсивность выплаты платежей $\rho(t)$. Рассмотрим для простоты случай, когда до момента $t = t_0$ в инвестиционном проекте не было никаких средств, т.е. $A_0 = 0$. Стоимость непрерывного потока платежей равна

$$V(T) = A(0, t_0, T) + \int_{t_0}^{T} \frac{\partial A(A(0, t_0, t), t, T)}{\partial C}\rho(t)\,dt = \int_{t_0}^{T} \frac{\partial A(0, t, T)}{\partial C}\rho(t)\,dt,$$

для данной функции накопления

$$\frac{\partial A(0, t, T)}{\partial C} = e^{\delta(T-t)}.$$

Таким образом

$$V(T) = \int_{t_0}^{T} \rho(t)\exp(\delta(T - t))\,dt.$$

Эту формулу также можно получить также, не пользуясь общей формулой (11), а непосредственно, рассматривая равномерное разбиение отрезка $[t_0, T]$ и используя формулы (9) и (10).

Выводы

Таким образом, в данной работе представлено обобщение модели накопления, позволяющее учесть фактор конечной емкости рынка и другие особенности реальных финансовых инструментов. Например, эта модель позволяет рассматривать функции накопления с итенсивностью процентов,зависящей не только от срока депозита, но и от величины вложенного капитала.

Литература

[1] **Бухвалов А.В., Идельсон А.В.** Самоучитель по финансовым расчетам. М.: Мир, Пресс- сервис. 1997.

[2] **Купер Ф.** Введение в актуарную математику. Пер. с англ. Минск, 1996.

[3] **Gerber H.U.** Life Insurance Mathematics. Springer. 1995.

[4] **Boyle P.P.** Options and management of financial risk. Scaumburg. 1992.