В.Г.Лежнев

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВЕРШИНЫ ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА[1]

Abstract

Излагается алгоритм вычисления вершины выпуклого многогранника в R^n, использующий сингулярное разложение матрицы.

Пусть в пространстве $R^n \ni x$ выпуклый многогранник P задается системой неравенств

$$Ax \leq b, \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})$ прямоугольная вещественная матрица размерности $m \times n, \quad m \geq n, \quad b = (b_1, b_2, \dots b_m)^T, \quad T$ - знак транспонирования. Предполагается, что P - не пустое и ограниченное замкнутое множество.

Вершиной многогранника P будем называть точку $x = x'$ такую, что a) она обращает в равенство некоторые n неравенств в (1) с линейно независимыми строками матрицы A, b) она удовлетворяет остальным $m - n$ неравенствам.

Если выполняется только условие a), то такую точку $x = x'$ будем называть псевдовершиной многогранника P.

Предполагается также, что каждое неравенство в (1) определяет некоторую $(n-1)$-мерную грань многогранника P. Исключение любого неравенства из (1) дает новый многогранник $P', \quad P' \supset P, \quad P'$ и P имеет хотя бы одну общую вершину.

Рассматривается задача определения вершины многогранника P и для этого используется сингулярное разложение квадратных матриц порядка n. Решение этой задачи может быть использовано в задаче линейного программирования. Применение симплекс-метода для последней требует вычислений с квадратными матрицами размерностей больших в два и более раза [1, 2]. При этом может быть использован достаточно удобный и алгоритмичный метод построения сингулярного разложения – метод максимизации столбцов [3].

Обозначим $A_1 := A$, пусть $B_1 - n \times n-$матрица из первых строк A_1,

$$A_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ C_1 \end{bmatrix}.$$

[1]Исследования проводятся при финансовой поддержке РФФИ, грант N 98-01-03627.

Рассмотрим алгоритм, состоящий из следующих этапов α) и β).

α) Построим для B_1 сингулярное разложение $B_1 = W_1 S_1 V_1$ (см., напр., [2]). Левую часть в (1) перепишем в виде

$$A_1 x = \begin{bmatrix} W_1 S_1 \\ C_1 V_1^T \end{bmatrix} V_1 x.$$

Пусть матрица B_1 плохо обусловлена (и задача обращения ее является некорректно поставленной). Это значит, что последние $n - r$ диагональных элементов матрицы $S = diag(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ равны или близки нулю; здесь по построению $s_k \geq s_{k+1}$ [3].

β) Заменим последние $n - r$ строк в $W_1 S_1$ некоторыми $n - r$ строками из $C_1 V_1^T$. После этой перестановки строк в $W_1 S_1$ и $C_1 V_1^T$ обозначим полученные матрицы через B_2 и C_2 и обозначим $A_2 := (B_2^T C_2^T)^T$.

Произведем соответствующую перестановку элементов столбца b, меняя его элементы $b_{r+1}, \ldots, b_n$ с соответствующими элементами из нижней части b; полученный столбец обозначим $b^2 = (b_1^2, b_2^2, \ldots, b_n^2)^T$.

Система неравенств (1) заменяется следующей эквивалентной системой

$$\begin{bmatrix} B_2 \\ C_2 \end{bmatrix} V_1 x = A_2 V_1 x \leq b^2. \tag{2}$$

З а м е ч а н и е. Если, например, $s_{r+1} = \ldots = s_n = 0$ и $s_r \approx 1$, то ранг матрицы $W_1 S_1$ равен r и $W_1 S_1$ хорошо обусловлена. После указанной перестановки строк ранг вновь полученной матрицы $B_2 = (b_{ij}^2)$ увеличивается, $r_2 = \mathrm{rang} B_2 \geq r + 1$, если хотя бы один элемент ее для $i \geq r+1, j \geq r+1$ отличен от нуля. В общем случае ситуация аналогична, т.е. мера обусловленности для B_2 меньше чем для $W_1 S_1$.

Повторим процедуру α) – β) для A_2. Сначала на этапе α) построим сингулярное разложение $B_2 = W_2 S_2 V_2$, неравенства (2) перепишем в виде

$$A_2 V_1 x = \begin{bmatrix} W_2 S_2 \\ C_2 V_2^T \end{bmatrix} V_2 V_1 x \leq b^2. \tag{2'}$$

Далее выполняется этап β). Если последние $n - r_2$ диагональных элементов S_2 равны нулю или малы, то заменим эти последние строки в $W_2 S_2$ некоторыми (подходящими) строками матрицы $C_2 V_2^T$. Обозначим новую квадратную матрицу через B_3, оставшуюся часть – через C_3 и $A_3 := (B_2^T C_3^T)^T$.

Произведем соответствующую этой замене строк перестановку элементов столбца b^2 и обозначим вновь полученный столбец b^3.

Получим эквивалентную системе (2) систему

$$\begin{bmatrix} B_3 \\ C_3 \end{bmatrix} V_2V_1x = A_3V_2V_3x \le b^3. \tag{3}$$

Продолжая таким образом, через некоторое число шагов получим эквивалентную систему неравенств

$$\begin{bmatrix} B_k \\ C_k \end{bmatrix} V_{k-1}\dots V_1x = A_kU_kx \le b^k, \tag{k}$$

где $U_k = V_{k-1}\dots V_2V_1$ – ортогональная, и матрица $B_k = W_kS_kV_k$ является хорошо обусловленной (иначе многогранник P не может быть ограничен), при этом

$$B_k^{-1} = V_k^TS_k^{-1}W_k^T.$$

Сделаем замену

$$z = B_kU_kx \tag{4}$$

и получим систему неравенств

$$\begin{bmatrix} E \\ C_kB_k^{-1} \end{bmatrix} z \le b^k, \tag{5}$$

определяющую многогранник Q – образ многогранника P при отображении (4).

Точка $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) = (b_1^k, \dots, b_n^k)$ является вершиной многогранника Q или его псевдовершиной.

Если z^0 – вершина Q, то задача решена – искомая вершина определяется равенством $x^0 = U_k^TB_k^{-1}z^0$. Если же z^0 – псевдовершина, то в (5), точнее, в системе неравенств

$$C_kB_k^{-1}z \le (b_{r+1}^k, \dots, b_m^k)^T \tag{6}$$

не выполняются при $z = z^0$ некоторые p неравенств, $p < n$. Исключая их из (5), получим систему неравенств, определяющую многогранник Q', такой что z^0 - вершина $Q', Q' \supset Q$, и Q' и Q имеют общие вершины и $(n-1)$-мерные грани.

Обратимся к нахождению искомой вершины $z' \in Q$, являющейся общей для Q и Q'. Возьмем вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i = -\sqrt{1/n}$, и линейную функцию $\ell(z) = (\alpha, z)$. Существует гиперплоскость $S = \{z : (\alpha, z) = C_0\}$, ортогональная вектору α, содержащая некоторую вершину z'' многогранника Q' и такая, что многогранник M, образованный полупространствами $(\alpha, z) \le C_0$ и $z_i \le b_i^k, i = 1, 2, \dots, n$, содержит Q'.

Вершина z'' принадлежит также Q и является искомой, $z'' = z'$. Для ее определения осуществляется направленный перебор вершин Q_1 из вершины $z = z^0$, минимизирующий функцию $\ell(z)$. Искомая общая вершина z' может определиться при указанном переборе вершин и раньше, чем будет достигнута z''.

Обратное преобразование имеет вид

$$x = U_k^T B_k^{-1} z = (V_1^T V_2^T \ldots V_{k-1}^T) V_k^T S_k^{-1} W_k^T z,$$

при этом $Q \to P, z' \to x', x'-$ вершина многогранника P.

З а м е ч а н и е. Число итераций k практически не велико; при умножении ортогональных матриц суммирование следует производить попарно, как при суммировании малых слагаемых.

В заключение отметим кратко алгоритм направленного перебора вершин. Он может быть организован обычным образом: для вершины z^0 известны направляющие векторы всех ребер, и выбирается ближайшее ребро к направлению α; производится переход с шагом h по этому лучу до тех пор, пока не нарушается одно из неравенств в (5) (не учитывая отброшенные); делением шага пополам уточняется и определяется новая вершина z^1 и, далее, ее ребра; из этих ребер - лучей вновь выбирается ближайшее к вектору α и производится переход с шагом h.

Литература

[1] **Калиткин Н.Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978

[2] **Беклемишев Д.В.** Дополнительные главы линейной алгебры. М., Наука, 1983.

[3] **Лежнев В.Г., Нестеренко А.Г.** Метод сингулярного разложения матрицы // Численные методы анализа. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995.