МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Научно-исследовательский вычислительный центр

М. В. Колос, И. В. Колос

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Под редакцией В.А. Морозова

Издательство Московского университета
2000

УДК 519.6; 517.5; 62-50
ББК 22.19
К 61

Колос М.В., Колос И.В. Методы оптимальной линейной фильтрации / Под ред. В.А. Морозова. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – 102 с.

Работа посвящена методам решения задач линейной оптимальной фильтрации для восстановления сигналов на фоне шумов различной природы. Наряду с изложением известных алгоритмов винеровской и калмановской фильтрации в монографии приведен регуляризирующий метод решения, основанный на применении фильтра Калмана-Бьюси для некорректно поставленной задачи определения линейной оптимальной оценки, если полезный сигнал наблюдается с цветным шумом, а также разработан приближенный метод решения задачи восстановления сигналов в системах, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными.

Монография рассчитана на научных сотрудников, аспирантов и студентов старших курсов, интересующихся проблемами восстановления сигналов на фоне гауссовских шумов. Она может быть полезна при чтении специальных курсов и решении ряда задач математической обработки результатов эксперементов, теоретической и прикладной кибернетики, теории управления, радиоэлектроники.

Издание осуществлено при финансовой поддержке
ФНТП "Университеты России - фундаментальные исследования"
(грант № 4-5584),
Российского фонда фундаментальных исследований
(грант № 98-01-00345),
РФФИ "Кубань" (грант № 98-01-03628)

Рецензенты:
доктор технических наук О. Б. Арушанян,
кандидат физико-математических наук С. Ф. Гилязов

ISBN 5-211-03916-5

Содержание

Введение

Одна из важнейших задач теории управления заключается в следующем: требуется наилучшим образом извлечь информацию об изучаемом процессе из измерений некоторых его характеристик, измерений – часто косвенных и проведенных с погрешностями (зашумленных). Это необходимо для принятия правильных решений по наблюдению за исследуемым процессом или выработке оптимального (в некотором смысле) управления. Возникновение такой проблемы, называемой задачей фильтрации или оценивания, связано с тем, что в любой системе связи или управления не все характеристики процессов (сигналов) заданы точно (передача априорно известной информации не имеет смысла).

Первые попытки разработать эффективные математические методы решения задач фильтрации можно отнести к временам Г. Галилея, А. Лежандра и К. Гаусса. Гауссу, как считается, принадлежит первое употребление понятия оценивания, которое было применено к расчету траекторий движения небесных тел. В 1795 г. К. Гаусс разработал метод наименьших квадратов, который является одним из основных в теории прогнозирования и фильтрации. Метод наименьших квадратов позволил решить задачу прогноза в случае косвенных наблюдений процесса на конечном промежутке времени, а именно: определить траекторию астероида Церера, открытого в 1801 г. и скрывшегося из поля зрения в облаках, а затем в лучах Солнца – по наблюдениям 1/40 части его орбиты. Расчеты, выполненные Гауссом, позволили определить место нахождения астероида после прохода им зоны невидимости и продолжить наблюдение за ним.

Метод наименьших квадратов стал мощным аппаратом при решении задач прогноза и фильтрации. Недостатком метода, в первоначальном его варианте, являлось то, что при поступлении новой информации о наблюдаемом процессе для уточнения оценки требовалось проводить расчет в полном объеме, то есть с самого начала. В 1821 г. К.Гаусс предложил новый вариант метода наименьших квадратов, который позволил при поступлении новых измерений лишь уточнять ранее полученный результат. Таким образом, была разработана рекуррентная версия метода наименьших квадратов.

Следующий этап разработки математических методов решения задач управления связан с интенсивным развитием радиолокационной техники, которое началось в конце 30-тых – начале 40-ых г.г. XX столетия. При этом на первый план выдвигалась проблема решения задачи фильтрации – выделения полезного сигнала на фоне шума. Эту задачу в случае линейного оценивания дискретных стационарных случайных процессов впервые рассмотрел А.Н. Колмогоров [15]. Несколько позже аналогичными вопросами занимался Н. Винер [44], но для непрерывных стационарных случайных процессов. С работ А.Н. Колмогорова и Н. Винера берет начало современная теория фильтрации. А.Н. Колмогоров и Н. Винер рассматривали стационарные случайные процессы на бесконечном интервале наблюдения и для получения оптимальной оценки использовали метод наименьших квадратов. Н. Винером было показано, что задача линейной оптимальной фильтрации по методу наименьших квадратов эквивалентна решению интегрального уравнения – уравнения Винера-Хопфа. Теория фильтрации Колмогорова-Винера основана на методе Фурье, что приводит к описанию фильтра в терминах частотных характеристик. Н. Винер также дал оригинальный метод решения интегрального уравнения, который состоит в преобразовании интегрального уравнения в частотной области и определении частотной характеристики фильтра, используя разложение спектральной плотности наблюдаемого процесса в произведение двух зеркально симметричных сомножителей. Это соответствует построению частотной характеристики системы, порождающей исходный процесс при поступлении на ее вход белого шума с известными статистиками. Такая интерпретация метода Винера была дана в 1950 г. Боде и Шенноном и носит название концепции формирующего фильтра. Концепция формирующего фильтра занимает важное место в современной теории фильтрации [27].

Сразу после выхода работ А.Н. Колмогорова и Н. Винера делались попытки снять ограничения, введенные ими. В 1952 г. Р. Бутон обобщил интегральное уравнение Винера-Хопфа на случай нестационарных процессов и фильтров, зависящих от времени [38]. Однако при этом не был указан метод решения полученного интегрального уравнения. Решение этого уравнения предложил в 1957 г. В.С. Пугачев [26].

Несколько позже Р. Бьюси [40] показал, что параметр (импульсная переходная функция) фильтра может быть выписан с помощью дифференциальных уравнений и для нестационарных процессов. Аналогичные результаты для дискретного времени получены в 1958 г. П. Сверлингом [43].

В 1960 г. (независимо друг от друга) Р.Л. Стратонович [32] и Р. Калман [41] обобщили винеровскую фильтрацию на нестационарные гауссовские случайные процессы и наблюдения, полученные на конечном интервале времени. Алгоритм Р. Калмана решения задачи, в отличие от алгоритма Р.Л. Стратоновича, не был строго математически обоснован, но все же работа Р. Калмана получила широкое распространение среди инженеров-практиков, так как была написана на "инженерном" языке. Фильтр Калмана стали применять в системах управления и наблюдения спутников и ракет. Несколько позже математическое обоснование алгоритма Калмана было получено в [14].

В 1961 г. Р. Калман совместно с Р. Бьюси [13] опубликовали аналогичный результат для непрерывного времени. В этой статье задача фильтрации формулируется в пространстве состояний, выведен матричный вариант уравнения Винера-Хопфа, который преобразован в эквивалентную ему систему дифференциальных уравнений.

Работы Р. Калмана, Р. Бьюси и Р.Л. Стратоновича открыли новый этап в разработке методов решения задач оценивания и прогноза. К достоинствам процедуры фильтрации Калмана-Бьюси относятся рекуррентность алгоритма и его эффективная реализуемость на ЭВМ.

Следует особо подчеркнуть, что Р. Калман и Р. Бьюси при выводе уравнений фильтра существенно использовали невырожденность матрицы интенсивности белого шума в наблюдениях [13]. В этом случае уравнение Винера-Хопфа фактически является уравнением второго рода, задача решения которого корректна [33].

В 1965 г. А. Брайсон и Д. Йохансен [39], а затем Ф. Гулько и Ж. Новосельцева [9] распространили теорию фильтрации Калмана-Бьюси на случай, когда для помехи в измерениях можно построить формирующий фильтр. Отметим, однако, что задача построения формирующего фильтра сама по себе сложная и решена лишь в некоторых частных случаях.

Метод решения задачи оценивания в случае, когда белый шум в наблюдениях вырожденный (матрица интенсивности белого шума в измерениях не является строго положительно определенной), основанный на идее псевдообращения, был предложен Р. Калманом [14]. Для нахождения псевдообратной матрицы использовалось К – обращение. К – обращение, как известно, неоднозначно и это затрудняет реализацию алгоритма [45].

В 70-е годы рядом авторов [3,5,11,23,25,29] для решения задачи линейной оптимальной фильтрации с небелыми (цветными) шумами в наблюдениях были предложены методы решения, основанные на идее регуляризации А.Н. Тихонова [33]. В 1977 г. В.П. Диденко и О.Е. Цитрицкий получили алгоритм решения задачи линейной оптимальной фильтрации с шумом, элементы ковариационной матрицы которого принадлежат пространству интегрируемых с квадратом функций [12,25,3]. Таким образом, проблема решения задачи оценивания в линейном случае решена для почти всех гауссовских случайных процессов.

Вопросы фильтрации негауссовских процессов и нелинейной фильтрации не столь хорошо изучены из-за их сложности и отсутствия единого подхода к решению таких задач [27].

В данной монографии рассмотрены методы решения задач линейной оптимальной фильтрации в случае гауссовских случайных процессов для систем с сосредоточенными и распределенными параметрами. Для гауссовских процессов линейная оценка является наилучшей [8,30] и применение таких критериев оптимальности, как критерий минимума среднеквадратической ошибки, критерий правдоподобия и байесовское оценивание, приводит к одному и тому же результату [30].

В работе представлен разработанный авторами регуляризирующий алгоритм, основанный на применении фильтра Калмана-Бьюси для некорректно поставленной задачи линейной оптимальной фильтрации с цветными (в частности, вырожденными белыми) шумами в измерениях. Для выбора квазиоптимального значения [33] параметра регуляризации построены дифференциальные соотношения, реализуемые рекуррентным способом. На основе теории оснащенных гильбертовых пространств [25,4,7] получены оценки точности регуляризованных решений задачи в пространстве обобщенных функций.

Разработан метод приближенного решения задачи восстановления сигналов в системах, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными при наличии цветных шумов в наблюдениях. Метод основан на регуляризации А.Н.Тихонова и преобразовании задачи линейной фильтрации в системах с операторными коэффициентами к задаче линейной фильтрации в системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями; доказана сходимость соответствующего алгоритма.

Изложение материала основано на концепции обоснования фильтра, предложенной профессором В.П. Диденко [25], которая существенно использует технику оснащенных гильбертовых пространств.

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность профессору, доктору физико-математических наук В.А. Морозову за постоянное внимание к работе, подробное обсуждение результатов, полезные замечания и советы, а также доктору технических наук, профессору О.Б. Арушаняну и кандидату физико-математических наук С.Ф. Гилязову за ряд ценных рекомендаций по оформлению и содержанию работы.

1 Постановка задачи линейной оптимальной фильтрации

1.1 Основные обозначения и понятия

Пусть E_n — n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(.,.)_n$, $L_2[a,b]$ — гильбертово пространство вектор-функций, определенных на сегменте $[a,b]$ и интегрируемых с квадратом по Лебегу, с нормой $\|\ldots\|_0$ и скалярным произведением $(.,.)_0$. Индекс ^{m} будет означать операцию транспонирования. Введем обозначения: $W_2^1[a,b]$ — позитивное гильбертово пространство, полученное пополнением непрерывно-дифференцируемых вектор-функций $u(t), a \leq t \leq b$ по скалярному произведению

$$(u,v)_1 = \int\limits_a^b \left(\frac{du^m(t)}{dt}\frac{dv(t)}{dt} + u^m(t)v(t) \right) dt,$$

$\|u\|_1 = \sqrt{(u,u)_1}$ — норма в $W_2^1[a,b]$, $W_2^{-1}[a,b]$ — негативное пространство, полученное пополнением множества $L_2[a,b]$ по негативной норме

$$\|u\|_{-1} = \sup_v \left\{ \int\limits_a^b u^m(t)v(t)\,dt \mid v(t) \in W_2^1[a,b], \|v\|_1 = 1,\, u(t) \in L_2[a,b] \right\}.$$

Верхний индекс в обозначении позитивного пространства указывает на существование для функции из этого множества интегрируемой с квадратом обобщенной производной (в смысле Соболева [3,4,7], см.стр. 8). Верхний индекс в обозначении негативного пространства, означает, что это пространство построено с помощью множества $W_2^1[a,b]$.

Тройку пространств $W_2^1[a,b]$, $L_2[a,b]$ и $W_2^{-1}[a,b]$ называют оснащенным гильбертовым пространством [7].

Для любых двух элементов $u \in W_2^{-1}[a,b]$ и $v \in W_2^1[a,b]$ определим билинейную форму

$$\langle u,v \rangle = \lim_{k\to\infty} \int\limits_a^b u_k^m(t)v(t)\,dt,$$

где $\{u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность функций из $L_2[a,b]$ такая, что норма $\|u-u_k\|_{-1} \to 0$ при $k\to\infty$. Очевидно, что билинейная форма совпадает со скалярным произведением в $L_2[a,b]$, если $u \in L_2[a,b]$.

Существует изометрический оператор I, переводящий $W_2^{-1}[a,b]$ на $W_2^1[a,b]$ и ему обратный I^{-1}, который переводит пространство $W_2^1[a,b]$ на пространство $W_2^{-1}[a,b]$. Причем для $\forall \alpha,\beta \in W_2^{-1}[a,b]$ и $\forall u,v \in W_2^1[a,b]$ справедливы соотношения

$$\langle \alpha, I\beta \rangle = \langle I\alpha, \beta \rangle = (I\alpha, I\beta)_1 = (\alpha,\beta)_{-1};$$

это выражение определяет скалярное произведение в $W_2^{-1}[a,b]$, кроме того

$$(u,v)_1 = \langle u, I^{-1}v \rangle = \langle I^{-1}u, v \rangle = (I^{-1}u, I^{-1}v)_{-1},\ \langle \alpha, u \rangle = (I\alpha, u)_1 = (\alpha, I^{-1}u)_{-1}.$$

Оператор I^{-1} на дважды непрерывно дифференцируемых функциях из пространства $W_2^1[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t=a} = \left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t=b} = 0 \qquad (1.1.1)$$

совпадает с дифференциальным выражением $-\dfrac{d^2u(t)}{dt^2}+u(t)$, а оператор I является расширением интегрального оператора с ядром – матрицей Грина $G(t,s)$ для указанного выше дифференциального выражения с граничными условиями (1.1.1).

Согласно теореме вложения С.Л. Соболева [25, 4, 7], в негативное пространство входят обобщенные функции типа δ–функций Дирака (δ–функцией Дирака называется функционал $\delta(t)$, определенный над пространством непрерывных функций $C[a,b]$ выражением

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\delta(t-\sigma),\varphi_\varepsilon\rangle=\begin{cases} 0 & \sigma>b,\sigma<a;\\ 1/2\ \varphi(a), & \sigma=a;\\ 1/2\ \varphi(b), & \sigma=b;\\ \varphi(t), & a<\sigma<b.\end{cases}$$

$$\varphi_\varepsilon(t)\in W_2^1[a,b] \text{ и } \lim_{\varepsilon\to 0}\|\varphi-\varphi_\varepsilon\|_{C[a,b]}=0.\ [6])$$

Для билинейной формы справедливо неравенство Коши-Буняковского (Шварца)

$$|\langle u,v\rangle|\le\|u\|_{-1}\|v\|_1,\ \forall u\in W_2^{-1}[a,b],\ \forall v\in W_2^1[a,b].$$

Под производной от непрерывной функции $y(t), a\le t\le b$, будем понимать такой элемент $\varphi\in W_2^{-1}[a,b]$, для которого справедливо равенство

$$\langle y,\frac{dv}{dt}\rangle=y(b)v(b)-y(a)v(a)-\langle\varphi,v\rangle \text{ для } \forall v\in W_2^1[a,b].$$

Если это соотношение рассматривать на множестве финитных бесконечно дифференцируемых на $[a,b]$ функциях $v(t)$, то φ совпадает с обобщенной производной по Шварцу [3,25].

Через $C[a,b]$ будем обозначать пространство непрерывных на $[a,b]$ вектор-функций $u(t)$ с нормой $\|u\|_C=\max\limits_t\{|u(t)|,\ t\in[a,b]\}$, $|u|^2=\sum\limits_{k=1}^n u_k^2$, $u_k(t)$ — координаты вектора $u(t)$, $C^l[a,b]$ — пространство вектор-функций, имеющих l непрерывных производных на $[a,b]$. Норма в $C^l[a,b]$ имеет вид

$$\|u\|_{C^l}=\max_{t,k}\left\{\left|\frac{d^ku(t)}{dt^k}\right|,\ t\in[a,b],\ 0\le k\le l\right\}.$$

Вместо указанной выше нормы в $C^l[a,b]$ можно ввести эквивалентную норму по формуле

$$\|u\|_{C^l}=\sum_{k=1}^l\max_t\{\left|\frac{d^ku(t)}{dt^k}\right|,\ t\in[a,b]\}.$$

Пусть $C_0^1[0,t]$ и $C_t^1[0,t]$ — множества один раз непрерывно-дифференцируемых на сегменте $[0,t]$ вектор-функций $x(\tau)$, $\tau\in[0,t]$, для которых выполняются условия $x(0)=\left.\dfrac{dx(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}=0$ (соответственно $x(t)=\left.\dfrac{dx(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=t}=0$), гильбертовы пространства $W_{20}^1[0,t]$ и $W_{2t}^1[0,t]$ — пополнения множеств $C_0^1[0,t]$ и $C_t^1[0,t]$ по нормам

$$\|x\|_{10}=\left(\int_0^t\left|\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right|^2\,d\tau\right)^{1/2},\|x\|_{1t}=\left(\int_0^t\left|\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right|^2\,d\tau\right)^{1/2},$$

$\|\ldots\|_{10}$ и $\|\ldots\|_{1t}$ — нормы в этих пространствах, $W_{20}^{-1}[0,t]$ и $W_{2t}^{-1}[0,t]$ — пополнения множества $L_2[0,t]$ по негативным нормам

$$\|y\|_{-10}=\sup_v\{\left|\int_0^t y^m(\tau)v(\tau)\,d\tau\right|,\ v\in W_{20}^1[0,t],\ \|v\|_{10}=1\},$$

$$\|y\|_{-1t}=\sup_v\{\left|\int\limits_0^t y^m(\tau)v(\tau)\,d\tau\right|,\ v\in W^1_{2t}[0,t],\ \|v\|_{1t}=1\}.$$

Через $\langle .,.\rangle_0$ и $\langle .,.\rangle_t$ обозначим билинейные формы соответственно в пространствах $W^1_{20}[0,t]$, $W^{-1}_{20}[0,t]$ и $W^1_{2t}[0,t]$, $W^{-1}_{2t}[0,t]$. Для этих пар пространств существуют изометрические операторы I_0 и I_t, отображающие $W^{-1}_{20}[0,t]$ на $W^1_{20}[0,t]$, соответственно $W^{-1}_{2t}[0,t]$ на $W^1_{2t}[0,t]$. Операторы I, I_0 и I_t можно представить в виде $I=jj^*$, $I_0=j_0j_0^*$, $I_t=j_tj_t^*$. Изометрические операторы j, j_0, j_t отображают $L_2[0,t]$ на $W^1_2[0,t]$, $W^1_{20}[0,t]$, $W^1_{2t}[0,t]$ соответственно, а операторы j^*, j_0^*, j_t^* отображают $W^{-1}_2[0,t]$, $W^{-1}_{20}[0,t]$, $W^{-1}_{2t}[0,t]$ на $L_2[0,t]$. Для операторов j, j_0, j_t, j^*, j_0^*, j_t^* существуют обратные операторы: $D=j^{-1}$, $D_0=j_0^{-1}$, $D_t=j_t^{-1}$, $D^*=(j^*)^{-1}$, $D_0^*=(j_0^*)^{-1}$, $D_t^*=(j_t^*)^{-1}$. Как действуют все эти операторы показано на рис. 1.1.

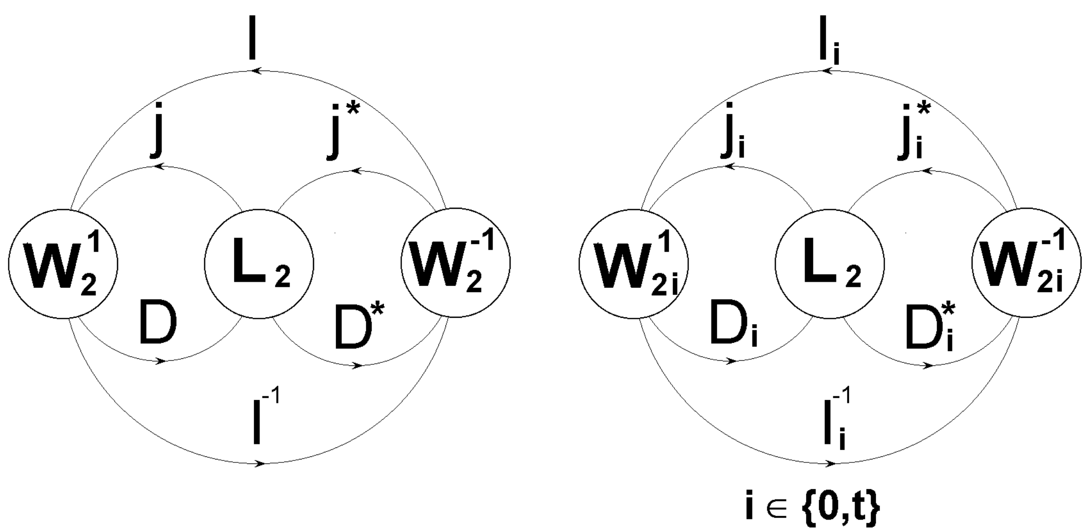

Рис.1.1. Диаграмма действий изометрических операторов

Справедливы включения $W^{-1}_2[0,t]\subset W^{-1}_{20}[0,t]$ и $W^{-1}_2[0,t]\subset W^{-1}_{2t}[0,t]$.

Иногда, для функции двух переменных $w(\tau,s)$ при вычислении нормы, скалярного произведения, билинейной формы по одному из аргументов, чтобы подчеркнуть, что вычисленные значения являются функциями второй переменной, будем писать $\|w(\tau)\|_i$, $(w(\tau),.)_i$, $<w(\tau),.>_i$, где i — некоторый индекс, указывающий на принадлежность нормы, скалярного произведения или билинейной формы соответствующему пространству.

Подробнее со свойствами позитивных и негативных пространств можно ознакомиться в монографиях [25, 3, 7].

Пусть $F(t)$ — квадратная матрица порядка n с элементами из $L_2[0,t]$. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l(x)\equiv\frac{dx(\tau)}{d\tau}-F(\tau)x(\tau), \tag{1.1.2}$$

где $x(\tau)\in C^1_0[0,t]$. Тогда справедливо неравенство

$$c_1\|l(x)\|_{-1t}\le\|x\|_0\le c_2\|l(x)\|_{-1t},\ c_1>0,\ c_2>0,\ c_1,c_2 - \text{константы}. \tag{1.1.3}$$

Для сопряженного дифференциального выражения

$$l^*(x)\equiv-\frac{dx^m(\tau)}{d\tau}-x^m(\tau)F^m(\tau),\quad x(\tau)\in C^1_t[0,t] \tag{1.1.4}$$

имеет место соотношение

$$c'_1\|l^*(x)\|_{-10}\le\|x\|_0\le c'_2\|l^*(x)\|_{-10}, \tag{1.1.5}$$

c'_1, c'_2 — положительные константы [25].

В силу плотности множества $C_0^1[0,t]$ в $L_2[0,t]$ для любого $x \in L_2[0,t]$ существует $\{x_i(\tau)\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность вектор-функций из $C_0^1[0,t]$, фундаментальная по норме $\|.\|_0$ и сходящаяся к x_0. Но тогда из левой части неравенства (1.1.3) следует, что

$$\|l_n(x) - l_m(x)\|_{-1t} \leq c\|x_n - x_m\|_0 \to 0 \text{ при } n, m \to \infty,$$

т.е. последовательность $l_n(x)_{n=1}^{\infty}$ сходится в себе, а так как $W_{2t}^{-1}[0,t]$– полное пространство, то и к некоторому пределу $\mathcal{L}(x)$. Оператор $\mathcal{L}(x)$ определен на элементах $L_2[0,t]$ однозначно и $\|\mathcal{L}\| = \|l\|$. Оператор $\mathcal{L}$ называется расширением (продолжением) оператора l по непрерывности.

Лемма 1.1 *Пусть линейный оператор $\mathcal{L}$ является расширением оператора l, определенного выражением (1.1.2) на $C_0^1[0,t]$ с помощью неравенства (1.1.3). Тогда оператор $\mathcal{L}$ гомеоморфно отображает все $L_2[0,t]$ на $W_{2t}^{-1}[0,t]$.*

Пусть линейный оператор $\mathcal{L}^*$ является расширением оператора l^* , определенного выражением (1.1.4) на $C_t^1[0,t]$ с помощью неравенства (1.1.5). Тогда оператор $\mathcal{L}^*$ гомеоморфно отображает все $L_2[0,t]$ на $W_{20}^{-1}[0,t]$ [25].

Определение 1.1 *Решением задачи Коши*

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x(\tau) + v(\tau),\ x(0) = 0,\ v(\tau) \in W_{2t}^{-1}[0,t] \tag{1.1.6}$$

будем называть вектор-функцию $x(\tau) \in L_2[0,t]$, для которой существует последовательность $\{x(\tau)\}_{n=1}^{\infty}$ из $C_0^1[0,t]$, такая, что справедливы соотношения

$$\|x_n - x\|_0 \to 0,\ \|\mathcal{L}x_n - v\|_{-1t} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следует отметить, что если элементы матрицы $F(\tau)$ и все координаты вектора $v(\tau)$ принадлежат $C[0,t]$, то формулировка задачи Коши в классическом смысле и смысле определения 1.1 совпадают.

Если в формулировке задачи Коши начальные условия не нулевые, то есть $x(0) = x_0$, то с помощью замены $\hat{x}(\tau) = x(\tau) + x_0$ задача сводится к (1.1.6).

Известно, что если все элементы матрицы $F(\tau)$ и вектор $v(\tau)$ принадлежат пространству $C[t_0,t]$, то решение задачи Коши представляется формулой Коши

$$x(\tau) = \Phi(\tau,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} \Phi(\tau,s)v(s)ds, \tag{1.1.7}$$

где $\Phi(\tau,s)$ — фундаментальная матрица системы, которая удовлетворяет уравнение

$$\frac{d\Phi(\tau,s)}{d\tau} = F(\tau)\Phi(\tau,s),\ \Phi(s,s) = I_n$$

и обладает следующими свойствами:

$$\Phi(\tau,s)\Phi(s,\sigma) = \Phi(\tau,\sigma),\ \Phi^{-1}(\tau,\sigma) = \Phi(\sigma,\tau).$$

Если элементы матрицы $F(\tau)$ принадлежат пространству $L_2[t_0,t]$ и вектор $v(\tau)$ из $W_2^{-1}[t_0,t]$, то справедлива обобщенная формула Коши [25]

$$x(\tau) = \Phi(\tau,t_0)x(t_0) + \begin{bmatrix} \langle\Phi_1^m(\tau),v\rangle_\tau \\ \langle\Phi_2^m(\tau),v\rangle_\tau \\ \dots \\ \langle\Phi_j^m(\tau),v\rangle_\tau \\ \dots \\ \langle\Phi_n^m(\tau),v\rangle_\tau \end{bmatrix},\ \tau \in [t_0,t], \tag{1.1.8}$$

где $\Phi_j(\tau) = \Phi_j(\tau,s)$ строки матрицы $\Phi(\tau,s)$, а $\langle\Phi_j^m(\tau),v\rangle_\tau$ — билинейная форма в оснащенном пространстве $\{W_2^1[t_0,\tau], L_2[t_0,\tau], W_2^{-1}[t_0,\tau]\}$, которая для любой последовательности $\{v_k(s)\}_{k=1}^{\infty}$ из $L_2[t_0,\tau]$ и такой, что $\|v - v_k\|_{W_2^{-1}[t_0,\tau]} \to 0$ определяется соотношением:

$$\langle\Phi_j^m(\tau),v\rangle_\tau = \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{\tau} \Phi_j(\tau,s)v_k(s)\,ds.$$

Определение 1.2 *Для матрицы $K(\tau,\sigma)$ $(\tau,\sigma\in[t_0,t])$ порядка $n\times n$ с элементами $K_{ij}(\tau,\sigma)\in W_2^1[t_0,t]$, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,n$ по обоим аргументам и матрицы $h(\sigma)$ размерности $n\times m$ с элементами $h_{jk}(\sigma)\in W_2^{-1}[t_0,t]$, $j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,m$ выражение $\int\limits_{t_0}^{t}K(\tau,\sigma)h(\sigma)\,d\sigma$ будем понимать следующим образом:*

$$\int\limits_{t_0}^{t}K(\tau,\sigma)h(\sigma)\,d\sigma=\begin{bmatrix}\langle K_1^m(\tau),h_1\rangle & \dots & \langle K_1^m(\tau),h_k\rangle & \dots & \langle K_1^m(\tau),h_m\rangle\\ \langle K_2^m(\tau),h_1\rangle & \dots & \langle K_2^m(\tau),h_k\rangle & \dots & \langle K_2^m(\tau),h_m\rangle\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \langle K_i^m(\tau),h_1\rangle & \dots & \langle K_i^m(\tau),h_k\rangle & \dots & \langle K_i^m(\tau),h_m\rangle\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \langle K_n^m(\tau),h_1\rangle & \dots & \langle K_n^m(\tau),h_k\rangle & \dots & \langle K_n^m(\tau),h_m\rangle\end{bmatrix},$$

где $K_i(\tau,\sigma)$ — строки матрицы $K(\tau,\sigma)$, $h_k(\sigma)$ — столбцы матрицы $h(\sigma)$, а $\langle K_i^m(\tau),h_k\rangle$ — билинейная форма определенная в оснащенном пространстве $\{W_2^1[t_0,t],L_2[t_0,t],W_2^{-1}[t_0,t]\}$.

Рассмотрим некоторые вероятностные понятия, используемые в дальнейшем (подробней с затрагиваемыми здесь вопросами можно ознакомиться в [8,27,3]).

Обозначим через $(\Omega,\mathcal{F},P)$ вероятностное пространство, на котором определены все встречающиеся в дальнейшем случайные величины и функции, а M — оператор математического ожидания.

Пусть $x(\tau)\equiv x(\tau,\omega)$ –векторный случайный процесс $(\tau\in[0,t],\omega\in\Omega)$, выборочные функции которого с вероятностью 1 (почти наверное) принадлежат пространству $W_{2t}^{-1}[0,t]$. Математическое ожидание $M[x(\tau)]$ вычисляется по формуле $M[x(\tau)]=D_t^*M[j_t^*x(\tau)]$, а ковариационная матрица для $\tau,\sigma\in[0,t]$ равна $M[x(\tau)x^m(\sigma)]=D_t^*D_t^*M[(j_t^*x(\tau))(j_t^*x(\sigma))^m]$, где оператор D_t^* изоморфно отображает $L_2[0,t]$ на $W_{2t}^{-1}[0,t]$, а j_t^* обратный ему оператор.

Определение 1.3 ([27]) *Случайный процесс $v(\tau,\omega)$ с нулевым средним и ковариационной функцией, содержащей множителем δ –функцию Дирака,*

$$M[v(\tau)]=0,\ M[v(\tau)v^m(\sigma)]=V(\tau)\delta(\tau-\sigma),\ V(\tau)=V^m(\tau),\ V(\tau)z\in C[a,b]$$

для $\forall z\in E_n$ называется белым шумом.

Множитель $V(\tau)$ при δ–функции называется матрицей интенсивности белого шума $v(\tau,\omega)$. Интенсивность белого шума представляет собой неотрицательно определенную симметрическую матрицу. Неотрицательная определенность означает, что для $\forall z\in E_n$, и $\forall\ t\ \in\ [a,b]$ скалярное произведение $(z,V(\tau))_n\geq 0$. Кроме того, так как $\delta(\tau-\sigma)=0$ при $\tau\neq\sigma$, то вместо $V(\tau)$ можно брать $V(\sigma)$ или $\sqrt{V(\tau)V(\sigma)}$.

Дисперсия $M[v(\tau)v^m(\tau)]$ белого шума бесконечна, а его значения в двух сколь угодно близких точках некоррелированы. Белый шум не существует физически, так как для его реализации необходима бесконечная мощность. Понятие белого шума является математической абстракцией, удобной для построения теории. Практически можно говорить лишь о большей или меньшей степени приближения реального процесса к белому шуму. Реальный случайный процесс можно пытаться заменить белым шумом только тогда, когда интервал между значениями аргумента, при котором значения случайного процесса практически некоррелированы, очень мал. Понятие "очень мал" математически строго не определено, и правильность замены реального случайного процесса белым шумом должна в каждом случае обосновываться либо теоретически, либо практически.

Определение 1.4 ([27]) *Случайный процесс $v(\tau,\omega)$ называется белым шумом в строгом смысле, если он получен дифференцированием случайного процесса с независимыми приращениями.*

Дифференцирование понимается в обобщенном смысле и белый шум является обобщенным случайным процессом. Реализации белого шума с вероятностью 1 принадлежат негативному пространству $W_2^{-1}[0,t]$.

Обозначим через $w(\tau,\omega)$, $\tau\in[0,t]$, $\omega\in\Omega$ векторный случайный процесс со следующими свойствами:

1) $w(\tau)$ — процесс со стационарными независимыми приращениями;

2) $w(0)=0$ почти наверное;

3) для любых τ и σ, принадлежащих $[0,t]$, $\Delta w = w(\tau) - w(\sigma)$ имеет гауссовское распределение, нулевое среднее и ковариационную матрицу $K_{\Delta w}(\tau,\sigma) = R|\tau-\sigma|$, R — неотрицательно-определенная матрица;

4) почти для всех $\omega \in \Omega$ выборочные функции $w(\tau)$ непрерывны, недифференцируемы по τ в обычном смысле и имеют на любом сколь угодно малом интервале бесконечную вариацию;

5) $M[w(\tau)] = 0$, $M[w(\tau)w^m(\sigma)] = R\min(\tau,\sigma)$.

Процесс $w(\tau,\omega)$, удовлетворяющий этим условиям, называется винеровским случайным процессом.

Дифференцируя в обобщенном смысле выборки $w(\tau,\omega)$, получаем случайный процесс $v(\tau,\omega) \equiv v(\tau)$, выборочные функции которого почти наверное принадлежат негативному пространству $W_2^{-1}[0,t]$. Действительно: для $\forall\varphi(\tau) \in C_t^1[0,t]$ имеем

$$\langle v,\varphi\rangle = -\langle w, \frac{d\varphi}{d\tau}\rangle = -\int_0^t w^m(\tau)\frac{\varphi(\tau)}{d\tau}\,d\tau.$$

То есть $v(\tau) = D_t^* w(\tau)$. Вычислим первый и второй моменты случайного процесса $v(\tau)$:

$$M[v(\tau)] = D_t^* M[j_t^* D_t^* w(\tau)] = D_t^* M[w(\tau)] = 0,\ M[v(\tau)v^m(\sigma)] = D_t^* D_t^* M[(j_t^* v(\tau))(j_t^* v(\sigma))^m] =$$

$$= D_t^* D_t^* M[(j_t^* D_t^* w(\tau))(j_t^* D_t^* w(\sigma))^m] = D_t^* D_t^* M[w(\tau)w^m(\sigma)] = D_t^* D_t^*(R\min(t,s)) = R\delta(\tau-\sigma),$$

так как $D_t^*(\min(\tau,\sigma)) = 1(t,s) = \begin{cases} 1, \tau < \sigma \\ 0, \tau > \sigma \end{cases}$, и $D_t^*(1(\tau,\sigma)) = \delta(\tau-\sigma)$, где $\delta(\tau-\sigma)$ –функция Дирака, $\delta(\tau-\sigma) \in W_2^{-1}[0,t]$. Таким образом, $v(\tau)$ — белый шум.

Определение 1.5 *Белый шум, представляющий собою производную от винеровского процесса, называется нормально распределенным или гауссовским белым шумом.*

В дальнейшем под *белым шумом* везде понимается *белый гауссовский шум* с **невырожденной** матрицей интенсивности.

Рассмотрим задачу Коши (1.1.6) в случае, когда $v(\tau)$ является реализацией векторного белого гауссовского шума,

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x(\tau) + v(\tau),\ x(0) = x_0,\ 0 \le \tau \le t, \tag{1.1.9}$$

где $x_0 = x_0(\omega)$ — случайная гауссовская величина с заданными двумя первыми моментами, производная в (1.1.9) понимается в обобщенном смысле.

Определение 1.6 *Векторный случайный процесс $x(\tau) \equiv x(\tau,\omega)$ будем называть решением задачи Коши (1.1.9), если его реализации удовлетворяют (1.1.9) почти наверное (в смысле определения 1.1).*

Процесс $x(\tau)$, удовлетворяющий (1.1.9), имеет почти наверное непрерывные выборки. Действительно, задачу (1.1.9) можно записать в виде

$$-D_t^* x(\tau) = F(\tau)x(\tau) - D_t^* w(\tau),\ \text{где } v(\tau) = -D_t^* w(\tau).$$

Подействуем на обе части этого равенства оператором j_t^*, тогда получим $-x(\tau) = j_t^*(F(\tau)x(\tau)) - w(\tau)$. Так как $j_t^* D_t^*$ — тождественный оператор, а оператор j_t^* на элементах из $L_2[0,t]$ имеет вид:

$$j_t^* u(\tau) = -\int_0^\tau u(s)\,ds,\ \text{то находим, что } x(\tau) = \int_0^\tau F(s)x(s)\,ds + w(\tau).$$

Согласно лемме 1.1, $x(\tau) \in L_2[0,t]$, а следовательно, $\int_0^\tau F(s)x(s)\,ds$ принадлежит $C[0,t]$ и $x(\tau)$ как сумма двух непрерывных функций также непрерывна на $[0,t]$ с вероятностью 1.

Введем некоторые понятия теории управления. Системой называют любую совокупность взаимодействующих предметов произвольной природы. Внешние воздействия на систему называют входными сигналами (возмущением, управлением, входной величиной). Влияние системы на окружающую среду или другие системы называют выходными сигналами (выходной величиной).

Следует отметить, что теория управления изучает не реальные системы, а их математические модели. Вышеприведенные определения системы, входных и выходных сигналов являются общими и для построения математических моделей систем управления требуют уточнения.

Пусть Π – некоторая система. В каждый момент времени τ система Π получает входное воздействие $u(\tau)$ из фиксированного множества U и порождает выходную величину $y(\tau)$, принадлежащую множеству Y. Отметим, что входное воздействие $u(\tau)$ не может быть произвольной функцией. Выбор множества U, при построении математической модели системы, может диктоваться различными соображениями, например – физическими, но чаще определяется математическими потребностями. Кроме того, знание входного сигнала $u(\tau)$, как правило, недостаточно для определения $y(\tau)$. Значение выходной величины зависит, в общем случае, как от входного воздействия, так и от предыстории изменения системы, т.е. от ее вектора состояния $x(\tau) \in X$, где X — пространство состояний системы.

Математически любую систему можно задать классом допустимых функций на входе U и соотношением вида $y(\tau) = \mathcal{H}(u(\tau))$, где $u(\tau)$ – функция на входе, $u(\tau) \in U$, $y(\tau)$ – значение функции на выходе системы в момент τ, $\mathcal{H}$ — оператор системы, действующий из области допустимых входных сигналов в область значений выходных сигналов системы $Y, y(\tau) \in Y$.

Математической моделью системы называют объединение четырех элементов:
1) пространства состояний X,
2) пространства входных сигналов U,
3) пространства выходных сигналов Y,
4) соотношений, связывающих входной и выходной сигналы и вектор состояния системы (оператора системы $\mathcal{H}$).
Оператор системы $\mathcal{H}$ обычно представляют в виде: $\mathcal{H} = \mathcal{C}(\Phi)$, где функция Φ действует из U в X, а $\mathcal{C}$ из X в Y ($\Phi : U \to X, \mathcal{C} : X \to Y$).

В 1963 году Р.Калман дал общее определение понятия динамической системы, которое сейчас общепринято.

Определение 1.7 *Систему Π будем называть динамической системой, если*
1. Заданы множества: упорядоченное множество T — множество времени, непустое множество входных воздействий U, множество состояний X и множество выходных величин Y.
2. Существует переходная функция состояний Φ, удовлетворяющая двум свойствам:
а) Φ определена для всех $\tau \geq t_0 (\tau \in T, t_0 \in T)$ на множестве $T \times T \times X \times U$ и действует в X

$$x(t) = \Phi(t; u(\tau),\ x(t_0), t_0 \leq \tau \leq t,\ t \in T),$$

для $\tau \leq t_0 (\tau \in T,\ t_0 \in T)$ Φ может быть неопределенна (знак $\times$ – обозначает декартово произведение пространств);
б) для любых $t > t_0$, $t \in T$, $t_0 \in T$ можно по значениям $u(\tau)$ ($\tau \in T$ и принимает все значения от t_0 до t) и $x(t_0)$ однозначно определить состояние $x(t)$ (условие "причинности").
3) Задано выходное отображение $\mathcal{C} : T \times X \to Y$, определяющее выходные величины $y(\tau) = \mathcal{C}(\tau, x(\tau))$.

Условие "причинности" означает, что прошлое влияет на будущее, а не наоборот. Это условие называют также условием физической реализуемости системы.

Системы, в зависимости от свойств множества T, делят на два класса.

Определение 1.8 *Динамическая система Π называется системой с непрерывным временем (непрерывной) тогда и только тогда, когда множество времени T совпадает с множеством действительных чисел, и называется системой с дискретным временем (дискретной) тогда и только тогда, когда T — множество целых чисел.*

Во многих приложениях теории управления различие между непрерывными и дискретными системами не существенно и выбор между ними определяется математическими соображениями.

Определение 1.9 *Динамическая система Π называется линейной тогда и только тогда, когда*
а) множества X, U и Y суть векторные пространства;
б) отображение $\Phi : T \times T \times X \times U \to X$ линейно при всех t и τ ;
в) отображение $\mathcal{C} : X \to Y$ является линейным при любых t.

Напомним, что отображение $\mathcal{H}$ называется линейным, если оно удовлетворяет принципу суперпозиции

$$\mathcal{H}(\alpha u_1(\tau) + \beta u_2(\tau)) = \alpha\mathcal{H}(u_1(\tau)) + \beta\mathcal{H}(u_2(\tau)),$$

α, β - произвольные числа, а $u_1(\tau), u_2(\tau) \in U$.

Далее мы будем рассматривать только линейные непрерывные динамические системы. Мы будем также говорить, что входное воздействие (управление) $u(\tau)$ переводит (изменяет, преобразует) состояние $x(t_0)$ в состояние $x(\tau)$, или генерирует (моделирует, порождает) процесс $x(\tau)$ с помощью преобразования $\mathcal{H}$.

Простейшим примером линейной системы может служить преобразование вида

$$y(\tau) = \int\limits_a^b h(\tau, s)u(s)\,ds, \tag{1.1.10}$$

для которого класс допустимых функций U зависит от свойств матрицы $h(\tau, s)$ размеренности $m \times n$. Так, например, если $\forall z \in E_n$, $h(\tau, s)z \in L_2[a, b]$ по обоим аргументам, то множество допустимых управлений U должно принадлежать пространству $L_2[a, b]$, иначе интеграл Лебега в (1.1.10) теряет смысл.

Представление (1.1.10) широко используется в теории управления линейными системами. Следует отметить, что не всегда удается ограничить множество U лишь функциями из $L_2[a, b]$. Так, одним из стандартных приемов исследования систем управления является изучение их реакции на входной сигнал в виде δ–функции Дирака, которая является обобщенной функцией ($\delta \in W_2^{-1}[a, b]$). В этом случае, чтобы избежать дополнительной трактовки выражения в (1.1.10), переходят к рассмотрению системы в терминах переходных или спектральных функций (т.е. привлекается теория преобразований Лапласа или Фурье). Но это приемлемо лишь для стационарных динамических систем.

Определение 1.10 *Динамическая система* Π *называется стационарной тогда и только тогда, когда*
а) T *есть аддитивная группа (относительно обычной операции сложения действительных чисел);*
б) U *замкнуто относительно оператора сдвига* Z^s, *определяемого соотношением* $u(\tau) = u(\tau + s)$ *при всех* $\tau, s \in T$;
в) $\Phi(t; \tau, x, u) = \Phi(t + s; \tau + s, x, Z^s u)$ *при всех* $s \in T$;
г) отображение $\mathcal{C}$ *не зависит от* t.

В дальнейшем будут рассматриваться, в основном, нестационарные системы. Поэтому покажем, как следует понимать выражение (1.1.10), если управление является элементом негативного пространства $W_2^{-1}[a, b]$.

Обозначим через $h_k(\tau, s), k = 1, 2, ..., m$ строки матрицы $h(\tau, s)$ и потребуем, чтобы $h_k^m(\tau, s) \in W_2^1[a, b]$ по обоим аргументам. Множество $L_2[a, b]$ плотно в $W_2^{-1}[a, b]$. Множество непрерывно дифференцируемых функций $C^1[a, b]$ плотно в $L_2[a, b]$, а следовательно и в $W_2^{-1}[a, b]$ Таким образом, для любого вектора $u(\tau) \in W_2^{-1}[a, b]$ существует последовательность вектор-функций $u_i(\tau)_{i=1}^{\infty}$ из $C^1[a, b]$, сходящаяся по норме негативного пространства к $u(\tau)$, т.е. $||u - u_i||_{-1} \to 0$, при $i \to \infty$.

Рассмотрим последовательность

$$y_i(\tau) = \int\limits_a^b h(\tau, s)u_i(s)\,ds.$$

С учетом введенных обозначений ее можно записать в виде

$$y_i(\tau) = \begin{bmatrix} \int_a^b h_1(\tau, s)u_i(s)\,ds \\ \int_a^b h_2(\tau, s)u_i(s)\,ds \\ \dots \\ \int_a^b h_m(\tau, s)u_i(s)\,ds \end{bmatrix}.$$

Перейдем к пределу по $i \to \infty$ и, используя определение билинейной формы (см. стр. 7), находим

$$\lim_{1\to\infty} y_i(\tau) = \begin{bmatrix} \lim\limits_{1\to\infty} \int\limits_a^b h_1(\tau,s)u_i(s)\,ds \\ \lim\limits_{1\to\infty} \int\limits_a^b h_2(\tau,s)u_i(s)\,ds \\ \dots \\ \lim\limits_{1\to\infty} \int\limits_a^b h_m(\tau,s)u_i(s)\,ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle h_1^m(\tau), u\rangle \\ \langle h_2^m(\tau), u\rangle \\ \dots \\ \langle h_m^m(\tau), u\rangle \end{bmatrix} = y(\tau). \tag{1.1.11}$$

Покажем, что этот предел существует и ограничен для любого фиксированного $\tau \in [a,b]$. Пусть $y^k(\tau)$ и $y_i^k(\tau)$ координаты векторов $y(\tau)$ и $y_i(\tau)$ соответственно. Тогда, используя неравенство Коши-Буняковского для $k = 1, 2, \dots, m$, имеем

$$|y^k(\tau) - y_i^k(\tau)| = |\langle h_k^m(\tau), u_i\rangle| \le \|h_k^m(\tau)\|_1 \|u - u_i\|_{-1} \to 0, \text{ при } i \to \infty.$$

Из этого соотношения, справедливого для любого фиксированного значения $\tau \in [a,b]$ следует существование и ограниченность предела в (1.1.11).

Таким образом, если $u \in W_2^{-1}[a,b]$, то элементы матрицы $h(\tau,s)$ должны по обоим аргументам принадлежать пространству $W_2^1[a,b]$ и интеграл в (1.1.10) будем понимать как предел в (1.1.11).

Покажем, что вектор $y(\tau)$ принадлежат пространству интегрируемых с квдратом по Лебегу функций на отрезке $[a,b]$. По определению нормы в $L_2[a,b]$ и (1.1.11), имеем:

$$\|y\|_0 = \left(\int\limits_a^b \sum_{k=1}^m |y^k(\tau)|^2\,d\tau\right)^{1/2} = \left(\int\limits_a^b \sum_{k=1}^m |< h_k^m(\tau), u >|^2\,d\tau\right)^{1/2}.$$

Применим к полученному выражению неравенство Шварца. Тогда

$$\|y\|_0 = \left(\int\limits_a^b \sum_{k=1}^m |< h_k^m(\tau), u >|^2\,d\tau\right)^{1/2} \le \left(\int\limits_a^b \sum_{k=1}^m \|h_k^m(\tau)\|_1^2 \|u\|_{-1}^2\,d\tau\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int\limits_a^b \sum_{k=1}^m \|h_k^m(\tau)\|_1^2\,d\tau\right)^{1/2} \|u\|_{-1} < \infty,$$

так как $h_k^m(\tau,s)$ принадлежит $W_2^1[a,b]$ по s и τ, $u \in W_2^{-1}[a,b]$. Следовательно, $y(\tau) \in L_2[a,b]$.

Пусть элементы матрицы $h(\tau,s)$ по переменным τ и s принадлежат множеству $C^1[a,b]$. Тогда, если на вход системы поступает сигнал $u(s) = z\delta(\sigma - s)$, где z — некоторый вектор из E_n, $\sigma \in [a,b]$, а $\delta(\sigma - s)$ - δ -функция Дирака, то согласно свойствам δ -функции (см.стр. 8)

$$\int\limits_a^b h(\tau,s)z\delta(\sigma - s)\,ds = \begin{cases} 0, & \sigma < a, \sigma > b \\ \frac{1}{2}h(\tau,\sigma)z, & \sigma = a, \sigma = b \\ h(\tau,\sigma)z, & a < \sigma < b, \end{cases}$$

и $y(\tau) = h(\tau,\sigma)z$, при $a < \sigma < b$. Таким образом, функцию $h(\tau,\sigma)z$ следует интерпретировать как реакцию системы на δ -функцию в момент времени σ.

Матрицу $h(\tau,\sigma)$ называют импульсной переходной матрицей системы.

В формулах (1.1.10) и (1.1.11) реакция системы в момент τ зависит от значений функции на входе как в момент $\tau > s$, так и в моменты времени $\tau < s$. В теории управления исследуются системы, состояние которых зависит от поступивших и поступающих на вход сигналов, а не от будущих. Поэтому считают, что $h(\tau,s) = 0$ при $\tau < s$. Это условие называют условием физической осуществимости (реализуемости) системы.

Определение 1.11 *Для процесса $u(\tau)$ преобразование $\mathcal{H}$ называется допустимым фильтром (или, проще, фильтром), если оно задано формулой (1.1.10), где элементы матрицы $h(\tau,s)$ таковы, что (1.1.10) имеет смысл (интеграл понимается как в (1.1.11)).*

Определение 1.12 *Для процесса* $x(\tau)$ *дифференциальная система*

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x(\tau) + G(\tau)v(\tau),$$

где $v(\tau)$ *— входной сигнал, а* $F(\tau)$ *и* $G(\tau)$ *— известные матрицы, называется формирующим фильтром, если процесс* $x(\tau)$ *является выходом этой системы при поступлении на ее вход белого шума.*

Далее для математического описания линейной непрерывной динамической системы мы будем использовать следующее представление:

Определение 1.13 *Линейной непрерывной динамической системой будем называть систему, у которой: вектор состояния системы моделируется обобщенным дифференциальным уравнением*

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x(\tau) + G(\tau)u(\tau),\ x(t_0) = x_0, \tag{1.1.12}$$

а выходной сигнал

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau), \tag{1.1.13}$$

где $F(\tau)$, $G(\tau)$, *и* $C(\tau)$ *— известные матрицы,* $u(\tau)$ *— входной сигнал,* x_0 *— вектор начального состояния системы, производная понимается в обобщенном смысле. Матрицу* $C(\tau)$ *принято называть матрицей измерений или наблюдений. Элементы матрицы* $F(\tau)$ *принадлежат пространству* $L_2[t_0, t]$, *а матриц* $G(\tau)$ *и* $C(\tau)$ *– пространству* $W_2^1[t_0, t]$.

Важное значение в теории управления имеют понятия наблюдаемости и управляемости динамических систем.

Вначале обсудим проблему наблюдаемости. Для этого рассмотрим однородную систему n-го порядка:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x(\tau),\ x(t_0) =? \tag{1.1.14}$$

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau). \tag{1.1.15}$$

Матрицы $F(\tau)$, $C(\tau)$ и m-мерный выходной сигнал $y(\tau)$ — известны на интервале $[t_0, t]$.

Определение 1.14 *Некоторое состояние* $x(t)$ *системы управления (1.1.14)-(1.1.15) называется наблюдаемым на интервале* $[t_0, t]$, *если его можно однозначно определить по результатам измерений* $y(\tau)$ *на интервале* $[t_0, t]$.

Определение 1.15 *Если для каждого состояния* $x(t)$ *система управления (1.1.14)-(1.1.15) наблюдаема на интервале* $[t_0, t]$, *то она называется вполне наблюдаемой на интервале* $[t_0, t]$.

Определение 1.16 *Если для каждого* t *существует* t_0 *такое, что состояние* $x(t)$ *системы (1.1.14)-(1.1.15) вполне наблюдаемо на интервале* $[t_0, t]$, *то такая система называется вполне наблюдаемой всюду.*

Решение уравнения (1.1.14), как известно из теории дифференциальных уравнений, для любого $\tau \in [t_0, t]$ можно представить в виде

$$x(t) = \Phi(t, \tau)x(\tau), \tag{1.1.16}$$

где $\Phi(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений системы (1.1.14). Матрица $\Phi(t, \tau)$ удовлетворяет системе

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = F(t)\Phi(t, \tau),\ \Phi(\tau, \tau) = I_n, \tag{1.1.17}$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Матрица $\Phi(t, \tau)$ невырожденная и $\Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi^m(\tau, t)$.

Найдем из (1.1.16) $x(\tau)$ и подставим в (1.1.15). Тогда

$$y(\tau) = C(\tau)\Phi^m(\tau, t)x(t). \tag{1.1.18}$$

Умножим это выражение на $\Phi^m(\tau,t)C^m(\tau)$ и далее, интегрируя по τ находим:

$$\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^m(\tau,t)C^m(\tau)y(\tau)\,d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^m(\tau,t)C^m(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t)\,d\tau\; x(t).$$

Введем обозначение

$$M(t,t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^m(\tau,t)C^m(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t)\,d\tau. \tag{1.1.19}$$

Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^m(\tau,t)C^m(\tau)y(\tau)\,d\tau = M(t,t_0)x(t). \tag{1.1.20}$$

Для определения $x(t)$ уравнение (1.1.20) должно быть разрешимо. Единственное решение этого уравнения существует тогда и только тогда, когда матрица $M(t,t_0)$ невырождена.

Матрица $M(t,t_0)$, определенная выражением (1.1.19), называется матрицей наблюдаемости. Это симметрическая квадратная матрица порядка n.

Теорема 1.1 *Для полной наблюдаемости системы (1.1.14)-(1.1.15) на интервале* $[t,t_0]$ *необходимо и достаточно, чтобы матрица наблюдаемости* $M(t,t_0)$, *определяемая соотношением (1.1.19), была невырожденной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность следует из условия единственности решения (1.1.20). Необходимость. Умножим слева (1.1.20) на вектор $x^m(t)$ и используя (1.1.18) получим

$$\int\limits_{t_0}^{t} y^m(\tau)y(\tau)\,d\tau = x^m(t)M(t,t_0)x(t). \tag{1.1.21}$$

Из этого равенства следует, что матрица $M(t,t_0)$ неотрицательно определена. Пусть $M(t,t_0)$ вырождается. Тогда найдется хотя бы один вектор $x(t)\neq 0$ такой, что $M(t,t_0)x(t)=0$. Для такого вектора обращается в ноль правая часть (1.1.21) и, следовательно – левая. Таким образом, вектор $y(\tau)\equiv 0$ на всем интервале $[t_0,t]$ в силу своей непрерывности. Но такой же выходной сигнал будет и при $x(t)\equiv 0$. То есть при наблюдениях $y(\tau), \tau\in[t_0,t]$ существуют два неразличимых состояния системы, а это противоречит определению 1.15 (вполне наблюдаемости). Теорема доказана.

Для исследования понятия управляемости системы рассмотрим неоднородную систему n — порядка без уравнения на выходе:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x(\tau) + G(\tau)u(\tau),\; x(t_0) = x_0. \tag{1.1.22}$$

Матрицы $F(\tau)$ и $G(\tau)$ заданы для всех τ из $[t_0,t]$. Входной сигнал $u(\tau)$ имеет размерность p. Начальное состояние системы x_0 предполагается известным, а желаемое конечное состояние $x(t)$ – задано. Задача управления состоит в том, чтобы в интервале управления $[t_0,t]$ выбрать управляющее воздействие таким образом, чтобы начальное состояние системы перевести в конечное.

Определение 1.17 *Состояние* $x(t_0)$ *системы управления (1.1.22) называется управляемым в интервале* $[t_0,t]$, *если на интервале* $[t_0,t]$ *существует управляющая функция* $u(\tau)$, *такая, что* $x(t)=0$.

Определение 1.18 *Если для каждого состояния* $x(t_0)$ *система управления (1.1.22) управляема на интервале* $[t_0,t]$, *то она называется вполне управляемой на интервале* $[t_0,t]$.

Определение 1.19 *Система (1.1.22) называется просто вполне управляемой или вполне управляемой всюду тогда и только тогда, когда для каждого* t_0 *найдется* t, *такое, что система (1.1.22) будет вполне управляемой на интервале* $[t_0,t]$.

В этих определениях конечное состояние полагается равным нулю. Это условие относится ко всем задачам управления и в случае полной управляемости не нарушает общности рассуждений.

Как известно, общее решение уравнения (1.1.22) задается формулой Коши

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)G(\tau)u(\tau)\, d\tau. \tag{1.1.23}$$

Если $x(t) = 0$, то

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)G(\tau)u(\tau)\, d\tau = -\Phi(t, t_0)x(t_0)$$

и умножая обе части этого равенства на $\Phi^m(t_0, t)$ находим, что

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)G(\tau)u(\tau)\, d\tau = -x(t_0). \tag{1.1.24}$$

Введем матрицу

$$W(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)G(\tau)G^m(\tau)\Phi^m(t_0, \tau)\, d\tau. \tag{1.1.25}$$

Если матрица $W(t_0, t)$ не вырождена, то вектор-функция

$$u(\tau) = -G^m(\tau)\Phi^m(t_0, \tau)W^{-1}(t, t_0)x(t_0),\ t_0 \le \tau \le t \tag{1.1.26}$$

является решением задачи управления. Действительно, подставим равенство (1.1.26) в левую часть (1.1.24). Тогда

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)G(\tau)u(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)G(\tau)(-G^m(\tau)\Phi^m(t_0, \tau)W^{-1}(t, t_0)x(t_0)\, d\tau =$$

$$= -\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)G(\tau)G^m(\tau)\Phi^m(t_0, \tau)\, d\tau\, W^{-1}(t, t_0)x(t_0) = -W(t, t_0)W^{-1}(t, t_0)x(t_0) = -x(t_0).$$

Что и требовалось.

Симметрическая, неотрицательно определенная матрица $W(t, t_0)$ называется матрицей управляемости системы (1.1.22). Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1.2 *Для полной управляемости системы (1.1.22) на интервале $[t, t_0]$ необходимо и достаточно, чтобы матрица управляемости $W(t, t_0)$, определяемая соотношением (1.1.25), была невырожденной.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [14].

Сформулируем некоторые теоремы функционального анализа, которые потребуются при доказательстве теорем существования решения задачи линейной фильтрации.

Теорема 1.3 (Теорема Хана-Банаха[24]) *Всякий линейный функционал $f(x)$, определенный на линейном многообразии L линейного нормированного пространства E, можно продолжить на все пространство с сохранением нормы, т.е. можно построить линейный функционал $F(x)$, определенный на E и такой, что*

1) $F(x) = f(x)$ для $x \in L$,

2) $\|F\|_E = \|f\|_L$.

Теорема 1.4 (Теорема Ф. Рисса [2]) *Всякий линейный функционал $f(x)$, определенный в гильбертовом пространстве H, имеет вид*

$$f(x) = (x, u)_H,$$

где $(.,.)_H$ — скалярное произведение в H и элемент u однозначно определяется функционалом f. При этом $\|f\| = \|u\|_H$.

Пусть $\{H^+, H_0, H^-\}$ — оснащенное гильбертово пространство с билинейной формой $\langle .,. \rangle$. Тогда теорему Ф. Рисса можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1.5 (Обобщенная теорема Ф. Рисса) *Всякий линейный функционал $f(x)$, определенный в пространстве H^-, может быть представлен в виде*

$$f(x) = \langle x, v \rangle,$$

где элемент $v \in H^+$ и однозначно определяется функционалом f. При этом $\|f\| = \|v\|_{H^+}$.

Всякий линейный функционал $f(x)$, определенный в пространстве H^+, может быть представлен в виде

$$f(x) = \langle x, u \rangle,$$

где элемент $v \in H^-$ и однозначно определяется функционалом f. При этом $\|f\| = \|u\|_{H^-}$.

Доказательство этой теоремы не входит в рамки данной работы. Отметим лишь то, что оно существенно не отличается от доказательства, приведенного в [2].

1.2 Постановка задачи линейной оптимальной фильтрации. Уравнение Винера-Хопфа

Обозначим через $x(\tau) \equiv x(\tau,\omega)$, $t_0 \le \tau \le t$, $\omega \in \Omega$ — случайный n — мерный гауссовский процесс с реализациями, принадлежащими с вероятностью 1 пространству непрерывных функций $C[t_0, t]$, и статистиками

$$M[x(\tau)] = m_x(\tau),\ M[(x(\tau) - m_x(\tau))(x(\sigma) - m_x(\sigma))^m] = K_x(\tau, \sigma),$$

где $t_0 \le \sigma \le t$, $C(\tau)$ — матрица наблюдений (измерений) размерности $m \times n$, $m \le n$ с гладкими элементами, $v(\tau) \equiv v(\tau,\omega)$ — m-мерный гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием $M[v(\tau)] = m_v(\tau)$ и ковариационной матрицей

$$K_v(\tau, \sigma) = M[(v(\tau) - m_v(\tau))(v(\sigma) - m_v(\sigma))^m],$$

процессы $x(\tau)$ и $v(\tau)$ некоррелированы. Так как процессы $x(\tau)$ и $v(\tau)$ гауссовские, то приведенные статистики их полностью описывают [6,24]. Элементы матрицы $K_x(\tau, \sigma)$ по обоим аргументам принадлежат $L_2[t_0, t]$, а реализации $v(\tau)$, вектор $m_v(\tau)$ и элементы ковариационной матрицы $K_v(\tau, \sigma)$ могут принадлежать негативному пространству $W_2^{-1}[t_0, t]$.

Задача линейной оптимальной фильтрации состоит в следующем.
Пусть известен некоторый случайный процесс $\{y(\tau), t_0 \le \tau \le t\}$, связанный с процессом $x(\tau)$ соотношением

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau) + v(\tau). \tag{1.2.1}$$

Требуется по наблюдениям процесса $\{y(\tau), t_0 \le \tau \le t\}$ найти линейную оценку $\hat{x}(\tau)$ процесса $x(\tau)$, удовлетворяющую критерию минимума среднеквадратической ошибки в момент времени $\tau = t$:

$$m(t) = \inf_h \{M[(z, x(t) - \hat{x}(t))_n^2] \mid \hat{x}(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,\tau)\, d\tau\}, \tag{1.2.2}$$

где z — произвольный постоянный вектор из E_n , а нижняя грань берется по всем матрицам $h(t, \tau)$ размерности $n \times m$, для которых существует допустимый фильтр

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,\tau) y(\tau)\, d\tau.$$

Доказано, что линейный фильтр для гауссовских процессов является наилучшим из всех фильтров, удовлетворяющих критерию минимума среднеквадратической ошибки [8,30]. Кроме того, оценка, полученная по этому критерию, совпадает с оценками, найденными по критерию максимума правдоподобия и байесовским оцениванием [30].

Покажем, что задача линейной фильтрации эквивалентна решению некоторого интегрального уравнения – уравнения Винера-Хопфа.

Прежде чем приступить к выводу уравнения Винера-Хопфа, преобразуем задачу линейной фильтрации следующим образом. Введем случайные процессы $x_c(\tau) = x(\tau) - m_x(\tau)$ и $v_c(\tau) = v(\tau) - m_v(\tau)$. Процессы $x_c(\tau)$ и $v_c(\tau)$ имеют нулевые моменты первого порядка, а их ковариации совпадают с ковариациями процессов $x(\tau)$ и $v(\tau)$. Вместо процесса $y(\tau)$ будем использовать процесс

$$y_c(\tau) = y(\tau) - C(\tau)m_x(\tau) - m_v(\tau) = C(\tau)x_c(\tau) + v_c(\tau).$$

Далее будем рассматривать задачу линейной фильтрации для процессов $x_c(\tau)$, $v_c(\tau)$, $y_c(\tau)$, но сохраним при этом старые обозначения $x(\tau)$, $v(\tau)$, $y(\tau)$.

Лемма 1.2 (Основная лемма вариационного исчисления) *Если для каждой непрерывной функции $u(\tau)$*

$$\int\limits_{t_0}^{t} u(\tau)v(\tau)\,d\tau = 0,$$

где $v(\tau)$ - функция, непрерывная на отрезке $[t_0,t]$, то $v(\tau) \equiv 0$ на этом же отрезке.

Для оснащенного пространства $W_2^1[t_0,t], L_2[t_0,t], W_2^{-1}[t_0,t]$ эту лемму можно сформулировать следующим образом:

Лемма 1.3 *Если для каждой вектор-функции $u(\tau) \in W_2^{-1}[t_0,t]$ билинейная форма $\langle u, v\rangle = 0$, где $v(\tau)$ некоторая фиксированная вектор-функция из $W_2^1[t_0,t]$, то $v(\tau) \equiv 0$ на отрезке $t_0 \le \tau \le t$.*
Если для каждой вектор-функции $v(\tau) \in W_2^1[t_0,t]$ билинейная форма $\langle v, u\rangle = 0$, где $u(\tau)$ некоторая фиксированная вектор-функция из $W_2^{-1}[t_0,t]$, то $u(\tau) \equiv 0$ почти для всех τ из $[t_0,t]$.

Пусть нижняя грань функционала $m(t)$ достигается при значении $h(t,\tau) = h_0(t,\tau)$ и фильтр $\hat{x}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} h_0(t,\tau)y(\tau)\,d\tau$ – допустимый. Тогда любую матрицу $h(t,\tau)$ из множества допустимых матриц можно представить следующим образом: $h(t,\tau) = h_0(t,\tau) + \lambda h_v(t,\tau)$, где λ — число, $h_v(t,\tau)$ — произвольная матрица из класса допустимых матриц.

Преобразуем выражение $m(t)$:

$$M[(z, x(t) - \int\limits_{t_0}^{t} (h_0(t,\tau) + \lambda h_v(t,\tau))y(\tau)\,d\tau)_n^2] = M[z^m x(t)x^m(t)z -$$

$$-2\lambda z^m \int\limits_{t_0}^{t} x(t)y^m(\sigma)h_v^m(t,\sigma)\,d\sigma z - 2z^m \int\limits_{t_0}^{t} x(t)y^m(\sigma)h_0^m(t,\sigma)\,d\sigma z +$$

$$+2\lambda z^m \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} h_0(t,\tau)y(\tau)y(\sigma)h_v^m(t,\sigma)d\tau d\sigma + \lambda^2 z^m \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} h_v(t,\tau)y(\tau)y(\sigma)h_v^m(t,\sigma)d\tau d\sigma +$$

$$+z^m \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} h_0(t,\tau)y(\tau)y(\sigma)h_0^m(t,\sigma)\,d\tau d\sigma].$$

Дифференцируя это выражение по λ и приравнивая производную к нулю в точке $\lambda = 0$, находим, что

$$M[2z^m \int\limits_{t_0}^{t} \{-x(t)y^m(\sigma) + \int\limits_{t_0}^{t} h_0(t,\tau)y(\tau)y^m(\sigma)\,d\tau\}h_v^m(t,\sigma)d\sigma z] =$$

$$= 2M[(\{-x(t)y^m(\sigma) + \int\limits_{t_0}^{t} h_0(t,\tau)y(\tau)y^m(\sigma)\,d\tau\}^m z, h_v^m(t,\sigma)z)_0] = 0; \tag{1.2.3}$$

здесь $(.,.)_0$ - скалярное произведение в $L_2[t_0,t]$.

Так как матрица $h_v(t,\sigma)$ и вектор z произвольные, то (1.2.3) будет выполняться при всех $h_0(t,\tau)$, удовлетворяющих уравнению

$$M[x(t)y^m(\sigma)] = \int\limits_{t_0}^{t} h_0(t,\tau)M[y(\tau)y^m(\sigma)]\,d\tau. \tag{1.2.4}$$

Это и есть матричное уравнение Винера-Хопфа. Заменим в (1.2.4) случайный процесс $y(\tau)$ его представлением (1.2.1); тогда получим уравнение

$$K_x(t,\sigma)C^m(\sigma) = \int\limits_{t_0}^{t} h_0(t,\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} h_0(t,\tau)K_v(\tau,\sigma)\,d\tau. \tag{1.2.5}$$

Уравнение (1.2.5) в общем случае является уравнением Фредгольма первого рода, решение которого, как известно, неустойчиво и, кроме того, может не принадлежать классу допустимых матриц.

Задача линейной оптимальной фильтрации значительно упрощается, если шум в наблюдениях $v(\tau)$ будет белым гауссовским шумом с невырожденной матрицей интенсивности, то есть, если матрица ковариации шума $K_v(\tau,\sigma) = R(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, и $R(\tau)$ — положительно определенная матрица (для $\forall u \in L_2[t_0,t]$, $\exists c > 0$ такая, что $(u,Ru)_0 \geq c\|u\|_0^2$), элементы $R(\tau)$ – гладкие функции, $R(\tau)$ — интенсивность белого шума.

Именно при таких условиях были получены первые алгоритмы решения задачи линейной оптимальной фильтрации А.Н. Колмогоровым, Н. Винером, Р. Калманом и Р. Бьюси.

В заключение этого параграфа еще несколько замечаний о терминологии.

Случайный процесс $v(\tau)$ в соотношении (1.2.1) будем называть шумом, а $x(\tau)$ — полезным сигналом.

Определение 1.20 ([25]) *Шум $v(\tau)$ в наблюдениях $y(\tau)$ называется цветным (небелым), если не все компоненты ковариационной матрицы $K_v(\tau,\sigma)$ содержат множителем δ –функцию Дирака.*

Если элементы матрицы $K_v(\tau,\sigma)$ по τ и σ принадлежат $L_2[t_0,t]$, то шум $v(\tau)$ будем называть чисто цветным.

Если $K_v(\tau,\sigma) = R(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, а матрица $R(\tau)$ неотрицательно определена, то есть для $\forall u \in L_2[t_0,t]$, $(u,Ru)_0 \geq 0$ (в этом случае обратная матрица к $R(\tau)$ может не существавать), то шум $v(\tau)$ будем называть вырожденным белым шумом.

2 Линейный оптимальный фильтр для стационарных случайных процессов. Фильтр Винера

В этом разделе кратко приведены некоторые необходимые в последующем определения и факты из теории случайных функций [27,8,35], а также алгоритм решения задачи линейной оптимальной фильтрации, предложенный Н.Винером [44,30]. Указаны границы применения фильтра Винера.

2.1 Стационарные случайные процессы

Стационарными принято называть такие случайные процессы, у которых некоторые характеристики инвариантны относительно сдвигов во времени (не зависят от времени).

В теории случайных функций различают несколько типов стационарных случайных процессов (функций).

Определение 2.1 *Случайная функция* $x(\tau,\omega)$ *называется стационарной в широком смысле, если ее математическое ожидание постоянно, а ковариационная матрица зависит только от разности аргументов, то есть*

$$m_x(\tau) = m_x = const,\ K_x(\tau,\sigma) = K_x(\tau-\sigma).$$

Определение 2.2 *Случайная функция* $x(\tau,\omega)$ *называется стационарной в узком смысле, если все ее конечные распределения зависят только от разности аргументов.*

Из определений 2.1 и 2.2 следует. что класс случайных процессов с конечными моментами первого и второго порядка, стационарных в узком смысле, является подмножеством множества случайных процессов, стационарных в широком смысле.

Определение 2.3 *Случайная функция* $x(\tau,\omega)$ *называется ковариационно стационарной, если ее ковариационная матрица зависит только от разности аргументов.*

Таким образом, стационарный в широком смысле случайный процесс будет ковариационно стационарным. Всюду, где в дальнейшем речь идет о стационарных процессах, имеются в виду ковариационно стационарные.

Определение 2.4 *Случайные процессы* $x(\tau,\omega)$ *и* $y(\tau,\omega)$ *называются стационарно связанными, если их взаимная ковариационная матрица зависит только от разности аргументов* $K_{xy}(\tau,\sigma) = K_{xy}(\tau-\sigma)$ *.*

Пусть белый шум $v(\tau,\omega)$ (см. определение 1.3) имеет постоянную матрицу интенсивности $V(\tau) = V$, $v_{ij} = const,\ v_{ij} > 0,$ где v_{ij} –элементы матрицы V . Тогда его ковариационная матрица определяется формулой $K_v(\tau,\sigma) = V\delta(\tau-\sigma)$.

Определение 2.5 *Белый шум* $v(\tau,\omega)$ *называется стационарным белым шумом, если его ковариационная матрица* $K_v(\tau,\sigma) = V\delta(\tau-\sigma)$.

Найдем спектральную плотность стационарного белого шума. Для этого, применяя обобщенное преобразование Фурье [6,26] к ковариационной матрице стационарного белого шума, получим:

$$S_v(\lambda) = \frac{1}{2\pi}V\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(s)e^{-i\lambda s}\,ds = \frac{1}{2\pi}V. \tag{2.1.1}$$

Несобственный интеграл в (2.1.1) понимается в обобщенном смысле [6, 8, 25]. Таким образом, спектральная плотность стационарного белого шума постоянна. Вследствие этого, случайные функции такого рода и называются белыми шумами по аналогии с белым светом, все спектральные компоненты которого имеют одну и ту же интенсивность.

2.2 Фильтр Винера

Пусть, как и раньше, $E_n - n$ –мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(.,.)_n$, $L_2(-\infty,\infty)$ –гильбертово пространство вектор-функций, определенных на всей числовой прямой $(-\infty,\infty)$ и интегрируемых с квадратом по Лебегу, с нормой $\|\,.\,\|_0$ и скалярным произведением $(.,.)_0$.

Введем обозначения: $W_2^1(-\infty,\infty)$ –позитивное гильбертово пространство, полученное пополнением множества непрерывно дифференцируемых вектор-функций
$u(\tau)\in L_2(-\infty,\infty)$ и $\dfrac{du(\tau)}{d\tau} \in L_2(-\infty,\infty)$ по скалярному произведению

$$(u,v)_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(u^m(\tau)v(\tau)+\frac{du^m(\tau)}{d\tau}\frac{dv(\tau)}{d\tau})\,d\tau,$$

$\|u\|_1=\sqrt{(u,u)_1}$ –норма в $W_2^1(-\infty,\infty)$, $W_2^{-1}(-\infty,\infty)$ –негативное пространство, полученное пополнением множества $L_2(-\infty,\infty)$ по негативной норме

$$\|u\|_{-1}=\sup_v\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}u^m(\tau)v(\tau)\,d\tau|\ v\in W_2^1(-\infty,\infty),\|v\|_1=1,u\in L_2(-\infty,\infty)\}.$$

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Пусть $x(\tau)$ и $v(\tau)$ – гауссовские векторные стационарные процессы размерности n и m соответственно, со следующими статистиками:

$$M[x(\tau)]=0,\ M[x(\tau)x^m(\sigma)]=K_x(\tau-\sigma),\ M[v(\tau)]=0,\ M[v(\tau)v^m(\sigma)]=K_v(\tau-\sigma),\ M[x(\tau)v^m(\sigma)]=0;$$

элементы матрицы $K_x(\tau-\sigma)$ принадлежат по переменным τ и σ пространству $W_2^1(-\infty,\infty)$, а элементы матрицы $K_v(\tau-\sigma)$ из пространства $W_2^{-1}(-\infty,\infty)$.

Измеряется процесс $\{y(\tau),\tau\in(-\infty,t]\}$, связанный с процессом $x(\tau)$ соотношением

$$y(\tau)=Cx(\tau)+v(\tau), \tag{2.2.1}$$

где C –матрица наблюдений размерности $m\times n$, независящая от времени; напомним, что $x(\tau)-n$–мерный, а $v(\tau)-m$–мерный векторы. Процесс $y(\tau)$ –стационарный.

Требуется найти оценку процесса $x(\tau)$ в точке $\tau=t$, удовлетворяющую критерию минимума среднеквадратической ошибки:

$$m(t)=\inf_h\{M[(z,x(t)-\hat{x}(t))_n^2]|\ \hat{x}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)y(\tau)\,d\tau\}, \tag{2.2.2}$$

где нижняя грань берется по всем допустимым матрицам $h(t-\tau)$, а интеграл понимается в смысле билинейной формы (см. определение 1.2 стр. 11 и стр. 15).

Уравнением Эйлера для задачи (2.2.1)-(2.2.2) является уравнение Винера-Хопфа вида

$$K_{xy}(t-\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)K_{yy}(\tau-\sigma)\,d\tau \tag{2.2.3}$$

(см. вывод уравнения (1.2.4)).

Введем обозначения: $t-\sigma=\eta,\tau-\sigma=\mu$. Тогда $K_{xy}(t-\sigma)=K_{xy}(\eta)$, $K_{yy}(\tau-\sigma)=K_{yy}(\mu)$, $h(t-\tau)=h(\eta-\mu)$ и уравнение (2.2.3) запишется в виде уравнения свертки первого рода

$$K_{xy}(\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(\eta-\mu)K_{yy}(\mu)\,d\mu. \tag{2.2.4}$$

Интегральное уравнение (2.2.4) аналитически удается решить лишь в некоторых случаях, а именно, когда шум $v(\tau,\omega)$ обладает свойствами, позволяющими построить устойчивый алгоритм решения этого уравнения. К таким шумам относятся стационарный белый гауссовский шум и шум, при котором матрица спектральной плотности вектора наблюдения допускает факторизацию [30], то есть является матрицей, представляемой в виде

$$S_{yy}(\lambda)=\Phi(\lambda)\Phi^m(-\lambda), \tag{2.2.5}$$

где $S_{yy}(\lambda)$ –матрица спектральной плотности вектора наблюдений, $\Phi(\lambda)$ –матрица, определитель которой имеет нули и полюса в левой полуплоскости комплексной переменной λ. Это условие гарантирует то, что $\Phi(\lambda)$ и $\Phi^{-1}(\lambda)$ в правой полуплоскости – аналитические функции и соответствуют физически реализуемым передаточным функциям некоторых систем управления (отклик системы не опережает входного сигнала).

Рассмотрим решение задачи линейной оптимальной фильтрации при выполнении условия (2.2.5) . Если $v(\tau,\omega)$ –белый гауссовский стационарный шум, то матрица $S_{yy}(\lambda)$ допускает факторизацию (2.2.5) [8].

Пусть шум в наблюдениях $v(\tau,\omega)$ некоррелирован со случайным процессом $x(\tau,\omega)$, имеет нулевое среднее и ковариацию $K_v(\tau-\sigma)$. Причем матрица $K_v(\tau-\sigma)$ такова, что спектральная плотность вектора наблюдения $K_{yy}(\lambda)$ допускает факторизацию (2.2.5).

Из вывода уравнения Винера-Хопфа (см. стр. 20) следует, что необходимым условием достижения нижней границы функционала (2.2.2) является выполнение равенства

$$M[(\{-x(t)y^m(\sigma)+\int\limits_{t_0}^{t} h_0(t,\tau)y(\tau)y^m(\sigma)\,d\tau\}^m z, h_s^m(t,\sigma)z)_0]=0,$$

где $h_s(t,\sigma)$ –произвольная допустимая матрица размерности $m\times n$, а матрица $h_0(t,\tau)$ доставляет нижнюю грань функционалу (2.2.2) (см. 1.2.3).

Для стационарных процессов после выполнения операции математического ожидания это условие запишется в виде

$$(\{-K_{xy}(\eta)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_0(\eta-\mu)K_{yy}(\mu)\,d\mu\}_m z, h_s^m(\eta)z)_0=0, \tag{2.2.6}$$

$\eta=t-\sigma, \mu=\tau-\sigma$, z –произвольный вектор из E_n. Интеграл понимается в обобщенном смысле (определение 1.2).

Пусть элементы матриц $K_{xy}(\eta), K_{yy}(\eta), h_0(\eta)$ и $h_s(\eta)$ допускают применение обобщенного преобразования Фурье. Тогда, согласно теореме Парсеваля [30], имеем:

$$z^m\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(-K_{xy}(\eta)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_0(\eta-\mu)K_{yy}(\mu)\,d\mu\right)h_s^m(\eta)\,d\eta z=$$

$$=z^m\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}(K_x(\lambda)C^m+H_0(\lambda)K_y(\lambda))H_s^m(-\lambda)\,d\lambda z, \tag{2.2.7}$$

где $K_x(\lambda)$ и $K_y(\lambda)$ –спектральные плотности процессов $x(\tau)$ и $y(\tau)$, $H_0(\lambda)$ –Фурье-образ матрицы $h_0(\eta)$, $H_s(\lambda)$ –Фурье-образ матрицы $h_s(\eta)$, z –произвольный элемент из E_n, i –мнимая единица ($i^2=-1$.)

Так как по условию спектральная плотность вектора наблюдения допускает факторизацию (2.2.5), то соотношение (2.2.7) можно преобразовать следующим образом

$$\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}(K_x(\lambda)C^m+H_0(\lambda)\Phi(\lambda)\Phi^m(-\lambda))\,H_s^m(-\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\left\{K_x(\lambda)C^m[\Phi^m(-\lambda)]^{-1}\Phi^m(-\lambda)+H_0(\lambda)\Phi(\lambda)\Phi^m(-\lambda)\right\}H_s^m(-\lambda)\,d\lambda=$$

$$= \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \left\{ K_x(\lambda) C^m [\Phi^m(-\lambda)]^{-1} + H_0(\lambda)\Phi(\lambda) \right\} \Phi^m(-\lambda) H_s^m(-\lambda)\, d\lambda = 0. \tag{2.2.8}$$

Равенство нулю в (2.2.8) следует из (2.2.6).

Представим матрицу $K_x(\lambda)C^m[\Phi^m(-\lambda)]^{-1}$ в виде двух слагаемых

$$K_x(\lambda)C^m[\Phi^m(-\lambda)]^{-1} = A(\lambda) + B(-\lambda), \tag{2.2.9}$$

где $A(\lambda)$ — матрица объединяет все члены, имеющие полюса в левой полуплоскости изменения комплексной переменной λ, а $B(-\lambda)$ — все члены, имеющие полюса в правой полуплоскости.

Тогда равенство (2.2.8) будет выглядеть так:

$$\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \{A(\lambda) + H_0(l)\Phi(\lambda)\}\Phi^m(-\lambda)H_s^m(-\lambda)\, d\lambda - \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} B(-\lambda)\Phi^m(-\lambda)H_s^m(-\lambda)\, d\lambda = 0. \tag{2.2.10}$$

Второй интеграл по контуру, лежащему в левой полуплоскости переменной λ, обращается в нуль, так как элементы матриц $B(-\lambda)$ и $\Phi^m(-\lambda)$ в этой полуплоскости суть аналитические функции, а $H_s^m(-\lambda)$ — произвольная и ее можно выбрать также аналитической в левой полуплоскости. Таким образом, получаем, что

$$\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \{A(\lambda) + H_0(\lambda)\Phi(\lambda)\}\Phi^m(-\lambda)H_s^m(-\lambda)\, d\lambda = 0 \tag{2.2.11}$$

для произвольной матрицы $H_s^m(-\lambda)$.

В силу основной леммы вариационного исчисления (см. стр. 20) и существования обратной матрицы $\Phi^{-1}(\lambda)$ в правой полуплоскости (нули и полюса матрицы находятся в левой полуплоскости см. стр. 24), из (2.2.11) следует, что

$$H_0(\lambda) = A(\lambda)\Phi^{-1}(\lambda). \tag{2.2.12}$$

Это и будет решение задачи линейной оптимальной фильтрации для стационарных процессов с матрицей спектральной плотности вектора наблюдения, допускающей факторизацию (2.2.5).

Матричный фильтр Винера (2.2.12) не нашел широкого применения в практике из-за вычислительных трудностей при факторизации матрицы $K_x(\lambda)$. Процедура нахождения матрицы $\Phi(\lambda)$ разработана Б.Д.Андерсоном [36] и представляет собой довольно сложную вычислительную процедуру. Кроме того, практическая реализация разработанного позже стационарного фильтра Калмана-Бьюси оказалась значительно легче и вытеснила матричный фильтр Винера. Этот алгоритм рассмотрен дальше в разделе 3.2.2.

2.3 Одномерный фильтр Винера

Рассмотрим одномерный фильтр Винера, который широко используется в теории управления.

В работе [8,стр. 325] приведена теорема, в которой даны необходимые и достаточные условия факторизации спектральной плотности случайного процесса. Отметим, что неотрицательная интегрируемая функция $K(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ допускает факторизацию (факторизуема), если она может быть представлена в виде:

$$K(\lambda) = \Phi(i\lambda)\Phi(-i\lambda) = |\Phi(i\lambda)|^2,$$

где $\Phi(i\lambda) = \int\limits_0^\infty b(s)e^{-i\lambda s} ds$, $\int\limits_0^\infty |b(s)|^2 ds < \infty$, а случайный процесс с такой спектральной плотностью является реакцией физически реализуемой системы на белый стационарный шум, то есть выходом формирующего фильтра (определение 1.12).

Покажем, как можно провести процедуру факторизации для случайного процесса со спектральной плотностью, представляющей собой дробно-рациональную функцию [27], и определить переходную функцию формирующего фильтра.

Пусть случайный стационарный процесс $y(\tau)$ имеет спектральную плотность $K_y(\lambda)$, являющуюся дробно-рациональной функцией, то есть

$$K_y(\lambda) = \frac{P_{2m}(\lambda)}{Q_{2n}(\lambda)},$$

где $P_{2m}(\lambda)$ –полином степени $2m$, $Q_{2n}(\lambda)$ – полином степени $2n$, причем $n > m$. Полиномы $Q_{2n}(\lambda)$ и $P_{2m}(\lambda)$ содержат только четные степени λ, так как $K_y(\lambda)$ – четная функция (свойство спектральной плотности). Показатель степени знаменателя больше показателя степени числителя, так как противное ведет к бесконечной дисперсии случайной функции $y(\tau)$, а следовательно, к бесконечной мощности помехи (полезный сигнал не может иметь бесконечную мощность) и информация о полезном сигнале теряется. Кроме того, $Q_{2n}(\lambda)$ не должен обращаться в нуль ни при каком действительном λ, так как в этом случае несобственный интеграл при вычислении дисперсии будет расходиться. Таким образом, многочлен $Q_{2n}(\lambda) > 0$ для всех действительных λ, а $P_{2m}(\lambda)$ – неотрицателен ($P_{2m}(\lambda) \leq 0$, для всех действительных λ).

Рассмотрим полином $Q_{2n}(\lambda)$. Этот полином имеет только комплексные корни (для действительных λ, как показано выше, многочлен $Q_{2n}(\lambda) > 0$). Тогда $Q_{2n}(\lambda) = a_{2n}(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_{2n})$, где $\{\lambda_k | k = 1, \ldots, 2n\}$ –корни уравнения $Q_{2n}(\lambda) = 0$, $\lambda_k \in \mathbf{C}$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, $Im\,\lambda_k \neq 0$, $\mathbf{C}$ — комплексная плоскость, $a_{2n} > 0$, a_{2n} — коэффициент при максимальной степени λ. Из алгебры известно, что если λ_k корень уравнения $Q_{2n}(\lambda) = 0$, то λ_k^* — сопряженное к λ_k комплексное число, также корень этого уравнения. Отсюда следует, что все коэффициенты полинома $Q_{2n}(\lambda)$ — действительные числа, так как по теореме Виета для

$$Q_{2n} \equiv a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

имеем:

$$\frac{a_0}{a_{2n}} = \lambda_1\lambda_1^*\lambda_2\lambda_2^*\ldots\lambda_n\lambda_n^* \in R^1,$$

$$-\frac{a_1}{a_{2n}} = \lambda_1\lambda_1^*\lambda_2\lambda_2^*\ldots\lambda_{n-1}\lambda_{n-1}^*\lambda_n + \lambda_1\lambda_1^*\lambda_2\lambda_2^*\ldots\lambda_{n-1}\lambda_{n-1}^*\lambda_n^* +$$

$$+\lambda_1\lambda_1^*\lambda_2\lambda_2^*\ldots\lambda_{n-1}\lambda_n\lambda_n^* + \lambda_1\lambda_1^*\lambda_2\lambda_2^*\ldots\lambda_{n-1}^*\lambda_n\lambda_n^* + \ldots +$$

$$+\lambda_1\lambda_2\lambda_2^*\ldots\lambda_{n-1}\lambda_{n-1}^*\lambda_n\lambda_n^* + \lambda_1^*\lambda_2\lambda_2^*\ldots\lambda_{n-1}\lambda_{n-1}^*\lambda_n\lambda_n^* \in R^1,$$

$$\ldots$$

$$\frac{a_{2n-2}}{a_{2n}} = \lambda_1\lambda_1^* + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^* + \lambda_1^*\lambda_2 + \lambda_1^*\lambda_2^* + \ldots + \lambda_1^*\lambda_n^* + \lambda_2\lambda_2^* + \ldots + \lambda_n\lambda_n^* \in R^1$$

$$-\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \lambda_1 + \lambda_1^* + \ldots + \lambda_n + \lambda_n^* \in R^1,$$

где R^1 –множество действительных чисел, $*$ –операция сопряжения комплексного числа.

Исследуем расположение корней многочлена $Q_{2n}(\lambda)$ на комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Пусть λ_k лежит в первом квадранте. Тогда $\lambda_{k+1} = \lambda_k^*$ –лежит в четвертом квадранте, то есть симметрично относительно действительной оси $Re\,\lambda$. Корни λ_{k+2} и $\lambda_{k+3} = \lambda_{k+2}^*$ располагаются симметрично мнимой оси $Im\,\lambda$, вследствие четности функции $Q_{2n}(\lambda)$. Таким образом, все корни полинома $Q_{2n}(\lambda)$ располагаются симметрично действительной и мнимой осей комплексной плоскости переменной λ.

Диаграмма расположения корней полинома $Q_{2n}(\lambda)$ на комлексной плоскости $\mathbf{C}$ приведена на рисунке 2.1.

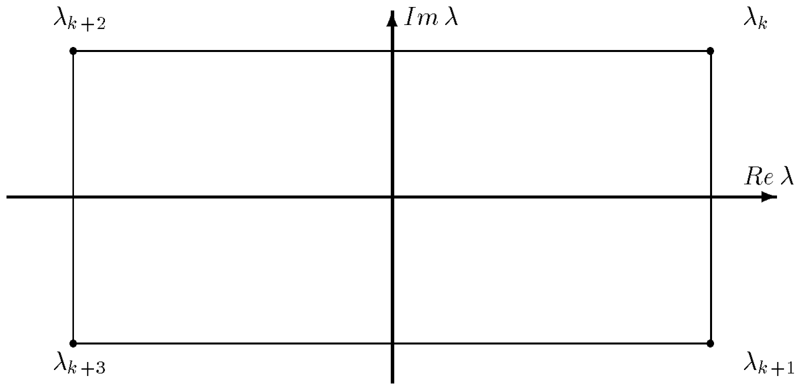

Рис.2.1. Расположение корней полинома на комплексной плоскости $\mathbf{C}$

Аналогично и для полинома $P_{2m}(\lambda)$. Отличие лишь в том, что $P_{2m}(\lambda)$ может иметь и действительные корни. Если $P_{2m}(\lambda)$ имеет действительные корни, то они имеют четную кратность.

Покажем, что это утверждение верно. Пусть λ_k – действительный, отличный от нуля корень $P_{2m}(\lambda)$. Тогда существует и действительный корень λ_{k+1} , так как у полинома $P_{2m}(\lambda)$ максимальная степень четная.

Предположим, что $\lambda_k \neq \lambda_{k+1}$ и других корней нет. В этом случае для всех λ , лежащих между λ_k и λ_{k+1}, многочлен $P_{2m}(\lambda)$ будет отрицательным, а это противоречит условию неотрицательности $P_{2m}(\lambda)$. Полученное противоречие доказывает, что $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ и корень λ_k имеет кратность 2.

Представим многочлен $P_{2m}(\lambda)$ в виде произведения линейных множителей над $\mathbf{C}$:

$$P_{2m}(\lambda) = b_{2m}(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_{2m}) = b_{2m}\prod_{k=1}^{2m}(\lambda-\lambda_k),$$

где среди λ_k, $k = 1, 2, \ldots, 2m$ есть кратные, $b_{2m} > 0, b_{2m}$ — коэффициент при λ^{2m} , $\prod$ — знак произведения. Сгруппируем множители $(\lambda - \lambda_k)$ следующим образом: отнесем к первой группе множителей те из них, в которые входят λ_k с положительными мнимыми частями ($Im\,\lambda_k > 0$). К этой группе отнесем также половину множителей с действительными корнями полинома $P_{2m}(\lambda)$. Если λ_k – действительный корень кратности $2r$, то в первую группу включаем r множителей λ, а остальные – во вторую. Во второй группе содержатся и комплексные корни, лежащие в нижней полуплоскости ($Im\,\lambda < 0$).

Обозначим корни, относящиеся к первой группе, через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, а ко второй – $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_{2m}$. Следует отметить, что

$$\lambda_{m+k} = (\alpha_k - i\beta_k)^* = \alpha_k + i\beta_k = \lambda_k, k = 1, 2, \ldots, m, \beta_k \le 0.$$

Тогда

$$P_{2m}(\lambda) = [\sqrt{b_{2m}}(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_m)][\sqrt{b_{2m}}(\lambda-\lambda_{m+1})(\lambda-\lambda_{m+2})\ldots(\lambda-\lambda_{2m})] =$$
$$= [\sqrt{b_{2m}}\prod_{k=1}^{m}(\lambda-\lambda_k)][\sqrt{b_{2m}}\prod_{k=1}^{m}(\lambda-\lambda_k^*)]. \qquad (2.3.1)$$

Умножим многочлен $\sqrt{b_{2m}}\prod\limits_{k=1}^{m}(\lambda-\lambda_k)$ на i^m . Тогда

$$i^m\sqrt{b_{2m}}\prod_{k=1}^{m}(\lambda-\lambda_k) = \sqrt{b_{2m}}\prod_{k=1}^{m}(i\lambda-\lambda_k^{'}) = \psi(i\lambda),$$

где $\lambda_k^{'} = i\lambda_k = i(\alpha_k + i\beta_k) = -\beta + i\alpha_k$, $\beta_k \le 0$.

Аналогично, умножим $\sqrt{b_{2m}}\prod\limits_{k=1}^{m}(\lambda-\lambda_k^*)$ на $(-i)^m$. Тогда

$$(-i)^m\sqrt{b_{2m}}\prod_{k=1}^{m}(\lambda-\lambda_k^*) = \sqrt{b_{2m}}\prod_{k=1}^{m}(-i\lambda-\lambda_k^{'*}) = \tilde{\psi}(i\lambda),$$

Покажем, что $\tilde{\psi}(i\lambda) = \psi(-i\lambda)$. Умножение на i осуществляет поворот комплексной плоскости на 90^o. Таким образом, если $\psi(i\lambda)$ имеет корень $\lambda_k^{'} = -\beta_k + i\alpha_k$, то $\lambda_k^{'*} = -\beta_k - i\alpha_k$ – тоже корень $\psi(i\lambda)$ и

$$(i\lambda - \lambda_k^{'})(i\lambda - \lambda_k^{'*}) = (i\lambda)^2 + (i\lambda)2\beta_k + \alpha_k^2 + \beta_k^2. \tag{2.3.2}$$

Отметим, что умножение на $(-i)$ осуществляет поворот комплексной плоскости на -90^o. Тогда, если $\lambda_k^{'*} = -\beta_k - i\alpha_k$ - корень $\tilde{\psi}(i\lambda)$, то и $\lambda_k^{'} = -\beta_k + i\alpha_k$ – его корень; при этом

$$(i\lambda - \lambda_k^{'*})(-i\lambda - \lambda_k^{'}) = (-i\lambda)^2 + (-i\lambda)2\beta_k + \alpha_k^2 + \beta_k^2. \tag{2.3.3}$$

Из (2.3.2) и (2.3.3) следует, что $\tilde{\psi}(i\lambda) = \psi(-i\lambda)$, а так как $i^m(-i)^m = 1$, то

$$P_{2m}(\lambda) = \psi(i\lambda)\psi(-i\lambda), \tag{2.3.4}$$

корни $\psi(i\lambda)$ принадлежат левой полуплоскости.

Поступая аналогично для полинома $Q_{2n}(\lambda)$, находим, что

$$Q_{2n}(\lambda) = \Lambda(i\lambda)\Lambda(-i\lambda), \tag{2.3.5}$$

все корни $\Lambda(i\lambda)$ лежат в левой полуплоскости.

Подставим (2.3.4) и (2.3.5) в выражение спектральной плотности $K_y(\lambda)$, тогда

$$K_y(\lambda) = \frac{\psi(i\lambda)\psi(-i\lambda)}{\Lambda(i\lambda)\Lambda(-i\lambda)} = \Phi(i\lambda)\Phi(-i\lambda), \tag{2.3.6}$$

где функция $\Phi(i\lambda) = \dfrac{\psi(i\lambda)}{\Lambda(i\lambda)}$ имеет нули и полюса в левой части комплексной плоскости. Таким образом, $\Phi(i\lambda)$ задает переходную функцию устойчивой физически реализуемой линейной системы. Факторизация спектральной плотности выполнена.

К достоинствам метода Винера следует отнести то, что в результате факторизации определяется частотная характеристика линейного оптимального фильтра, а это позволяет глубже вникнуть в сущность получаемого решения. Кроме того, методом Винера удается найти решение задачи линейной фильтрации в случае небелых шумов в измерениях и учитывать ограничения, связанные с насыщением и ограниченностью полосы пропускания системы. Однако после определения оптимальной переходной матрицы фильтра еще необходимо отыскать ее физически реализуемую часть, а это, как видно из вышеизложенного, далеко не всегда простая задача.

3 Линейный оптимальный фильтр для нестационарных случайных процессов

3.1 Фильтр Калмана-Бьюси

В 1960 году Р. Калман предложил алгоритм решения задачи линейной оптимальной фильтрации для дискретных нестационарных гауссовских случайных процессов. А в 1961 году совместно с Р. Бьюси он опубликовал алгоритм решения задачи для непрерывного времени [13].

Р. Калман несколько изменил постановку задачи линейной оптимальной фильтрации. Он вместо математического ожидания и ковариации для описания оцениваемого случайного процесса $x(\tau,\omega)$ применил формирующий фильтр – динамическую систему, возбуждаемую белым гауссовским шумом. В результате был получен рекуррентный алгоритм решения задачи оценивания в случае наличия белого шума в измерениях. Алгоритм удобен для реализации на ЭВМ. Это привело к его широкому распространению, несмотря на то, что в общем случае замена описания случайного процесса с помощью математического среднего и ковариации на описание формирующим фильтром сталкивается с еще не решенной проблемой нахождения параметров динамической системы.

Проблема построения формирующего фильтра полностью решена лишь для стационарных случайных процессов, спектральная плотность которых допускает факторизацию (2.2.5). Но все же для большинства практических задач теории управления эту задачу удается успешно решать, а во многих случаях формирующий фильтр известен уже на стадии проектирования системы управления.

Рассмотрим постановку и решение задачи линейной оптимальной фильтрации, предложенные Р. Калманом и Р. Бьюси. Для обоснования постановки и решения задачи будем использовать метод, основанный на технике оснащенных гильбертовых пространств [25,16]

П о с т а н о в к а   з а д а ч и. Пусть некоторый случайный n-мерный процесс $x(\tau,\omega)$ формируется путем пропускания p-мерного белого гауссовского шума $u(\tau,\omega)$ через линейную систему

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x(\tau) + G(\tau)u(\tau),\ x(0) = x_0, \tag{3.1.1}$$

где производная понимается в обобщенном смысле, а решение уравнения (3.1.1)– в смысле определения 1.6 (стр. 12); $F(\tau)$ — матрица размерности $n\times n$ с элементами из $L_2[0,t]$, $G(\tau)$ — матрица размерности $n\times p, n\le p$ с гладкими элементами ($G_k(\tau)\in C^1[0,t]$, $G_k(\tau)$ — k-ый столбец матрицы $G(\tau)$); белый шум $u(\tau,\omega)$ имеет нулевое среднее и ковариационную матрицу $M[u(\tau)u^m(\sigma)] = Q(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $\tau,\sigma\in[0,t]$, $Q(\tau)$ — интенсивность нестационарного белого шума; $x_0\equiv x_0(\omega)$ — n-мерный гауссовский случайный вектор, $M[x_0]=0$, $M[x_0x_0^m]=P_0$, P_0 — неотрицательно определенная симметрическая матрица, процесс $u(\tau,\omega)$ некоррелирован с $x_0(\omega)$.

Измерению доступен случайный m-мерный процесс $y(\tau,\omega)$, $\tau\in[0,t]$ связанный с процессом $x(\tau,\omega)$ соотношением

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau) + v(\tau), \tag{3.1.2}$$

где $C(\tau)$ — матрица наблюдений размерности $m\times n, m\le n$, с гладкими элементами; $v(\tau,\omega)$ — белый m-мерный гауссовский шум, некоррелированный со случайным процессом $u(\tau,\omega)$ и случайным вектором $x_0(\omega)$, нулевым средним и ковариационной матрицей $M[v(\tau)v^m(s)] = R(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $R(\tau)$ — положительно определенная симметрическая матрица порядка m с гладкими элементами, т.е. для $\forall u(\tau), v(\tau)\in L_2[0,t]$, $(u,Rv)_0 = (Ru,v)_0$ и $(u,Ru)_0\ge c\|u\|_0^2$.

Требуется по измерениям $\{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$ найти линейную оценку $\hat{x}(\tau)$ случайного процесса $x(\tau)$, удовлетворяющую в точке $\tau = t$ критерию

$$m(t) = \inf_h \{M[(z, x(t) - \hat{x}(t))_n^2] |\ \hat{x}(t) = \int_0^t h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau\}; \tag{3.1.3}$$

нижняя грань берется по всем матрицам $h(t,\tau)$ размерности $n \times m$ с элементами из $W_2^1[0,t]$.

Интеграл в (3.1.3) понимается так же как и в соотношении (1.1.11).

Следует отметить, что требование положительной определенности матрицы $Q(\tau)$ как матрицы интенсивности белого шума (определение 1.5) не является необходимым и его можно ослабить до неотрицательности матрицы (для любых $u \in L_2[0,t], (u, Qu)_0 \geq 0$), то есть шум в системе может быть вырожденным белым шумом (определение 1.20).

1. Изучим свойства матрицы $h(t,\tau)$, удовлетворяющей уравнению Винера-Хопфа, которое является уравнением Эйлера для (3.1.3) и имеет вид

$$K_x(t,\sigma)C^m(\sigma) = \int_0^t h(t,\tau)K_y(\tau,\sigma)\,d\tau, \tag{3.1.4}$$

где $K_x(t,\sigma) = M[x(t)x^m(\sigma)]$, $K_y(\tau,\sigma) = M[y(\tau)y^m(\sigma)] = R(\tau)\delta(\tau-\sigma) +$ $+\,C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)$, а интеграл следует понимать как в определении 1.2.

Матрица $K_x(\tau,\sigma) = M[x(\tau)x^m(\sigma)]$ вычисляется следующим образом:
согласно обобщенной формуле Коши (см. стр. 10) вектор состояния системы $x(\tau)$ определяется выражением

$$x(\tau) = \Phi(\tau,0)x(0) + \int_0^\tau \Phi(\tau,s)G(s)u(s)\,ds,$$

а матрица $M[x(\tau)x^m(\sigma)]$ -

$$M[x(\tau)x^m(\sigma)] = \Phi(\tau,0)M[x(0)x^m(0)]\Phi^m(\sigma,0) + \int_0^\tau\int_0^\sigma \Phi(\tau,s)G(s)M[u(s)u^m(\eta)]G^m(\eta)\Phi^m(\sigma,\eta)\,ds d\eta =$$

$$= \Phi(\tau,0)P_0\Phi^m(\sigma,0) + \int_0^\tau\int_0^\sigma \Phi(\tau,s)G(s)Q(s)G^m(\eta)\Phi^m(\sigma,\eta)\delta(s-\eta)\,ds d\eta.$$

Отсюда, используя свойства δ-функции Дирака, находим, что ковариационная матрица $K_x(\tau,\sigma)$ случайного процесса $x(\tau)$ может быть вычислена по формуле:

$$K_x(\tau,\sigma) = \Phi(\tau,0)P_0\Phi^m(\sigma,0) + \int_0^{\min(\tau,\sigma)} \Phi(\tau,s)G(s)Q(s)G^m(s)\Phi^m(\sigma,s)\,ds, \tag{3.1.5}$$

где $\Phi(\tau,\sigma)$ — фундаментальная матрица системы (3.1.1), удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi(\tau,\sigma)}{d\tau} = F(\tau)\Phi(\tau,\sigma),\ \Phi(\sigma,\sigma) = I_n, \tag{3.1.6}$$

I_n — единичная матрица порядка n. Отметим, что из свойств матриц $Q(s)$, $G(s)$ (гладкости их элементов), непрерывности элементов фундаментальных матриц $\Phi(\tau,s)$, $\Phi^m(\sigma,s)$ и (3.1.5) вытекает существование производной (по крайней мере первой) матрицы $K_x(\tau,\sigma)$ по переменным τ и σ.

Подставляя выражение $K_y(\tau,\sigma)$ в (3.1.4) и учитывая свойства δ-функции Дирака, получаем

$$K_x(t,\sigma)C^m(\sigma) = \int_0^t h(t,\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\,d\tau + h(t,\sigma)R(\sigma). \tag{3.1.7}$$

Уравнение (3.1.7) является интегральным уравнением второго рода, решение которого, как правило, существует, единственно и устойчиво по отношению к малым возмущениям данных, а именно, справедлива

Теорема 3.1 *Пусть все элементы ковариационной матрицы $K_x(\tau,\sigma)$ и матриц $C(\sigma)$ и $R(\sigma)$, $0 \le \tau \le t$, $0 \le \sigma \le t$ принадлежат $L_2[0,t]$. Тогда существует единственное решение $h(t,\sigma)$ уравнения Винера-Хопфа (3.1.7), элементы которого являются функциями из $L_2[0,t]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $u(\tau) = h^m(t,\tau)z$, z – произвольный вектор из E_n; $\mathcal{A}u = \left(\int\limits_0^t z^m h(t,\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\,d\tau\right)^m$, $\mathcal{R}u = (z^m h(t,\sigma)R(\sigma))^m$, $f(\sigma) = (z^m K_x(t,\sigma)C^m(\sigma))^m$,

$$\mathcal{B}u = \mathcal{A}u + \mathcal{R}u. \tag{3.1.8}$$

Умножая (3.1.7) на z^m и используя выше введенные обозначения, получаем

$$\mathcal{B}u \equiv \mathcal{A}u + \mathcal{R}u = f. \tag{3.1.9}$$

Оператор $\mathcal{B}$ положительно определен и симметричен в $L_2[0,t]$. Это следует из свойств матриц $K_x(\tau,\sigma)$ и $R(\tau)$. Матрица $K_x(\tau,\sigma)$ — симметрическая и неотрицательная, а $R(\tau)$ — симметрическая и положительно определена. Первая – как ковариационная матрица случайного процесса $x(\tau,\omega)$, а вторая – как матрица интенсивности белого шума. Действительно, так как $K_x^m(\tau,\sigma) = K_x(\sigma,\tau)$, то для любых $u(\tau)$ и $v(\tau)$ из $L_2[0,t]$ имеем:

$$(\mathcal{B}u,v)_0 = \int\limits_0^t \left\{ \int\limits_0^t u^m(\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\,d\tau + u^m(\sigma)R(\sigma) \right\} v(\sigma)\,d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^t u^m(\tau) \left\{ \int\limits_0^t v^m(\sigma)C(\sigma)K_x(\sigma,\tau)C^m(\tau)\,d\sigma \right\}^m d\tau + \int\limits_0^t u^m(\tau)R(\tau)v(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t u^m(\tau) \left\{ \int\limits_0^t v^m(\sigma)C(\sigma)K_x(\sigma,\tau)C^m(\tau)\,d\sigma + v^m(\tau)R(\tau) \right\}^m d\tau = (u,\mathcal{B}v)_0.$$

Положительная определенность оператора $\mathcal{B}$ следует из неотрицательности оператора $\mathcal{A}$ и положительной определенности $\mathcal{R}$

$$(\mathcal{B}u,u)_0 = (\mathcal{A}u,u)_0 + (\mathcal{R}u,u)_0 \ge c\|u\|_0^2, \tag{3.1.10}$$

где c — положительная константа. Из неравенства (3.1.10) следует единственность решения уравнения Винера-Хопфа. Покажем это. Пусть u_1 и u_2 — решения (3.1.9), причем $u_1 \ne u_2$. Тогда $\mathcal{B}u_1 = f$ и $\mathcal{B}u_2 = f$. Вычтем второе уравнение из первого, получим $\mathcal{B}(u_1 - u_2) = 0$. Из неравенства (3.1.10) имеем $0 = (\mathcal{B}(u_1-u_2),(u_1-u_2))_0 \ge c\|u_1-u_2\|_0^2$, то есть $\|u_1-u_2\|_0 = 0$ и $u_1 = u_2$. А это противоречит предположению, принятому выше. Единственность доказана.

Докажем теперь существование решения (3.1.9). Для произвольного вектора $v \in L_2[0,t]$ имеем $(f,v)_0 \le \|f\|_0\|v\|_0 \le c\|\mathcal{B}v\|_0\|f\|_0$. Скалярное произведение $(f,v)_0 = l_f(v)$ можно рассматривать как линейный ограниченный функционал от $\mathcal{B}v$. По теореме Хана-Банаха (см.стр. 18) расширим $l_f(v)$ на все $L_2[0,t]$ и по теореме Рисса (см.стр. 19) о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве получаем, что $l_f(v) = (u,\mathcal{B}v)_0$, где u — фиксированный элемент в $L_2[0,t]$. Таким образом, $(f,v)_0 = (\mathcal{B}v,u)_0 = (v,\mathcal{B}u)_0$, так как $\mathcal{B}$ симметрический оператор. Из последнего в силу произвольности v и полноты $L_2[0,t]$ следует, что $\mathcal{B}u = f$. Теорема доказана.

Теорема 3.2 *Если элементы матриц $K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)$, $C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)$, $R(\sigma)$, $\frac{\partial}{\partial\sigma}[K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)]$, $\frac{\partial}{\partial\sigma}[C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)]$, $\frac{d}{d\sigma}R(\sigma)$ интегрируемы с квадратом (по Лебегу) на $[0,t]$, то решение $h(t,\sigma)$ уравнения Винера-Хопфа (3.1.7) имеет производную по переменной σ, принадлежащую пространству $L_2[0,t]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая обозначения (3.1.8), дифференцируем (3.1.9), тогда

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} f^m(\sigma) = \int\limits_0^t u^m(\tau)C(\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma}[K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)]\,d\tau + \frac{\partial u^m(\sigma)}{\partial\sigma}R(\sigma) + u^m(\sigma)\frac{d}{d\sigma}R(\sigma).$$

Отсюда

$$\frac{\partial u^m(\sigma)}{\partial\sigma} = \frac{\partial f^m(\sigma)}{\partial\sigma}R^{-1}(\sigma) - \int\limits_0^t u^m(\tau)C(\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma}[K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)]\,d\tau R^{-1}(\sigma) - u^m(\sigma)\frac{dR(\sigma)}{d\sigma}R^{-1}(\sigma).$$

Возведем в квадрат это равенство. Интегрируя полученное выражение в пределах от 0 до t и используя известное неравенство $(a-b)^2 \le 2a^2+2b^2$, находим

$$\int\limits_0^t \frac{\partial u^m(\sigma)}{\partial\sigma}\frac{\partial u(\sigma)}{\partial\sigma}\,d\sigma \le 2\int\limits_0^t \frac{\partial f^m(\sigma)}{\partial\sigma}R^{-1}(\sigma)R^{-1}(\sigma)\frac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma}\,d\sigma +$$

$$+2\int\limits_0^t\int\limits_0^t\int\limits_0^t u^m(\tau)C(\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma}[K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)]R^{-1}(\sigma)R^{-1}(\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}[C(\sigma)K_x(\sigma,s)]\times$$

$$\times C^m(s)u(s)\,d\tau ds d\sigma + 2\int\limits_0^t u^m(\sigma)\frac{dR(\sigma)}{d\sigma}R^{-1}(\sigma)R^{-1}(\sigma)\frac{dR(\sigma)}{d\sigma}u(\sigma)\,d\sigma.$$

Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\int\limits_0^t \left|\frac{\partial u(\sigma)}{\partial\sigma}\right|^2 d\sigma \le 2\left\{\left\|\frac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma}\right\|_0^2 \|R^{-1}\|^2 + \|u\|_0^2\left\|\frac{dR(\sigma)}{d\sigma}\right\|^2 \|R^{-1}\|^2 + \|u\|_0^2\left\|\frac{\partial}{\partial\sigma}C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\right\|^2 \|R^{-1}\|^2\right\},$$

где $\|R\| = \sup\limits_{u,v}\{|(u,\mathcal{R}v)_0|\; u,v\in L_2[0,t],\; \|u\|_0 = \|v\|_0 = 1\}$ — операторная норма.

По условию теоремы правая часть последнего неравенства ограничена, то есть

$$\int\limits_0^t \left|\frac{\partial u(\sigma)}{\partial\sigma}\right|^2 d\sigma = \left\|\frac{\partial u(\sigma)}{\partial\sigma}\right\|_0^2 < \infty \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(\sigma)}{\partial\sigma} \in L_2[0,t].$$

Так как $u(\sigma) = h^m(t,\sigma)z$, где z — произвольный вектор из E_n, то элементы матрицы $\dfrac{\partial h(t,\sigma)}{\partial\sigma}$ принадлежат по переменной σ пространству $L_2[0,t]$. Теорема доказана.

Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что решение уравнения Винера-Хопфа существует и принадлежит допустимому множеству переходных матриц фильтра.

Для вывода уравнения фильтра Калмана-Бьюси требуется знать свойства матрицы $h(t,\tau)$ и по переменной t. Выяснить это удобно с помощью понятия двойственности.

2. Покажем, что решение задачи линейной оптимальной фильтрации (3.1.1) - (3.1.3) двойственно (эквивалентно) решению некоторой задачи оптимального управления линейной системой с квадратичным критерием качества.

Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что элементы матрицы $h(t,\tau)$ — решения уравнения (3.1.7) при фиксированном t, принадлежат пространству $W_2^1[0,t]$. Реализации случайного векторного процесса $y(\tau,\omega)$ являются функциями пространства $W_2^{-1}[0,t]$, так как ему принадлежат реализации белого шума $v(\tau,\omega)$ (см. определение 1.4). Таким образом, интеграл в выражении оценки

$$\hat{x}(t) = \int\limits_0^t h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau \tag{3.1.11}$$

следует понимать в обобщенном смысле (см.стр. 15, (1.1.11)). Чтобы иметь дело со скалярными уравнениями, умножим обе части (3.1.11) на произвольный вектор $z\in E_n$. Введем обозначение $H(t,\tau) = -z^m h(t,\tau)$.

Справедлива цепочка равенств

$$z^m\hat{x}(t) = \int\limits_0^t z^m h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau = -\int\limits_0^t H(t,\tau)C(\tau)x(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^t H(t,\tau)v(\tau)\,d\tau. \tag{3.1.12}$$

Введем вектор $\varphi(t,\tau)$, определяемый для каждого фиксированного t, как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi(t,\tau)}{d\tau} = -F^m(\tau)\varphi(t,\tau) - C^m(\tau)H^m(t,\tau)$$

или (3.1.13)

$$\frac{d\varphi^m(t,\tau)}{d\tau} = \varphi^m(t,\tau)F(\tau) - H(t,\tau)C(\tau),$$

с условием

$$\varphi(t,\tau)|_{\tau=t} = \varphi(t,t) = z, 0 \le \tau \le t. \qquad (3.1.14)$$

Пусть

$$u_\varepsilon(\tau) = \mathcal{A}_\varepsilon^+ u \equiv \int\limits_0^{\varepsilon t} u(\tau)\omega_\varepsilon(\tau - s)ds, \omega_\varepsilon(\tau) = \varepsilon^{-1}\omega_0\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), M[x_0] = 0, 0 < \varepsilon < 1,$$

$\omega_0(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ и $\tau > 1$, $\omega_0(\tau)$ - бесконечно дифференцируемая, равная нулю в окрестностях точек 0 и t, неотрицательная на $[0,t]$ функция и $\int_0^t \omega_\varepsilon(\tau)d\tau = 1$. Функцию $u_\varepsilon(\tau)$ называют осреднением $u(\tau)$. (Более подробную информацию об операторах осреднения можно найти в [25].)

Вместо уравнения (3.1.1) будем рассматривать уравнение с осредненным процессом $u_\varepsilon(\tau)$:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x(\tau) + G(\tau)u_\varepsilon(\tau),\ x(0) = x_0. \qquad (3.1.15)$$

Решение (3.1.15) зависит от ε , поэтому будем обозначать его через $x_\varepsilon(\tau)$. Вектор-функция $u_\varepsilon(\tau)$ – бесконечно дифференцируемая и $x_\varepsilon(\tau)$ является решением (3.1.15) в обычном смысле. Учитывая (3.1.14), имеем

$$z^m x_\varepsilon(t) = \varphi^m(t,t)x_\varepsilon(t) = \varphi^m(t,0)x_0 + \int\limits_0^t [\frac{d}{d\tau}\varphi^m(t,\tau)x_\varepsilon(\tau)]d\tau.$$

Используя уравнения (3.1.13) и (3.1.15), запишем

$$\frac{d}{d\tau}[\varphi^m(t,\tau)x_\varepsilon(\tau)] = \frac{d\varphi^m(t,\tau)}{d\tau}x_\varepsilon(\tau) + \varphi^m(t,\tau)\frac{dx_\varepsilon(\tau)}{d\tau} = -H(t,\tau)C(\tau)x_\varepsilon(\tau) + \varphi^m(t,\tau)G(\tau)u_\varepsilon(\tau).$$

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до t, получаем

$$z^m x_\varepsilon(t) = \varphi^m(t,0)x_0 + \int\limits_0^t [-H(t,\tau)C(\tau)x_\varepsilon(\tau) + \varphi^m(t,\tau)G(\tau)u_\varepsilon(\tau)]\,d\tau.$$

Введем соотношение

$$z^m \hat{x}_\varepsilon(t) = -\int\limits_0^t H(t,\tau)C(\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^t H(t,\tau)v(\tau)\,d\tau.$$

Составим разность

$$z^m\{x_\varepsilon(t) - \hat{x}_\varepsilon(t)\} = \varphi(t,0)x_0 + \int\limits_0^t \varphi^m(t,\tau)G(\tau)u_\varepsilon(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t H(t,\tau)v(\tau)\,d\tau.$$

Возведем обе части этого выражения в квадрат и применим к полученному соотношению операцию математического ожидания. Тогда

$$M[(z, x_\varepsilon(t) - \hat{x}_\varepsilon(t))_n^2] = \int\limits_0^t\int\limits_0^t \varphi^m(t,\tau)G(\tau)M[u_\varepsilon(\tau)u_\varepsilon^m(\sigma)]G^m(\sigma)\varphi(t,\sigma)\,d\tau d\sigma +$$

$$+\int_0^t\int_0^t H(t,\tau)M[v(\tau)v^m(\sigma)]H^m(t,\sigma)\,d\tau d\sigma+\varphi^m(t,0)P_0\varphi(t,0).$$

Так как согласно исходному предположению случайные процессы $u(\tau)$, $v(\tau)$ и случайный вектор x_0 независимы, то

$$M[(z,x_\varepsilon(t)-\hat{x}_\varepsilon(t))_n^2]=\varphi^m(t,0)P_0\varphi(t,0)+\int_0^t H(t,\tau)R(\tau)H^m(t,\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^t\varphi^m(t,\tau)G(\tau)\int_0^{\varepsilon t}\omega_\varepsilon(\tau-s)Q(s)\omega_\varepsilon(\sigma-s)\,ds\,G^m(\sigma)\varphi(t,\sigma)\,d\tau d\sigma. \tag{3.1.16}$$

В третьем слагаемом правой части равенства (3.1.16) поменяем пределы интегрирования; тогда для него имеем выражение

$$\int_0^{\varepsilon t}\left(\int_0^t\varphi^m(t,\tau)G(\tau)\omega_\varepsilon(\tau-s)\,d\tau\right)Q(s)\left(\int_0^t\omega_\varepsilon(\sigma-s)G^m(\sigma)\varphi(t,\sigma)\,d\sigma\right)ds. \tag{3.1.17}$$

Далее покажем, что если матрица $h(t,\tau)$ непрерывна по переменной τ на $[0,t]$, то $\max\limits_\tau\|\mathcal{A}_\varepsilon^- h(t,\tau)-h(t,\tau)\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, где $\tau\in[0,t]$, а $\mathcal{A}_\varepsilon^-$ — оператор осреднения, $\mathcal{A}_\varepsilon^- u(\tau)=\int\limits_0^{\varepsilon t}u(\tau+s)\omega_\varepsilon(s)\,ds$, а $\|.\|$ — матричная норма, $\|h\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n h_{ij}^2}$. Действительно, из свойств функции $\omega_\varepsilon(\tau)$ следует, что $\int\limits_0^{\varepsilon t}\omega_\varepsilon(s)\,ds=1$ и справедлива цепочка соотношений

$$\max_\tau\|\mathcal{A}_\varepsilon^- h(t,\tau)-h(t,\tau)\|=\max_\tau\left|\int_0^{\varepsilon t}[h(t,\tau+s)-h(t,\tau)]\omega_\varepsilon(s)\,ds\right|\le$$

$$\le\sup_\tau\sup_s|h(t,\tau+s)-h(t,\tau)|\to 0,\ \text{при }\varepsilon\to 0,\ \tau\in[0,t],\ s\in[0,\varepsilon t],$$

что и требовалось доказать.

Перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$ в (3.1.17). Учитывая, что $\int\limits_0^{\varepsilon t}\omega_\varepsilon(s)\,ds=1$, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\varepsilon t}\left(\int_0^t\varphi^m(t,\tau)G(\tau)\omega_\varepsilon(\tau-s)\,d\tau\right)Q(s)\left((\int_0^t\omega_\varepsilon(\sigma-s)G^m(\sigma)\varphi(t,\sigma)\,d\sigma\right)ds=$$

$$=\int_0^t\varphi^m(t,\tau)G(\tau)Q(\tau)G^m(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau;$$

функция $\varphi(t,\tau)$ вне отрезка $[0,t]$ считается равной нулю. Далее, переходя к пределу в равенстве (3.1.16) по $\varepsilon\to 0$, имеем

$$M[(z,x(t)-\hat{x}(t))_n^2]=\varphi^m(t,0)P_0\varphi(t,0)+\int_0^t H(t,\tau)R(\tau)H^m(t,\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\varphi^m(t,\tau)G(\tau)Q(\tau)G^m(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau=m(t,H). \tag{3.1.18}$$

Здесь принято во внимание то, что последовательности $x_\varepsilon(t)_{\varepsilon>0}$ и $\hat{x}_\varepsilon(t)_{\varepsilon>0}$ при $\varepsilon \to 0$ сходятся по норме пространства $L_2[0,t]$ к $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ соответственно.

Напомним постановку задачи линейного оптимального управления.
Пусть детерминированная система управления описывается дифференциальным уравнением (3.1.13) с условием (3.1.14). Требуется найти такой закон управления $H(t,\tau)$ системой (3.1.13),(3.1.14), который минимизирует критерий (3.1.18).

Теперь можно сформулировать доказанную выше теорему двойственности задачи линейной фильтрации и задачи линейного оптимального управления с квадратичным критерием качества.

Теорема 3.3 (Теорема двойственности) *Решение задачи линейной оптимальной фильтрации (3.1.1)-(3.1.2) эквивалентно нахождению закона управления $H(t,\tau)$ линейной системой (3.1.13)-(3.1.14) и доставляющего минимум функционалу (3.1.18) – решению задачи оптимального управления линейной детерминированной системой.*

3. Покажем, что задача линейного оптимального управления (3.1.13), (3.1.14), (3.1.18) сводится к решению уравнения Риккати

$$\begin{gathered}\frac{dP(\tau)}{d\tau} = F(\tau)P(\tau) + P(\tau)F^m(\tau) + G(\tau)Q(\tau)G^m(\tau) - P(\tau)C^m(\tau)R^{-1}(\tau)C(\tau)P(\tau),\\ P(\tau)|_{\tau=0} = P_0,\end{gathered} \tag{3.1.19}$$

где $P_0 = M[x_0 x_0^m]$. С помощью уравнений (3.1.13) и (3.1.19) преобразуем выражение

$$\frac{d}{d\tau}[\varphi^m(t,\tau)P(\tau)\varphi(t,\tau)] = \frac{d\varphi^m(t,\tau)}{d\tau}P(\tau)\varphi(t,\tau) + \varphi^m(t,\tau)\frac{dP(\tau)}{d\tau}\varphi(t,\tau) + \varphi^m(t,\tau)P(\tau)\frac{d\varphi(t,\tau)}{d\tau} =$$

$$= -\varphi^m(t,\tau)F(\tau)P(\tau)\varphi(t,\tau) - H(t,\tau)C(\tau)P(\tau)\varphi(t,\tau) + \varphi^m(t,\tau)F(\tau)P(\tau)\varphi(t,\tau) + \varphi^m(t,\tau)P(\tau)F^m(\tau)\varphi(t,\tau) +$$

$$+\varphi^m(t,\tau)G(\tau)Q(\tau)G^m(\tau)\varphi(t,\tau) - \varphi^m(t,\tau)P(\tau)C^m(\tau)R^{-1}(\tau)C(\tau)\varphi(t,\tau) - \varphi^m(t,\tau)P(\tau)C^m(\tau)H^m(t,\tau) =$$

$$= -[H(t,\tau) + \varphi^m(t,\tau)P(\tau)C^m(\tau)R^{-1}(\tau)]R(\tau)[H(t,\tau) + \varphi^m(t,\tau)P(\tau)C^m(\tau)R^{-1}(\tau)]^m + H(t,\tau)R(\tau)H^m(t,\tau) +$$

$$+\varphi^m(t,\tau)G(\tau)Q(\tau)G^m(\tau)\varphi(t,\tau),$$

здесь прибавлено и вычтено $H(t,\tau)R(\tau)H^m(t,\tau)$. Далее. подставляя полученное соотношение в равенство

$$\varphi^m(t,t)P(t)\varphi(t,t) = \varphi^m(t,0)P_0\varphi(t,0) + \int\limits_0^t \frac{d}{d\tau}[\varphi^m(t,\tau)P(\tau)\varphi(t,\tau)]\, d\tau,$$

имеем

$$\varphi^m(t,0)P_0\varphi(t,0) + \int\limits_0^t H(t,\tau)R(\tau)H^m(t,\tau)\, d\tau + \int\limits_0^t \varphi^m(t,\tau)G(\tau)Q(\tau)G^m(\tau)\varphi(t,\tau)\, d\tau =$$

$$= \varphi^m(t,t)P(t)\varphi(t,t) + \int\limits_0^t \{[H(t,\tau) + \varphi^m(t,\tau)P(\tau)C^m(\tau)R^{-1}(\tau)]R(\tau)[H(t,\tau) + \varphi^m(t,\tau)P(\tau)C^m(\tau)R^{-1}(\tau)]^m\}d\tau.$$

Левая часть этого выражения совпадает с (3.1.18) и достигает минимального значения при

$$H(t,\tau) = -\varphi^m(t,\tau)P(\tau)C^m(\tau)R^{-1}(\tau). \tag{3.1.20}$$

Отсюда следует, что, зная решение уравнения Риккати $P(\tau)$, можно найти решение задачи оптимального управления.

4. Найдем дифференциальные уравнения для вектора оценки.

Введем обозначение $K(\tau) = P(\tau)C^m(\tau)R^{-1}(\tau)$ и запишем равенство (3.1.20) в виде $H(t,\tau) = -\varphi^m(t,\tau)K(\tau)$. Тогда (3.1.13) примет вид

$$\frac{d\varphi(t,\tau)}{d\tau} = -[F^m(\tau) - C^m(\tau)K^m(\tau)]\varphi(t,\tau). \tag{3.1.21}$$

Пусть $\psi(\tau,t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\psi(\tau,t)}{d\tau} = [F(\tau) - K(\tau)C(\tau)]\psi(\tau,t)$$

с начальным условием $\psi(t,t) = I_n$, I_n — единичная матрица. В этом случае решение (3.1.21) с начальным условием $\varphi(t,t) = z$ связано с $\psi(\tau,t)$ равенством $\varphi(t,\tau) = \psi^m(\tau,t)z$. Следовательно, $H(t,\tau) = -z^m\psi(\tau,t)K(\tau)$. Отметим, что так как $\psi(\tau,t)$ является фундаментальной матрицей, то $H(t,\tau)$ дифференцируема и по первому аргументу. Используя обозначения (3.1.12), находим, что

$$h(t,\tau) = \psi(\tau,t)K(\tau).$$

Таким образом, элементы матрицы $h(t,\tau)$ по переменной t принадлежат множеству дифференцируемых функций, а оценка $\hat{x}(t)$ запишется в виде

$$\hat{x}(t) = \int\limits_0^t \psi(\tau,t)K(\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Матрица $[\psi(\tau,t)]^{-1} = \psi(t,\tau)$ является фундаментальной и по первому аргументу удовлетворяет сопряженному к (3.1.21) уравнению. Значит, вектор оценки $\hat{x}(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\hat{x}(\tau)}{d\tau} = [F(\tau) - K(\tau)C(\tau)]\hat{x}(\tau) + K(\tau)y(\tau)$$

или

$$\frac{d\hat{x}(\tau)}{d\tau} = F(\tau)\hat{x}(\tau) + K(\tau)[C(\tau)\hat{x}(\tau) - y(\tau)] \tag{3.1.22}$$

с начальным условием $\hat{x}(0) = M[x(0)] = M[x_0] = 0$.

Справедлив следующий результат.

Теорема 3.4 (Фильтр Калмана-Бьюси) *Линейная оценка $\hat{x}(\tau)$ вектора состояния $x(\tau)$ системы (3.1.1) при измерениях (3.1.2), доставляющая минимум функционалу (3.1.3), удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.1.22), где $K(\tau)$ — коэффициент усиления фильтра, $K(\tau) = P(\tau)C^m(\tau)R^{-1}(\tau)$, $P(\tau)$ — ковариационная матрица ошибки оценки, удовлетворяющая уравнению Риккати (3.1.19).*

Итак, теорема 3.4 задает алгоритм решения задачи линейной оптимальной фильтрации для нестационарных случайных процессов в случае наличия белого гауссовского шума в наблюдениях. В алгоритме фильтрации Калмана-Бьюси существенную роль играет невырожденность матрицы $R(\tau)$ — матрицы интенсивности белого шума.

Попытки получить решение задачи линейной фильтрации для более широкого класса шумов в системе и измерениях предпринимались сразу же после опубликования результатов Р. Калмана.

Рассмотрим некоторые методы решения задачи линейной оптимальной фильтрации при смягчении ограничений на шумы в наблюдениях и системе.

3.2 Обобщенный фильтр Калмана-Бьюси

В предыдущем разделе рассмотрен фильтр Калмана-Бьюси, когда процессы $u(\tau,\omega)$ и $v(\tau,\omega)$ некоррелированы и имеют нулевые средние значения. В этом параграфе приведен алгоритм решения задачи линейной оптимальной фильтрации в более общей постановке.

Постановка задачи. Векторный n-мерный случайный процесс $x(\tau,\omega)$ моделируется динамической системой

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x(\tau) + G(\tau)u(\tau) + L(\tau)f(\tau), x(0) = x_0, \tag{3.2.1}$$

где $F(\tau)$, $G(\tau)$, $L(\tau)$ — известные матрицы, $u(\tau,\omega)$ — белый шум, $f(\tau)$ — известная детерминированная (неслучайная) вектор-функция, $x_0(\omega)$ — n-мерный случайный вектор. Размерности матриц $F(\tau)$, $G(\tau)$ и $L(\tau)$ согласованы с размеренностью векторов $x(\tau)$, $u(\tau)$ и $f(\tau)$ соответственно. Элементы матрицы $F(\tau)$ принадлежат $L_2[0,t]$, а матриц $G(\tau)$ и $L(\tau)$ гладкие, $f(\tau) \in L_2[0,t]$.

Наблюдается процесс $\{y(\tau), 0 \le \tau \le t\}$, связанный с $x(\tau)$ соотношением

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau) + v(\tau) + g(\tau), \tag{3.2.2}$$

$g(\tau)$ — известная функция из $L_2[0,t]$, $v(\tau)$ — белый шум, $C(\tau)$ — матрица размерности $m \times n$ с гладкими элементами.

Требуется по наблюдениям $\{y(\tau), 0 \le \tau \le t\}$ найти линейную оценку $\hat{x}(\tau)$ вектора $x(\tau)$ в точке $\tau = t$, удовлетворяющую критерию

$$m(t) = \inf_h \left\{ M[(z, x(t) - \hat{x}(t) - (m_x(t) - \hat{m}_x(t)))_n^2] \;\middle|\; \hat{x}(t) = \int_0^t h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau \right\}, \tag{3.2.3}$$

где $z \in E_n$, $m_x(t) = M[x(t)]$, $\hat{m}(t) = M[\hat{x}(t)]$.

Процессы $u(\tau)$ и $v(\tau)$ – взаимно коррелированы и имеют следующие статистики

$$M[u(\tau)] = m_u(\tau),\ M[v(\tau)] = m_v(\tau),\ M[x_0] = m_{x_0},\ M[u(\tau)x_0^m] = 0,$$

$$M[v(\tau)x_0^m] = 0,\ M[(x_0 - m_{x_0})(x_0 - m_{x_0})^m] = P_0,\ P_0 \ge 0,\ P_0 = P_0^m,$$

$$M[(u(\tau) - m_u(\tau))(u(\sigma) - m_u(\sigma))^m] = Q(\tau)\delta(\tau - \sigma),\ Q(\tau) \ge 0, Q(\tau) = Q^m(\tau),$$

$$M[(v(\tau) - m_v(\tau))(v(\sigma) - m_v(\sigma))] = R(\tau)\delta(\tau - \sigma),\ R(\tau) \ge 0, R(\tau) = R^m(\tau),$$

$$M[(u(\tau) - m_u(\tau))(v(\sigma) - m_v(\sigma))^m] = S(\tau)\delta(\tau - \sigma),\ 0 \le \tau, \sigma \le t.$$

Получим уравнения обобщенного фильтра Калмана-Бьюси. Для этого сделаем замены: $u(\tau) = u_1(\tau) + m_u(\tau)$, $v(\tau) = v_1(\tau) + m_v(\tau)$, $x_0 = x_{01} + m_{x_0}$. Процессы $u_1(\tau)$, $v_1(\tau)$ и случайный вектор x_{01} имеют нулевые средние. Уравнение (3.2.1) будет иметь вид

$$\frac{dx_1(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x_1(\tau) + G(\tau)u_1(\tau) + G(\tau)m_u(\tau) + L(\tau)f(\tau),\ x_1(0) = x_{01}, \tag{3.2.4}$$

а соотношение (3.2.2) принимает вид

$$y(\tau) = C(\tau)x_1(\tau) + v_1(\tau) + m_v(\tau) + g(\tau). \tag{3.2.5}$$

Введем вектор-функцию $x_2(\tau)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_2(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x_2(\tau) + G(\tau)m_u(\tau) + L(\tau)f(\tau),\ x_2(0) = 0. \tag{3.2.6}$$

Вычтем уравнение (3.2.6) из (3.2.4), получим

$$\frac{d(x_1(\tau) - x_2(\tau))}{d\tau} = F(\tau)(x_1(\tau) - x_2(\tau)) + G(\tau)u_1(\tau), x_1(0) - x_2(0) = x_{01}$$

и, обозначая $x_1(\tau) - x_2(\tau) = x_c(\tau)$, $y_c(\tau) = y(\tau) - C(\tau)x_2(\tau) - m_v(\tau) - g(\tau)$, находим

$$\frac{dx_c(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x_c(\tau) + G(\tau)u_1(\tau),\ x_c(0) = x_{01}, \tag{3.2.7}$$

$$y_c(\tau) = C(\tau)x_c(\tau) + v_1(\tau). \tag{3.2.8}$$

Итак, общая модель (3.2.1)-(3.2.3) после проведенных замен свелась к модели (3.2.7)-(3.2.8), где процессы $u_1(\tau)$ и $v_1(\tau)$ имеют нулевые средние и взаимно коррелированные.

Найдем уравнения фильтра для модели (3.2.7)-(3.2.8). Вывод проведем в несколько этапов. Индексы c и 1 в обозначении случайных процессов x_c, y_c, u_1 и v_1 будем опускать.

1.Найдем дифференциальное уравнение для матрицы импульсной переходной функции фильтра.

Уравнение Винера-Хопфа имеет вид

$$M[x(t)y^m(\sigma)] = \int_0^t h(t,\tau)M[y(\tau)y^m(\sigma)]\,d\tau. \tag{3.2.9}$$

Вывод этого уравнения дан в разделе 1.2.

Раскроем выражение $M[x(t)y^m(\sigma)]$, используя (3.2.8) и обобщенную формулу Коши (см.стр. 10 и [25]), получаем:

$$M[x(t)y^m(\sigma)] = M[x(t)x^m(\sigma)]C^m(\sigma) + M[x(t)v^m(\sigma)] = K_x(t,\sigma)C^m(\sigma)+$$
$$+M[\Phi(t,0)x_0v^m(\sigma)] + \int\limits_0^t \Phi(t,\tau)G(\tau)M[u(\tau)v^m(\sigma)]d\tau = K_x(t,\sigma)C^m(\sigma) + \Phi(t,\sigma)G(\sigma)S(\sigma). \tag{3.2.10}$$

Аналогично

$$M[y(\tau)y^m(\sigma)] = C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma) + C(\tau)M[x(\tau)v^m(\sigma)] + M[v(\tau)x^m(\sigma)]C^m(\sigma) + R(\tau)\delta(\tau-\sigma),$$

$$M[x(\tau)v^m(\sigma)] = \int\limits_0^\tau \Phi(\tau,s)G(s)S(s)\delta(s-\sigma)ds = \begin{cases} 0,\ \tau \le \sigma, \\ 1/2G(\tau)S(\tau),\ \tau=\sigma, \\ \Phi(\tau,\sigma)G(\sigma)S(\sigma),\ \tau>\sigma, \end{cases}$$

$$M[v(\tau)x^m(\sigma)] = \int\limits_0^\sigma S^m(s)\delta(s-\tau)G^m(s)\Phi^m(\sigma,s)ds = \begin{cases} 0,\ \sigma<\tau, \\ 1/2S^m(\sigma)G^m(\sigma),\ \tau=\sigma, \\ S^m(\tau)G^m(\tau)\Phi^m(\sigma,\tau),\ \tau>\sigma. \end{cases}$$

Введем матричную функцию $L(\tau,\sigma)$, равную

$$L(\tau,\sigma) = \begin{cases} C(\tau)\Phi(\tau,\sigma)G(\sigma)S(\tau),\ \tau>\sigma, \\ S^m(\tau)G^m(\tau)\Phi^m(\sigma,\tau)C^m(\sigma),\ \tau<\sigma, \\ 1/2[C(\tau)G(\tau)S(\tau) + S^m(\tau)G^m(\tau)C^m(\tau)],\ \tau=\sigma. \end{cases}$$

Тогда уравнение Винера-Хопфа будет иметь вид

$$K_x(t,\sigma)C^m(\sigma) + \Phi(t,\sigma)G(\sigma)S(\sigma) = \int\limits_0^t h(t,\tau)\{C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma) + L(\tau,\sigma)\}\,d\tau + h(t,\sigma)R(\sigma). \tag{3.2.11}$$

Это уравнение является уравнением Фредгольма второго рода, решение которого – корректная задача. Можно показать так же, как и в 3.1, что матрица $h(t,\tau)$ дифференцируема по t.

Продифференцируем (3.2.11) по t. Тогда

$$\frac{\partial K_x(t,\sigma)}{\partial t}C^m(\sigma) + \frac{\Phi(t,\sigma)}{\partial t}G(\sigma)S(\sigma) = h(t,t)C(t)K_x(t,\sigma)C^m(\sigma)+$$
$$+h(t,t)L(t,\sigma) + \int\limits_0^t \frac{\partial h(t,\tau)}{\partial t}C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\,d\tau + \int\limits_0^t \frac{\partial h(t,\tau)}{\partial t}L(\tau,\sigma)\,d\tau + \frac{\partial h(t,\sigma)}{\partial t}R(\sigma). \tag{3.2.12}$$

Так как $L(t,\sigma) = C(t)\Phi(t,\sigma)G(\sigma)S(\sigma)$ при $t>\sigma$, то

$$h(t,t)C(t)K_x(t,\sigma)C^m(\sigma) + h(t,t)L(t,\sigma) = h(t,t)C(t)[K_x(t,\sigma)C^m(\sigma) + \Phi(t,\sigma)G(\sigma)S(\sigma)].$$

В квадратных скобках – левая часть уравнения Винера-Хопфа. Таким образом,

$$h(t,t)C(t)K_x(t,\sigma)C^m(\sigma) + h(t,t)L(t,\sigma) = \int\limits_0^t h(t,t)C(t)h(t,t)K_y(\tau,\sigma)\,d\tau. \tag{3.2.13}$$

Рассмотрим левую часть (3.2.12). Используя (3.2.7) и условие физической реализуемости системы $M[u(t)y^m(\sigma)] = 0$, находим, что

$$\frac{\partial K_x(t,\sigma)}{\partial t}C^m(\sigma) + \frac{\Phi(t,\sigma)}{\partial t}G(\sigma)S(\sigma) = M[\frac{dx(t)}{dt}y^m(\sigma)] =$$
$$= F(t)M[x(t)y^m(\sigma)] + G(t)M[u(t)y^m(\sigma)] = F(t)M[x(t)y^m(\sigma)].$$

Из (3.2.9) следует, что

$$\frac{\partial K_x(t,\sigma)}{\partial t}C^m(\sigma) + \frac{\Phi(t,\sigma)}{\partial t}G(\sigma)S(\sigma) = \int\limits_0^t F(t)h(t,\tau)K_y(\tau,\sigma)\,d\tau. \qquad (3.2.14)$$

Подставим выражения(3.2.13) и (3.2.14) в (3.2.12), имеем

$$\int\limits_0^t F(t)h(t,\tau)K_y(\tau,\sigma)d\tau = \int\limits_0^t h(t,t)C(t)h(t,\tau)K_y(\tau,\sigma)d\tau + \int\limits_0^t \frac{\partial h(t,\tau)}{\partial t}K_y(\tau,\sigma)d\tau,$$

или

$$\int\limits_0^t [\frac{\partial h(t,\tau)}{\partial t} - F(t)h(t,\tau) + h(t,t)C(t)h(t,\tau)]K_y(\tau,\sigma)\,d\tau = 0.$$

Так как $K_y(\tau,\sigma)$ положительно определенная матрица, то для $h(t,\tau)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial h(t,\tau)}{\partial t} = F(t)h(t,\tau) - h(t,t)C(t)h(t,\tau). \qquad (3.2.15)$$

2. Выведем дифференциальное уравнение для вектора оценки $\hat{x}(t)$. Так как $\hat{x}(t) \in L_2[0,t]$, а точнее – $C[0,t]$, то можно найти обобщенную производную процесса $\hat{x}(t)$:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = h(t,t)y(t) + \int\limits_0^t \frac{\partial h(t,\tau)}{\partial t}y(\tau)\,d\tau.$$

Используя (3.2.15) и то, что

$$\hat{x}(t) = \int\limits_0^t h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau, \qquad (3.2.16)$$

находим

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = h(t,t)y(t) + \int\limits_0^t F(t)h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^t h(t,\tau)C(\tau)h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau =$$

$$= h(t,t)y(t) + F(t)\hat{x}(t) - h(t,t)C(t)\hat{x}(t) = F(t)\hat{x}(t) + h(t,t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)),$$

то есть

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + h(t,t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)],\ \hat{x}(0) = 0. \qquad (3.2.17)$$

В уравнениях (3.2.15) и (3.2.17) неизвестной остается матрица $h(t,t)$.

3. Покажем, что $h(t,t)$ функционально связана с матрицей ошибки оценивания $P(t)$. Введем вектор ошибки оценивания

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t). \qquad (3.2.18)$$

Запишем уравнение Винера-Хопфа (3.2.11) в виде

$$M[x(t)x^m(\sigma)]C^m(\sigma) + \Phi(t,\sigma)G(\sigma)S(\sigma) = \int\limits_0^t h(t,\tau)\{M[y(\tau)x^m(\sigma)]C^m(\sigma) +$$

$$+ C(\tau)M[x(\tau)v^m(\sigma)]\}d\tau + h(t,\sigma)R(\sigma).$$

Поменяем местами операции интегрирования и математического ожидания. Тогда, используя обобщенную формулу Коши и (3.2.16), получаем, что

$$M[x(t)x^m(\sigma)]C^m(\sigma) + \Phi(t,\sigma)G(\sigma)S(\sigma) = M[\hat{x}(t)x^m(\sigma)]C^m(\sigma) +$$

$$+M\left[\int\limits_0^t h(t,\tau)C(\tau)\int\limits_0^\tau \Phi(\tau,s)G(s)M[u(s)v^m(\sigma)]\,dsd\tau\right]+h(t,\sigma)R(\sigma).$$

Перенесем первое слагаемое в правой части этого выражения влево и, используя (3.2.18), находим

$$M[\tilde{x}(t)x^m(\sigma)]C^m(\sigma)+\Phi(t,\sigma)G(\sigma)S(\sigma)=\int\limits_0^t h(t,\tau)C(\tau)\Phi(\tau,\sigma)G(\sigma)S(\sigma)\,d\tau+h(t,\sigma)R(\sigma). \tag{3.2.19}$$

Перейдем в этом соотношении к пределу при $\sigma\to t$; имеем

$$M[\tilde{x}(t)x^m(t)]C^m(t)+\Phi(t,t)G(t)S(t)=\int\limits_0^t h(t,\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t)G(t)S(t)\,d\tau+h(t,t)R(t).$$

Так как $\Phi(\tau,t)=0$ при $t>\tau$ (как переходная функция физически реализуемой системы) и $\Phi(t,t)=I_n$ — единичной матрице порядка n, то

$$M[\tilde{x}(t)x^m(t)]C^m(t)+G(t)S(t)=h(t,t)R(t). \tag{3.2.20}$$

Преобразуем ковариацию $M[\tilde{x}(t)x^m(t)]$:

$$M[\tilde{x}(t)x^m(t)]=M[\tilde{x}(t)\{x^m(t)-\hat{x}^m(t)\}]+M[\tilde{x}(t)\hat{x}^m(t)]=M[\tilde{x}(t)\tilde{x}^m(t)]+M[\tilde{x}(t)\hat{x}^m(t)]=M[\tilde{x}(t)\tilde{x}^m(t)]=P(t),$$

так как $M[\tilde{x}(t)\hat{x}^m(t)]=0$ – по лемме об ортогональном проектировании [26] (линейная оценка случайного гауссовского процесса $x(\tau,\omega)$ по критерию минимума дисперсии ошибки при заданном линейном пространстве наблюдений $Y=\{y(\tau,\omega),0\le\tau\le t,\omega\in\Omega\}$ задается ортогонольной проекцией x на Y, т.е. $M[\tilde{x}(t)\hat{x}^m(t)]=0$, $\tilde{x}(t)=x(t)-\hat{x}(t)$, $\hat{x}(t)=\int\limits_0^t h(t,\tau)y(\tau)d\tau$).

Таким образом, из (3.2.20) следует, что

$$h(t,t)=[P(t)+G(t)S(t)]R^{-1}(t). \tag{3.2.21}$$

Связь $h(t,t)$ с ковариационной матрицей вектора ошибки найдена.

4. Вычислим обобщенную производную выражения (3.2.18). Используя (3.2.7), (3.2.17), имеем

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}-\frac{d\hat{x}(t)}{dt}=[F(t)-h(t,t)C(t)]\tilde{x}(t)+G(t)u(t)-h(t,t)v(t),$$

$$\tilde{x}(0)=x(0)=x_0. \tag{3.2.22}$$

Таким образом, найдено уравнение вектора ошибки оценивания.

5. Определим уравнение для матрицы ковариации ошибки оценивания $P(t)=M[\tilde{x}(t)\tilde{x}^m(t)]$. Дифференцируем $P(t)$ по t (в обобщенном смысле):

$$\frac{dP(t)}{dt}=M\left[\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}\tilde{x}^m(t)\right]+M\left[\tilde{x}(t)\frac{d\tilde{x}^m(t)}{dt}\right]. \tag{3.2.23}$$

Рассмотрим выражение $M\left[\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}\tilde{x}^m(t)\right]$. Из (3.2.22) следует, что

$$M\left[\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}\,\tilde{x}^m(t)\right]=[F(t)-h(t,t)C(t)]P(t)+M[G(t)u(t)\tilde{x}^m(t)]-h(t,t)M[v(t)\tilde{x}^m(t)]. \tag{3.2.24}$$

Используя (3.2.18), имеем: $M[u(t)\tilde{x}^m(t)]=M[u(t)x^m(t)]-M[u(t)\hat{x}^m(t)]$. Далее:

$$M[u(t)x^m(t)]=M[u(t)x_0^m]\Phi^m(t,0)+\int\limits_0^t M[u(t)u^m(\sigma)]G^m(\sigma)\Phi^m(t,\sigma)\,d\sigma=\frac{1}{2}Q(t)G^m(t),$$

$$M[u(t)\hat{x}^m(t)] = \int\limits_0^t M[u(t)y^m(\tau)]h^m(t,\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t M[u(t)v^m(\tau)]h^m(t,\tau)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t M[u(t)x^m(\tau)]C^m(\tau)h^m(t,\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}S(t)h^m(t,t).$$

Матрица $M[u(t)x^m(\tau)] = 0$ при $t > \tau$, так как состояние системы не может зависеть от непоступившего еще на вход сигнала. Таким образом,

$$M[u(t)\tilde{x}^m(t)] = \frac{1}{2}Q(t)G^m(t) - \frac{1}{2}S(t)h^m(t,t). \tag{3.2.25}$$

Изучим выражение $M[v(t)\tilde{x}^m(t)]$. Так как $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, то

$$M[v(t)\tilde{x}^m(t)] = M[v(t)x^m(t)] - M[v(t)\hat{x}^m(t)]. \tag{3.2.26}$$

Затем, используя формулу Коши и представление оценки, а также то, что из условий физической реализуемости системы $M[v(t)x^m(\tau)] = 0$, находим

$$M[v(t)x^m(t)] = M[v(t)x_0^m]\Phi^m(t,0) + \int\limits_0^t M[v(t)u^m(\sigma)]G^m(\sigma)\Phi^m(t,\sigma)\,d\sigma = \frac{1}{2}S^m(t)G^m(t),$$

$$M[v(t)\hat{x}^m(t)] = \int\limits_0^t M[v(t)y^m(\tau)]h^m(t,\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t M[v(t)v^m(\tau)]h^m(t,\tau)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t M[v(t)x^m(\tau)]C^m(\tau)h^m(t,\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}R(t)h^m(t,t).$$

Таким образом,

$$M[v(t)\tilde{x}^m(t)] = \frac{1}{2}S^m(t)G^m(t) - \frac{1}{2}R(t)h^m(t,t). \tag{3.2.27}$$

Подставим (3.2.27) и (3.2.25) в (3.2.24), тогда

$$M[\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}\tilde{x}^m(t)] = [F(t) - h(t,t)C(t)]P(t) + G(t)[\frac{1}{2}Q(t)G^m(t) - \frac{1}{2}S(t)h^m(t,t)] - h(t,t)[\frac{1}{2}S^m(t)G^m(t) -$$

$$-\frac{1}{2}R(t)h^m(t,t)] = [F(t) - h(t,t)C(t)]P(t) + \frac{1}{2}G(t)Q(t)G^m(t) - \frac{1}{2}G(t)S(t)h^m(t,t) -$$

$$-\frac{1}{2}h(t,t)S^m(t)G^m(t) + \frac{1}{2}h(t,t)R(t)h^m(t,t). \tag{3.2.28}$$

Аналогично,

$$M[\tilde{x}(t)\frac{d\tilde{x}^m(t)}{dt}] = P(t)[F(t) - h(t,t)C(t)]^m + \frac{1}{2}G(t)Q(t)G^m(t) -$$

$$\frac{1}{2}G(t)S(t)h^m(t,t) - \frac{1}{2}h(t,t)S^m(t)G^m(t) + \frac{1}{2}h(t,t)R(t)h^m(t,t). \tag{3.2.29}$$

Суммируя (3.2.28) и(3.2.29), находим, что

$$\frac{dP(t)}{dt} = [F(t) - h(t,t)C(t)]P(t) + P(t)[F(t) - h(t,t)C(t)]^m +$$

$$+G(t)Q(t)G^m(t) - G(t)S(t)^m h(t,t) - h(t,t)S^m(t)G^m(t) + h(t,t)R(t)h^m(t,t),$$

$$P(0) = P_0, \tag{3.2.30}$$

где $h(t,t) = [P(t) + G(t)S(t)]R^{-1}(t)$.

Сформулируем алгоритм фильтрации для модели (3.2.7)-(3.2.8).

Уравнение для нахождения оценки имеет вид

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + h(t,t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)],\ \hat{x}(0) = 0,$$

где $h(t,t) = [P(t) + G(t)S(t)]R^{-1}(t)$, а матрица ковариации ошибки фильтрации $P(t)$ удовлетворяет уравнению Риккати (3.2.30).

Алгоритм вычисления обобщенной фильтрации Калмана-Бьюси (решение задачи (3.2.1) - (3.2.3)).

Уравнение для нахождения оценки имеет вид

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + G(t)m_u(t) + L(t)f(t) + K(t)[y(t) - m_v(t) - g(t) - C(t)\hat{x}(t)],$$

$$\hat{x}(0) = m_{x_0},$$

где коэффициент усиления фильтра $K(t)$ вычисляется по формуле

$$K(t) = [P(t)C^m(t) + G(t)S(t)]R^{-1}(t).$$

Матрица ковариации ошибок фильтрации $P(t)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$\frac{dP(t)}{dt} = F(t)P(t) + P(t)F^m(t) + G(t)Q(t)G^m(t) - K(t)R(t)K^m(t),$$

$$P(0) = P_0.$$

3.3 Стационарный фильтр Калмана-Бьюси

Пусть матрицы F, G и C, входящие в калмановскую постановку задачи линейной оптимальной фильтрации (3.1.1)–(3.1.3), не изменяются со временем, а случайные шумы $u(\tau)$ и $v(\tau)$ $(-\infty < \tau \le t)$ являются некоррелированными стационарными в широком смысле белыми шумами. Тогда модель динамической системы, формирующей случайный процесс $x(\tau)$, и модель наблюдения $\{y(\tau), -\infty < \tau \le t\}$ можно записать в виде:

модель сообщения –

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = Fx(\tau) + Gu(\tau), \tag{3.3.1}$$

где F и G — постоянные матрицы,

$$M[u(\tau)] = 0, M[u(\tau)u^m(\sigma)] = Q\delta(\tau - \sigma),\ \tau, \sigma \in (-\infty, t],$$

а Q — неотрицательная симметрическая числовая матрица;

модель измерений –

$$y(\tau) = Cx(\tau) + v(\tau), \tag{3.3.2}$$

где матрица C — матрица с постоянными элементами,

$$M[v(\tau)] = 0, M[v(\tau)v^m(\sigma)] = R\delta(\tau - \sigma),\ \tau, \sigma \in (-\infty, t],$$

R — положительно определенная числовая симметрическая матрица.

Равенства в (3.3.1) и (3.3.2) понимаются в обобщенном смысле. При таких предположениях $x(\tau)$ и $y(\tau)$ являются стационарными векторными случайными процессами [27,30].

Задача линейной фильтрации заключается в следующем:

по наблюдениям $\{y(\tau), -\infty < \tau \le t\}$ требуется найти линейную оценку $\hat{x}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau$ процесса $x(\tau)$ в точке $\tau = t$, удовлетворяющую критерию

$$m(t) = \inf_h \{M[(z, x(t) - \hat{x}(t))_n^2] |\, h^m(t,\tau)z \in W_2^1(-\infty, +\infty)\}, \tag{3.3.3}$$

где z — произвольный вектор из E_n. Из раздела 3.1 известно, что оценка $\hat{x}(\tau)$ является решением уравнения

$$\frac{d\hat{x}(\tau)}{d\tau} = F\hat{x}(\tau) + K[y(\tau) - C\hat{x}(\tau)],\ \hat{x}(-\infty) = 0, \tag{3.3.4}$$

где K — коэффициент усиления фильтра,

$$K = PC^m R^{-1}, \tag{3.3.5}$$

а P — ковариация ошибки оценивания.

Так как для стационарных процессов P — постоянная матрица, то $\frac{dP}{d\tau} = 0$ и дифференциальное уравнение (3.1.19) для определения ковариации ошибки вырождается и принимает вид

$$FP + PF^m + GQG^m - PC^m R^{-1} CP = 0. \tag{3.3.6}$$

Таким образом, при реализации стационарного фильтра Калмана- Бьюси необходимо решать нелинейное матричное уравнение (3.3.6). Реализация алгоритма нахождения решения нелинейного алгебраического уравнения на ЭВМ не всегда удобна. Поэтому более эффективно вместо решения (3.3.6) искать стационарное (установившееся) решение дифференциального уравнения Риккати

$$\frac{dP(\tau)}{d\tau} = FP(\tau) + P(\tau)F^m + GQG^m - P(t)C^m R^{-1} CP(t),\ P(0) = P_0, \tag{3.3.7}$$

где P_0 — произвольная симметрическая положительно определенная матрица.

Обычно уравнение (3.3.7) решают на ЭВМ до тех пор, пока $P(\tau)$ не достигнет установившегося значения. Это установившееся значение и принимается за P.

В разделах 2 и 3.3 получены два различных метода решения задачи линейной оптимальной фильтрации в стационарном случае. В разделе 2 для построения фильтра применен частотный подход, а в 3.3 – временной. Основное отличие этих двух подходов связано с заданием процесса $x(\tau)$.

В фильтрации Винера процесс $x(\tau)$ задается через спектральную плотность $K_x(\lambda)$, а в калмановской фильтрации – системой дифференциальных уравнений (3.3.1). Эти два подхода эквивалентны, так как по системе (3.3.1) можно найти спектральную плотность $K_x(\lambda)$, которая равна

$$K_x(\lambda) = (I_n\lambda - F)^{-1} GQG^m (I_n\lambda - F^m)^{-1},$$

где I_n — единичная матрица n-го порядка. А по спектральной плотности $K_x(\lambda)$, задаваемой в постановке задачи Винера, можно построить физически реализуемую динамическую систему, порождающую случайный процесс $x(\tau)$. Переходную функцию такой системы можно найти используя метод факторизации, для одномерных систем метод изложен в 2.3, а для многомерных – в [31].

Более подробное сравнение алгоритмов фильтрации Винера и Калмана проведено в [30].

Следует отметить, что фильтр Винера в отличие от фильтра Калмана применим не только в случае белого шума в наблюдениях. Это связано с тем, что при его построении используется условие физической реализуемости фильтра, а именно, факторизации матрицы спектральной плотности вектора наблюдения. Это ограничивает множество допустимых решений. Таким образом, алгоритм фильтрации Винера является "регуляризирующим" для задач линейной оптимальной фильтрации, у которых спектральная плотность измерений допускает факторизацию (2.2.5). Алгоритм Калмана таким свойством не обладает и для него является существенным требование того, чтобы шум в измерениях был белым. Но алгоритм Калмана более удобен для реализации на ЭВМ и поэтому нашел широкое применение при решении практических задач и во многих случаях вытеснил фильтр Винера.

3.4 Метод формирующего фильтра

Этот метод предложен Брайсоном и Йохансеном в 1965 году [39]. В нем сделана попытка применить фильтр Калмана-Бьюси для решения задачи линейного оценивания в случае, если шум в наблюдениях небелый.

П о с т а н о в к а   з а д а ч и. Пусть векторный случайный процесс $x(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x(\tau) + G(\tau)u(\tau),\ x(0) = x_0, \tag{3.4.1}$$

где $u(\tau)$ — белый гауссовский шум,

$$M[u(\tau)] = 0,\ M[x_0] = 0,\ M[u(\tau)u^m(\sigma)] = Q(\tau)\delta(\tau - \sigma),\ M[x_0 x_0^m] = P_0,$$

процесс $u(\tau)$ и случайный вектор x_0 некоррелированы. Производная в (3.4.1) понимается в обобщенном смысле.

Измерению доступен вектор $\{y(\tau), 0 \le \tau \le t\}$, связанный с $x(\tau)$ соотношением

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau) + w(\tau), \tag{3.4.2}$$

где $w(\tau)$ — m-мерный шум, $w(\tau)$ моделируется линейной системой, возбуждаемой белым гауссовским шумом $v(\tau)$

$$\frac{dw(\tau)}{d\tau} = N(\tau)w(\tau) + L(\tau)v(\tau),\ w(0) = w_0, \tag{3.4.3}$$

где $v(\tau)$ — некоррелирован с $u(\tau)$ и x_0,

$$M[v(\tau)] = 0, M[v(\tau)v^m(\sigma)] = R(\tau)\delta(\tau - \sigma),$$

w_0 — m-мерный гауссовский вектор, $M[w_0] = 0$, $M[w_0 w_0^m] = S_0$, матрица $R(\tau)$ положительно определена, а S_0 — неотрицательна.

Требуется найти линейную оценку $\hat{x}(\tau)$ вектора $x(\tau)$ в точке $\tau = t$, удовлетворяющую критерию минимума среднеквадратической ошибки

$$m(t) = \inf_h \{M[(z, x(t) - \hat{x}(t))_n^2] \mid \hat{x}(t) = \int\limits_0^t h(t,\tau)y(\tau)\, d\tau\}. \tag{3.4.4}$$

Брайсон и Йохансен предложили для решения поставленной задачи следующую процедуру.

Вычислим обобщенную производную процесса $y(\tau)$ и, используя выражения (3.4.1) и (3.4.3), находим

$$\frac{dy(\tau}{d\tau} = \frac{dC(\tau)}{d\tau}x(\tau) + C(\tau)F(\tau)x(\tau) + N(\tau)w(\tau) + C(\tau)G(\tau)u(\tau) + L(\tau)v(\tau).$$

Введем обозначения:

$$y_1(\tau) = \frac{dy(\tau)}{d\tau}, F(\tau) = [F(\tau)\ \ N(\tau)],\ \ C_1(\tau) = \left[\frac{dC(\tau)}{d\tau} + C(\tau)F(\tau)\ \ N(\tau)\right],$$

$$V_1(\tau) = [C(\tau)G(\tau)\ \ L(\tau)], G_1(\tau) = [G(\tau)\ \ L(\tau)],\ \ x_1(\tau) = \begin{bmatrix} x(\tau) \\ w(\tau) \end{bmatrix},\ \ u_1(\tau) = \begin{bmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{bmatrix}.$$

Тогда задачу (3.4.1)-(3.4.4) можно переписать следующим образом.

Расширенный вектор состояния $x_1(\tau)$ удовлетворяет системе

$$\begin{gathered} \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} = F_1(\tau)x_1(\tau) + G_1(\tau)u_1(\tau), \\ x_1(0) = x_{10} = \begin{bmatrix} x_0 \\ w_0 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{3.4.5}$$

Наблюдается процесс

$$y_1(\tau) = C_1(\tau)x_1(\tau) + V_1(\tau)u_1(\tau), \tag{3.4.6}$$

причем

$$M[x_{10}] = 0,\ M[u_1(\tau)] = 0,\ M[x_{10}x_{10}^m] = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix} = P_{10} \ge 0,$$

$$M[u_1(\tau)u_1^m(\sigma)] = \begin{bmatrix} Q(\tau) & 0 \\ 0 & R(\tau) \end{bmatrix} \delta(\tau - \sigma),\ \begin{bmatrix} Q(\tau) & 0 \\ 0 & R(\tau) \end{bmatrix} > 0.$$

Требуется найти линейную оценку $\hat{x}_1(\tau)$ вектора $x_1(\tau)$ в точке $\tau = t$, минимизирующую среднеквадратическую ошибку.

Задача (3.4.5)-(3.4.6) является задачей линейной оптимальной фильтрации с коррелированными белыми шумами в измерениях и системе, алгоритм решения которой дан в разделе 3.2.

Недостатком приведенного метода является то, что обычно неизвестна система, моделирующая шум $w(\tau)$. А способ построения формирующего фильтра (3.4.3) для процесса $w(\tau)$ разработан только, если шум в измерениях – гауссовский стационарный случайный процесс со спектральной плотностью, допускающей факторизацию (2.2.5) [27,26].

Кроме того, операция дифференцирования измерений – экспериментально полученных данных, как известно, некорректна [33,25] и нахождение процесса $y_1(\tau)$ затруднено.

3.5 Метод О'Рейли-Ньюманна

Данный алгоритм разработан в 1975 году О'Рейли и Ньюманном [42] для случая, когда шум в наблюдениях является вырожденным белым гауссовским шумом (определение 1.20, см.стр. 21).

1. П о с т а н о в к а з а д а ч и. Пусть n –мерный случайный векторный процесс $x(\tau) = x(\tau, \omega)$, $\tau \in [0, t]$, $\omega \in \Omega$ генерируется путем пропускания p –мерного гауссовского шума $u(\tau)$ через линейную детерминированную систему

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x(\tau) + G(\tau)u(\tau), \quad x(0) = x_0; \tag{3.5.1}$$

наблюдается случайный векторный процесс размерности m ($m \leq n$)

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau) + w(\tau), \tag{3.5.2}$$

где $F(\tau)$, $G(\tau)$ и $C(\tau)$ — матрицы соответствующей размерности, причем элементы матриц $G(\tau)$ и $C(\tau)$ — гладкие функции, а $F(\tau)$ — кусочно-непрерывные. Решение задачи Коши (3.5.1) понимается в смысле определения 1.6. Реализации шума $w(\tau)$ принадлежат с вероятностью единица негативному пространству $W_2^{-1}[0, t]$, а шум $w(\tau)$ может быть представлен в виде

$$w(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ v(\tau) \end{bmatrix}, \tag{3.5.3}$$

где $v(\tau)$ — белый q –мерный гауссовский шум $q < m$.

Задача линейной оптимальной фильтрации заключается в следующем: требуется по наблюдениям $\{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$ найти линейную оценку $\hat{x}(\tau)$ вектора $x(\tau)$ в точке $\tau = t$, удовлетворяющую критерию

$$m(t) = \inf_h \{M[(z, x(\tau) - \hat{x}(\tau))_n^2] \,|\, \hat{x}(\tau) = \int_0^t h(t, \tau)y(\tau)\, d\tau\}. \tag{3.5.4}$$

Нижняя грань берется по всем допустимым матрицам $h(t, \tau)$, то есть таким, для которых интеграл в (3.5.4) имеет смысл, z — произвольный вектор из E_n. Известны также статистики случайных процессов $u(\tau)$, $w(\tau)$ и случайного вектора x_0.

2.Покажем, что к шуму $w(\tau)$ вида (3.5.3) сводится любой вырожденный белый гауссовский шум.

Действительно, пусть наблюдается m –мерный случайный процесс

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau) + w_1(\tau), \tag{3.5.5}$$

где $w_1(\tau)$ — m –мерный вырожденный белый шум с нулевым средним и ковариационной матрицей $M[w_1(\tau)w_1^m(\sigma)] = R_1(\tau)\delta(\tau - \sigma)$, причем ранг матрицы интенсивности шума равен q, $q < m$.

Для матрицы $R_1(\tau)$, вследствие ее симметричности и неотрицательности, существует ортогональная m –мерная матрица $T(\tau)$ [1] такая, что

$$R_1(\tau) = T(\tau) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} T^m(\tau).$$

Отметим, что у матрицы $T^m(\tau)R_1(\tau)T(\tau)$ на главной диагонали стоят лишь q положительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$.

Введем матрицу $H(\tau)$ размерности $m \times q$

$$H(\tau) = T(\tau) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_q \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

ранг матрицы $H(\tau)$ равен q ($\mathrm{Rang}\, H(\tau) = q$). Тогда $R_1(\tau) = H(\tau)H^m(\tau)$ и $y(\tau) = C(\tau)x(\tau)+H(\tau)v_1(\tau)$, где $v_1(\tau)$ — q-мерный белый гауссовский шум с нулевым средним и ковариацией $M[v_1(\tau)v_1^m(\sigma)] = I_q\delta(\tau-\sigma)$, I_q — единичная матрица порядка q.

Приведем некоторые свойства матрицы $H(\tau)$.

1. Обозначим через $N(H) = \{x \mid Hx = 0, x \in E_q\}$ ядро матрицы $H(\tau)$. Множество $N(H)$ содержит лишь нулевой вектор. Это следует из того, что уравнение $Hx = 0$ имеет единственное решение в E_q, так как $\mathrm{Rang}\, H(\tau)$ равен размерности вектора x.

2.Матрица $H^m(\tau)H(\tau)$ — невырожденная.
Действительно, если $H(\tau)x = 0$, то $H^m(\tau)H(\tau)x = 0$ и $N(H) \subset N(H^mH)$. С другой стороны, если $H^m(\tau)H(\tau)x = 0$, то

$$x^mH^m(\tau)H(\tau)x = (Hx, Hx)_q = ||Hx||_q^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $N(H^mH) \subset N(H)$. Таким образом,

$$N(H^mH) = 0,\ \mathrm{Rang}\, H = \mathrm{Rang}(H^mH) = q.$$

3. Матрица H^mH — симметрическая порядка q.
Найдем симметрические элементы $\tilde{h}_{ij}$ и $\tilde{h}_{ji}$ произведения матриц H^m и H:

$$\tilde{h}_{ij} = \sum_{k=1}^{m} h_{ki}h_{kj} = \sum_{k=1}^{m} h_{kj}h_{ki},$$

где h_{ki} — элемент матрицы $H(\tau)$. В дальнейшем будет использовано следующее понятие псевдообратной матрицы (в смысле Мура-Пенроуза [1]).

Определение 3.1 *Матрица H^+ называется псевдообратной матрицей к H, если*

$$1.\quad HH^+ = H^+H,$$

$$2.\quad HH^+H = H,$$

$$3.\quad H^+HH^+ = H^+.$$

Справедлива

Теорема 3.5 *Для всякой матрицы H размера $n \times m$ матрица*

$$H^+ = \lim_{\alpha\to 0}\{(H^mH + \alpha^2 I_m)^{-1}H^m\} = \lim_{\alpha\to 0}\{H^m(HH^m + \alpha^2 I_m)^{-1}\}$$

существует. Для любого n-мерного вектора z элемент $x = H^+z$ является вектором с минимальной нормой среди всех векторов, минимизирующих функционал $||z - Hx||_n^2$.

Доказательство теоремы можно найти в [1].

Введем матрицу $H_1(\tau) = [H^m(\tau)H(\tau)]^{-1/2}H^m(\tau)$. Эта матрица имеет q линейно независимых строк. Определим матрицу H_1^+. Согласно теореме 3.5

$$H_1^+(\tau) = \lim_{\alpha\to 0} H_1^m(\tau)[H_1(\tau)H_1^m(\tau) + \alpha^2 I_q]^{-1} = H_1^m(\tau)[H_1(\tau)H_1^m(\tau)]^{-1},$$

так как $H_1(\tau)H_1^m(\tau)$ — невырожденная матрица. Подставим в это выражение значение матрицы $H_1(\tau)$. Тогда

$$H_1^+(\tau) = \{[H^m(\tau)H(\tau)]^{-1/2}H^m(\tau)\}^m \Big\{[H^m(\tau)H(\tau)]^{-1/2}H^m(\tau) \times$$

$$\times H(\tau)\ ([H^m(\tau)H(\tau)]^m)^{-1/2}\Big\}^{-1} = \{[H^m(\tau)H(\tau)]^{-1/2}H^m(\tau)\}^m = H_1^m(\tau).$$

Аналогично, для матрицы $H(\tau)$ находим, что

$$H^+(\tau) = [H^m(\tau)H(\tau)]^{-1}H^m(\tau).$$

Рассмотрим матрицу $H(\tau)H^+(\tau)$.

Определение 3.2 *Матрица A называется идемпотентной, если справедливо соотношение $A^2 = A$.*

Матрица $H(\tau)H^+(\tau)$ - идемпотентная, так как

$$[H(\tau)H^+(\tau)]^2 = H(\tau)[H^m(\tau)H(\tau)]^{-1}H^m(\tau)H(\tau)[H^m(\tau)H(\tau)]^{-1}H^m(\tau) =$$

$$= H(\tau)[H^m(\tau)H(\tau)]^{-1}H^m(\tau) = H(\tau)H^+(\tau).$$

Матрица $I_m - H(\tau)H^+(\tau)$ также идемпотентная:

$$(I_m - H(\tau)H^+(\tau))^2 = I_m - H(\tau)H^+(\tau) - H(\tau)H^+(\tau) + H(\tau)H^+(\tau)H(\tau)H^+(\tau) =$$

$$= I_m - H(\tau)[H(\tau)H^m(\tau)]^{-1}H^m(\tau) - H(\tau)[H(\tau)H^m(\tau)]^{-1}H^m(\tau) +$$
$$+ H(\tau)[H(\tau)H^m(\tau)]^{-1}H^m(\tau)H(\tau)[H(\tau)H^m(\tau)]^{-1}H^m(\tau) =$$
$$= I_m - H(\tau)[H(\tau)H^m(\tau)]^{-1}H^m(\tau) = I_m - H(\tau)H^+(\tau).$$

Собственные значения идемпотентной матрицы равны 1 или 0.

Действительно. Пусть x собственный вектор, соответствующий собственному значению λ, т.е. $Ax = \lambda x$, и A идемпотентная матрица, $A^2 = A$. Тогда верна цепочка равенств

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x.$$

Таким образом, x — собственный вектор матрицы A^2, соответствующий собственному значению, равному λ^2. Но $A^2 = A$, следовательно $A^2x = Ax = \lambda x$ и $\lambda^2 = \lambda$, что возможно лишь при $\lambda = 1$ или $\lambda = 0$. Отсюда следует, что ранг идемпотентной матрицы равен ее следу: $\mathrm{Rang}\, A = \mathrm{Trance}\, A$ (след матрицы – сумма ее диагональных элементов, $\mathrm{Trance}\, A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$, λ_i — собственное значение матрицы A, a_{ii} — диагональные элементы этой матрицы).

Используя идемпотентность матриц $I_m - H(\tau)H^+(\tau)$, $H(\tau)H^+(\tau)$, имеем

$$\mathrm{Rang}\,[I_m - H(\tau)H^+(\tau)] = \mathrm{Trance}\,[I_m - H(\tau)H^+(\tau)] =$$

$$= m - \mathrm{Trance}\, H(\tau)H^+(\tau) = m - \mathrm{Rang}\, H(\tau)H^+(\tau) = m - q.$$

Таким образом, матрица $I_m - H(\tau)H^+(\tau)$ содержит $m - q$ линейно независимых строк. Составим из этих строк матрицу $H_2(\tau)$ размерности $(m-q)\times n$. Отметим также, что строки матрицы $I_m - H(\tau)H^+(\tau)$ ортогональны столбцам матрицы $H(\tau)$, то есть

$$[I_m - H(\tau)H^+(\tau)]H(\tau) = H(\tau) - H(\tau)H^+(\tau)H(\tau) = H(\tau) - H(\tau) = 0.$$

Матрица $H_2(\tau)$ образована из строк матрицы $I_m - H(\tau)H^+(\tau)$, а следовательно, $H_2(\tau)H(\tau) = 0$ и $H_2(\tau)H_1^m(\tau) = 0$, так как

$$H_2(\tau)H_1^m(\tau) = H_2(\tau)H(\tau)\{[H^m(\tau)H(\tau)]^{-1/2}\}^m.$$

Из равенства $H_2(\tau)H_1^m(\tau) = 0$ вытекает, что строки матриц $H_2(\tau)$ и $H_1(\tau)$ линейно независимы. Поэтому матрица $\begin{bmatrix} H_1(\tau) \\ H_2(\tau) \end{bmatrix}$ размерности $m \times m$ невырожденная и можно ввести линейное невырожденное преобразование

$$\begin{bmatrix} y_1(\tau) \\ y_2(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(\tau) \\ H_2(\tau) \end{bmatrix} y(\tau).$$

Применяя это преобразование к наблюдениям (3.5.5), получаем

$$\begin{aligned} y_1(\tau) &= H_1(\tau)C(\tau)x(\tau) + s(\tau), \\ y_2(\tau) &= H_2(\tau)C(\tau)x(\tau), \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

где $s(\tau) = H_1(\tau)H(\tau)v_1(\tau) = [H^m(\tau)H(\tau)]^{1/2}v_1(\tau)$ — невырожденный q-мерный белый гауссовский шум с нулевым средним и ковариационной матрицей $M[s(\tau)s^m(\sigma)] = H^m(\tau)H(\tau)\delta(\tau - \sigma)$.

Итак, мы получили, что закон наблюдения (3.5.5) эквивалентен наблюдениям (3.5.6) с шумом вида (3.5.1). Поэтому ограничимся далее шумом вида (3.5.3). Такой шум допускает следующую интерпретацию : если наблюдения производятся неравноточно, то те из них, погрешность которых наименьшая, приближенно можно считать точными. Это соответствует первым $m-q$ координатам шума (3.5.3). Остальные измеряемые параметры считаем подверженными воздействию шума с невырожденной матрицей интенсивности. Отметим, что при $q=m$ мы получаем задачу фильтрации Калмана- Бьюси.

3. Преобразуем наблюдения (3.5.2) с шумом вида (3.5.3) к каноническому виду:

$$\begin{gathered} y_1(\tau)=x_1(\tau), \\ y_2(\tau)=C_1(\tau)x_1(\tau)+C_2(\tau)x_2(\tau)+v_2(\tau). \end{gathered} \tag{3.5.7}$$

Пусть матрица $C(\tau)$ имеет ранг m . Тогда ее можно представить следующим образом:

$$C(\tau)=[A(\tau) \quad B(\tau)],$$

где матрица $A(\tau)$ имеет ограниченную обратную матрицу $A^{-1}(\tau)$.

Введем невырожденное преобразование

$$S(\tau)=\left[\begin{array}{cc} A^{-1}(\tau) & -A^{-1}(\tau)B(\tau) \\ 0 & I_{n-m} \end{array}\right], \tag{3.5.8}$$

где I_{n-m} — единичная матрица порядка $(n-m)$. Тогда справедливы равенства

$$y(\tau)=[A(\tau) \ \ B(\tau)]x(\tau)+w(\tau)=[A(\tau) \ \ B(\tau)]S(\tau)S^{-1}(\tau)x(\tau)+w(\tau)=[I_{n-m} \ \ 0]S^{-1}(\tau)x(\tau)+w(\tau).$$

Обозначим $x(\tau)=S(\tau)\xi(\tau)$. Вектор-функция $\xi(\tau)$ является решением уравнения

$$\begin{gathered} \frac{d\xi(\tau)}{d\tau}=S^{-1}(\tau)[F(\tau)S(\tau)-\frac{dS(\tau)}{d\tau}]\xi(\tau)+S^{-1}(\tau)G(\tau)u(\tau), \\ \xi(0)=S^{-1}(0)x_0=\xi_0; \end{gathered} \tag{3.5.9}$$

производная от $S(\tau)$ существует, так как по условию элементы матрицы наблюдения $C(\tau)$ — гладкие функции.

Вектор наблюдения $y(\tau)$ связан с процессом $\xi(\tau)$ соотношением

$$y(\tau)=[I_m \quad 0]\xi(\tau)+w(\tau).$$

Разложим вектор $\xi(\tau)$ на две составляющие

$$\xi(\tau)=\left[\begin{array}{c} \xi_1(\tau) \\ \xi_2(\tau) \end{array}\right], \tag{3.5.10}$$

процесс $\xi_1(\tau)$ имеет размерность $m-q$, а $\xi_2(\tau)$ - $(n-m+q)$.

Таким образом, с помощью преобразования (3.5.9) и представления (3.5.10) наблюдения $y(\tau)$ приводятся к каноническому виду (3.5.7) относительно векторов $\xi_1(\tau)$ и $\xi_2(\tau)$:

$$\begin{gathered} y_1(\tau)=\xi_1(\tau), \\ y_2(\tau)=L\xi_2(\tau)+v(\tau), \end{gathered} \tag{3.5.11}$$

где $L=[I_q \ \ 0]$ - матрица размерности $q\times(n-m+q)$.

Задачу фильтрации можно сформулировать теперь относительно вектора $\xi(\tau)$, который формируется системой (3.5.9), когда измерения имеют вид (3.5.11). Оценка $\hat{x}(\tau)$ вектора $x(\tau)$ связана с оценкой $\hat{\xi}(\tau)$ вектора $\xi(\tau)$ соотношением $\hat{x}(\tau)=S(\tau)\hat{\xi}(\tau)$.

4. Найдем уравнение Винера-Хопфа и исследуем свойства матрицы $h(t,\tau)$, удовлетворяющей критерию (3.5.4).

Для упрощения выкладок считаем, что процессы $u(\tau)$ и $v(\tau)$ имеют нулевые средние, некоррелированы, переменные τ и σ принадлежат отрезку $[0,t], t<\infty$, $M[u(\tau)u^m(\sigma)]=Q(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $Q(\tau)$ — симметрическая, неотрицательная матрица с гладкими элементами, $M[v(\tau)v^m(\sigma)] = \ = R(\tau)\delta(\tau-\sigma)$,

$R(\tau)$ — симметрическая, положительно определенная q–мерная матрица с гладкими элементами. Вектор x_0 имеет нулевое среднее, некоррелирован с процессами $u(\tau)$ и $v(\tau)$, $M[x_0 x_0^m] = P_0$, P_0 — симметрическая, неотрицательная матрица.

Нахождение оптимальной линейной оценки в смысле минимума среднеквадратической ошибки, как уже отмечалось в разделе 1.2, эквивалентно решению уравнения Винера-Хопфа (1.2.13) или (1.2.14). С учетом условий рассматриваемой здесь задачи, а именно того, что шум в наблюдениях имеет вид (3.5.3), интегральное уравнение (1.2.14) запишется в виде

$$K_x(t,\sigma)C^m(\sigma) = \int_0^t h(t,\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\,d\tau + h(t,\sigma)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\sigma)\end{bmatrix}, \tag{3.5.12}$$

где матрица $K_x(\tau,\sigma)$ определяется выражением (см. стр. 30)

$$K_x(\tau,\sigma) = \Phi(\tau,0)P_0\Phi^m(\sigma,0) + \int_0^{\min(\tau,\sigma)} \Phi(\tau,s)G(s)Q(s)G^m(s)\Phi^m(\sigma,s)\,ds. \tag{3.5.13}$$

Фундаментальная матрица $\Phi(\tau,\sigma), 0 \le \tau,\sigma \le t$ решений системы (3.5.1) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Phi(\tau,\sigma)}{d\tau} = F(\tau)\Phi(\tau,\sigma), \Phi(\sigma,\sigma) = I_n.$$

Благодаря гладкости элементов матриц G, Q и кусочная непрерывность элементов матрицы F из (3.5.13) следует непрерывность элементов матрицы $K_x(\tau,\sigma)$ и существование, по крайней мере, одной ограниченной производной по обоим аргументам.

Обозначим: $u(\tau) \equiv h^m(t,\tau)z$, $f(\sigma) \equiv K_x^m(t,\sigma)z$, где z — произвольный фиксированный вектор из E_n; $\mathcal{C}u \equiv C^m(\tau)u$, $\mathcal{C}$ — оператор, ставящий в соответствие элементу некоторого m–мерногоного пространства элемент n–мерного пространства такого же типа, например, если $u \in L_2^m[0,t]$, то $\mathcal{C} : L_2^m[0,t] \to L_2^n[0,t]$, где $L_2^k[0,t]$ — k–мерное пространство интегрируемых с квадратом в смысле Лебега вектор-функций определенных на $[0,t]$, $k \in \{m,n\}$; $\mathcal{C}^*$ — сопряженный к $\mathcal{C}$ оператор и для приведенного выше примера: $\mathcal{C}^* : L_2^n[0,t] \to L_2^m[0,t]$;

$$\mathcal{A}v \equiv \int_0^t K_x^m(\tau,\sigma)v(\tau)\,d\tau,\ \forall v \in L_2^n[0,t];\ \mathcal{C}^*\mathcal{A}\mathcal{C}u = \int_0^t C(\sigma)K_x^m(\tau,\sigma)C^m(\tau)u(\tau)\,d\tau;$$

$$\mathcal{I}_q u \equiv \begin{bmatrix} 0 & I_q \end{bmatrix} u;\ \mathcal{R}_m u = \mathcal{I}_q^*\mathcal{R}\mathcal{I}_q u \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} 0 & I_q \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} u;$$

$$\mathcal{B}u \equiv \int_0^t \{M[y(\tau)y^m(\sigma)]\}^m u(\tau)\,d\tau = \int_0^t C(\sigma)K_x^m(\tau,\sigma)C^m(\tau)u(\tau)\,d\tau + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\sigma)\end{bmatrix} u(\sigma),$$

$$\mathcal{B}u = \mathcal{C}^*\mathcal{A}\mathcal{C}u + \mathcal{I}_q^*\mathcal{R}\mathcal{I}_q u;\ R_m \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\sigma)\end{bmatrix};\ J_m \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}.$$

Лемма 3.1 *Справедливо неравенство*

$$\langle u, \mathcal{B}u \rangle \le c_1\{\|\mathcal{C}^m u\|_{-10}^2 + \|\mathcal{I}_q u\|_0^2\}, \tag{3.5.14}$$

где c_1 — положительная константа.

Неравенство (3.5.14) можно записать также в виде:

$$\langle h^m(t)z, \mathcal{B}h^m(t)z \rangle \le c_1\{\|C^m h^m(t)z\|_{-10}^2 + \|J_m h^m(t)z\|_0^2\},$$

где $h^m(t)z = h^m(t,\tau)z = u(\tau)$. Такое представление неравенства будет иногда применяться в дальнейшем.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (3.5.13) и введенные выше обозначения, получаем

$$\langle u, \mathcal{B}u\rangle == \int\limits_0^t z^m h(\tau,\sigma)\int\limits_0^t C(\sigma)\int\limits_0^{\min\{\tau,\sigma\}}\Phi(\sigma,s)G(s)Q(s)G^m(s)\Phi^m(\tau,s)C^m(\tau)\times$$

$$\times h^m(t,\tau)z\,ds\,d\tau\,d\sigma+\int\limits_0^t z^m h(t,\sigma)\int\limits_0^t C(\sigma)\Phi(\sigma,0)P_0\Phi^m(\tau,0)C^m(\tau)h^m(t,\tau)z\,d\tau\,d\sigma+$$

$$+\int\limits_0^t z^m h(t,\sigma)R_m h^m(t,\sigma)z\,d\sigma = k_1+k_2+k_3. \tag{3.5.15}$$

Оценим первое слагаемое в (3.5.15) . Пусть

$$\hat{\Phi}(\sigma,s)=\begin{cases} 0, & s>\sigma,\\ \Phi(\sigma,s), & s\le\sigma.\end{cases}$$

Тогда справедлива следующая цепочка соотношений

$$k_1=\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^t z^m h(t,\sigma)C(\sigma)\left(\int\limits_0^{\min\{\tau,\sigma\}}\Phi(\sigma,s)G(s)Q(s)G^m(s)\Phi^m(\tau,s)\,ds\right)\ C^m(\tau)h^m(t,\tau)zd\tau\right]ds=$$

$$=\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^t z^m h(t,\sigma)C(\sigma)\left(\int\limits_0^{\min\{\tau,\sigma\}}\hat{\Phi}(\sigma,s)G(s)Q(s)\ \ G^m(s)\hat{\Phi}^m(\tau,s)\,ds\right)C^m(\tau)h^m(t,\tau)z\,d\tau\right]d\sigma=$$

$$=\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^t z^m h(t,\sigma)C(\sigma)\hat{\Phi}(\sigma,s)d\sigma\right]G(s)Q(s)G^m(s)\left[\int\limits_0^t\hat{\Phi}^m(\tau,s)C^m(\tau)h^m(t,\tau)z\,d\tau\right]ds\le$$

$$\le c_2\int\limits_0^t\left(\left\|\int\limits_0^t\hat{\Phi}^m(\tau,s)C^m(\tau)h^m(t,\tau)z\,d\tau\right\|_n^2\right)ds, \tag{3.5.16}$$

где $c_2=\max\{|G(\tau)Q(\tau)G^m(\tau)|,\ 0\le\tau\le t\}$, $|\,.\,|$ — матричная норма в E_n , z — произвольный вектор из E_n.

Так как $\Phi(\tau,\sigma)$ — фундаментальная матрица системы (3.5.1), то из свойств $\Phi(\tau,\sigma)$ следует, что $\Phi^m(\tau,\sigma)$ — фундаментальная матрица сопряженной системы

$$l^*\equiv-\frac{dx^*(\sigma)}{d\sigma}-F^m(\sigma)x^*(\sigma)=C^m(\sigma)h^m(t,\sigma)z \tag{3.5.17}$$

и при условии $x^*(t)=0$ решение (3.5.17) задается формулой

$$x^*(t)=\int\limits_0^t\Phi^m(s,\sigma)C^m(s)h^m(t,s)z\,ds.$$

Оператор $l^*(x^*)$ гомеоморфно отображает $L_2[0,t]$ на $W_{20}^{-1}[0,t]$ (см. подробней в [25] стр. 38). Поэтому

$$c_2\int\limits_0^t\left(\|\int\limits_0^t\hat{\Phi}^m(\tau,s)C^m(\tau)h^m(t,\tau)z\,d\tau\|_n^2\right)ds\le c_3\|C^m h^m(t)z\|_{-10}^2=c_3\|\mathcal{C}u\|_{-10}^2, \tag{3.5.18}$$

где c_3 — некоторая положительная константа.

Рассмотрим второе слагаемое в (3.5.15). Имеем:

$$k_2 = \int\limits_0^t z^m h(t,\sigma) \int\limits_0^t C(\sigma)\Phi(\sigma,0)P_0\Phi^m(\tau,0)C^m(\tau)h^m(t,\tau)z\, d\tau d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^t z^m h(t,\sigma)C(\sigma)\Phi(\sigma,0)\, d\sigma P_0 \int\limits_0^t \Phi^m(\tau,0)C^m(\tau)h^m(t,\tau)z\, d\tau \le$$

$$\le c_4\|P_0\|\,\|\Phi(\sigma,0)\|^2\,\|C^m h^m(t)z\|^2_{-10} \le c_5\|C^m h^m(t)z\|^2_{-10} = c_5\|\mathcal{C}u\|^2_{-10}. \qquad (3.5.19)$$

Здесь применено обобщенное неравенство Коши-Буняковского (Шварца)[25]: для $\forall u \in W_2^{-1}[0,t]$ и $\forall v \in W_2^1[0,t]$ $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|_{-1}\|v\|_1$, а $\|\,.\,\|$ - операторная норма, c_4 и c_5 — положительные константы.

Для третьего слагаемого справедливо

$$k_3 = \int\limits_0^t z^m h(t,\sigma)R_m h^m(t,\sigma)z\, d\sigma = (u, \mathcal{I}_q^* \mathcal{R}\mathcal{I}_q u)_0 = (\mathcal{I}_q u, \mathcal{R}\mathcal{I}_q u)_0 =$$

$$= \int\limits_0^t z^m h(t,\sigma) \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix} R(\sigma) \begin{bmatrix} 0 & I_q \end{bmatrix} h^m(t,\sigma)z\, d\sigma \le c_6\|J_m h^m(t,\sigma)z\|_0^2 = c_6\|\mathcal{I}_q u\|_0^2. \qquad (3.5.20)$$

Обозначая через $c_1 = \max\{2c_3, 2c_5, c_6\}$, получаем требуемое неравенство.

Лемма 3.2 *Если матрицы $G(\tau)Q(\tau)G^m(\tau)$, $R(\tau)$ и P_0 положительно определены, то есть для любого вектора $\varphi \in L_2[0,t]$ выполняются соотношения $(\varphi, GQG^m\varphi)_0 \ge c_q\|\varphi\|_0^2$, $(J_m\varphi, RJ_m\varphi)_0 \ge c_r\|J_m\varphi\|_0^2$ и для $\forall z \in E_n$ скалярное произведение $(z, P_0 z)_n \ge c_p\|z\|_n^2$, где c_q, c_r, c_p - положительные константы, то справедливо неравенство*

$$c_0\{\,\|C^m h^m(t)z\,\|^2_{-10} + \|\,J_m h^m(t)z\,\|_0^2\,\} \le \langle h^m(t)z, \mathcal{B}(h^m(t))z\rangle,\ c_0 = const,\ c_0 > 0,$$

или, используя выше приведенные обозначения,

$$c_0\{\,\|\mathcal{C}u\|^2_{-10} + \|\mathcal{I}_q u\|_0^2\,\} \le \langle u, \mathcal{B}u\rangle.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим снизу все три слагаемых в (3.5.15). Используя положительную определенность матрицы $G(\tau)Q(\tau)G^m(\tau)$ из (3.5.16), находим

$$k_1 = \int\limits_0^t \left[\int\limits_0^t z^m h(t,\sigma)C(\sigma)\hat{\Phi}(\sigma,s)\, d\sigma\right] G(s)Q(s)G^m(s) \left[\int\limits_0^t \hat{\Phi}^m(\tau,s)C^m(\tau)h^m(t,\tau)z\, d\tau\right] ds \ge$$

$$\ge c_q\Big\|\int\limits_0^t \hat{\Phi}^m(\tau,s)C^m(\tau)h^m(t,\tau)z\, d\tau\Big\|_0^2 = c_q\Big\|\int\limits_s^t \Phi^m(\tau,s)C^m(\tau)h^m(t,\tau)z\, d\tau\Big\|_0^2.$$

Отметим, что формула Коши для уравнения

$$l^*(x) \equiv -\frac{dx(\tau)}{d\tau} - F^m(\tau)x(\tau) = v(\tau), \quad x(t) = x_t, \quad v(\tau) \in L_2[t_0,t],$$

которое при $x_t = 0$ является сопряженным к (3.5.1), имеет вид:

$$x(\tau) = \Phi^m(t,\tau)x_t + \int\limits_\tau^t \Phi^m(s,\tau)v(s)\, ds,$$

или с учетом того, что $x_t = 0$, получаем

$$x(\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} \Phi^m(s,\tau) v(s)\, ds$$

и справедливо неравенство (1.1.5). Таким образом, если вектор $v(\tau) = \ = C^m(\tau) h^m(t,\tau) z$, то

$$k_1 \geq c_q \Big\| \int\limits_{s}^{t} \Phi^m(\tau,s) C^m(\tau) h^m(t,\tau) z\, d\tau \Big\|_0^2 \geq c_q {c'}_1^2 \|C^m h^m(t) z\|_{-10}^2 = {c'}_q \|\mathcal{C} u\|_{-10}^2,$$

где ${c'}_q = c_q {c'}_1^2$.

Из выражения (3.5.19) и положительной определенности матрицы P_0 следует, что

$$k_2 = \int\limits_0^t z^m h(t,\sigma) C(\sigma) \Phi(\sigma,0)\, d\sigma P_0 \int\limits_0^t \Phi^m(\tau,0) C^m(\tau) h^m(t,\tau) z\, d\tau \geq c_p \Big\| \int\limits_0^t \Phi^m(\tau,0) C^m(\tau) h^m(t,\tau) z\, d\tau \Big\|_n^2.$$

А так как $v(\tau) = C^m(\tau) h^m(t,\tau) z$ и по формуле Коши для сопряженного уравнения

$$x(0) = \int\limits_0^t \Phi^m(s,0) C^m(s) h^m(t,s) z\, ds,$$

то, используя левую часть неравенства (1.1.5), находим, что

$$k_2 \geq c_p \Big\| \int\limits_0^t \Phi^m(\tau,0) C^m(\tau) h^m(t,\tau) z\, d\tau \Big\|_n^2 \geq c_p {c'}_1^2 \|C^m h^m(t) z\|_{-10}^2 = {c'}_p \|\mathcal{C} u\|_{-10}^2,$$

где ${c'}_p = c_p {c'}_1^2$.

Из положительной определенности матрицы $R(\tau)$ и выше полученных неравенств для k_1 и k_2 следует, что

$$\langle u, \mathcal{B} u\rangle \geq {c'}_q \|\mathcal{C} u\|_{-10}^2 + {c'}_p \|\mathcal{C} u\|_{-10}^2 + c_r \|\mathcal{I}_q u\|_0^2 \geq c_0 \{\|\mathcal{C} u\|_{-10}^2 + \|\mathcal{I}_q u\|_0^2\},$$

где постоянная $c_0 = \min\{{c'}_q, {c'}_p, c_r\}$.

Леммы 3.1 и 3.2 показывают, что при выполнении условий леммы 3.2 справедлива цепочка неравенств:

$$c_0 \{\|\mathcal{C} u\|_{-10}^2 + \|\mathcal{I}_q u\|_0^2\} \leq \langle u, \mathcal{B} u\rangle \leq c_1 \{\|\mathcal{C} u\|_{-10}^2 + \|\mathcal{I}_q u\|_0^2\},$$

$$c_0 \{\|C^m h^m(t) z\|_{-10}^2 + \|J_m h^m(t) z\|_0^2\} \leq \langle C^m h^m(t) z, \mathcal{B} C^m h^m(t) z\rangle \leq c_1 \{\|C^m h^m(t) z\|_{-10}^2 + \|J_m h^m(t) z\|_0^2\}.$$

Таким образом, с помощью билинейной формы $\langle u, \mathcal{B} u\rangle$ в негативном пространстве $W_{20}^{-1}[0,t]$ можно ввести норму:

$$\|u\|_H^2 \equiv \langle u, \mathcal{B} u\rangle; \quad \|u\|_H^2 \sim \|\mathcal{C} u\|_{-10}^2 + \|\mathcal{I}_q u\|_0^2.$$

Через $H[0,t]$ обозначено пространство с нормой $\|\ .\ \|_H$. Пространство $H[0,t]$ банахово, так как $W_{20}^{-1}[0,t]$ и $L_2[0,t]$ - гильбертовы пространства.

Лемма 3.3 *Справедливо соотношение*

$$\left\| \frac{h_n^m(t) - h_m^m(t)}{2} z \right\|_H^2 = \frac{1}{2} g(h_n) + \frac{1}{2} g(h_m) - g\left(\frac{h_n + h_m}{2}\right),$$

где

$$g(h) = m(t) = \inf_h \{M\big[\big(z, x(t) - \int\limits_0^t h(t,\tau) y(\tau)\, d\tau\big)_n^2\big] \mid h^m(t,\tau) z \in W_2^1[0,t]\}.$$

Правильность утверждения леммы легко проверить непосредственно подстановкой, если представить функционал $g(h)$ в виде:

$$g(h) = M[(z, x(\tau))_n^2 - 2\int\limits_0^t z^m M[x(t)y^m(\tau)]h^m(t,\tau)z\,d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^t z^m h(t,\tau)M[y(\tau)y^m(\sigma)]h^m(t,\sigma)z\,d\tau\,d\sigma,$$

или

$$g(u) = k_0 - 2\langle \mathcal{C}f, u\rangle + \langle u, \mathcal{B}u\rangle,$$

где $k_0 = z^m M[x(t)x^m(t)]z$.

Теорема 3.6 *Если матрицы $G(\tau)Q(\tau)G^m(\tau)$, $R(\tau)$ и P_0 положительно определены, то решение уравнения Винера-Хопфа существует и единственно в классе функций из $H[0,t]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению нижней грани, для любого натурального n найдется такое $h_n(t,\tau)$, что

$$0 \le a \le g(h_n) \le a + \frac{1}{n}, \quad a = \inf_h\{g(h) \mid h^m(t,\tau)z \in H[0,t]\}.$$

Используя неравенство леммы 3.3, для элементов $h_n(t,\tau)$ и $h_m(t,\tau)$ из области определения $g(h)$ имеем

$$||h_n^m(t)z - h_m^m(t)z||_H^2 \le 2(a+\frac{1}{n}) + 2(a+\frac{1}{m}) - 4a = \frac{2}{n} + \frac{2}{m} \to 0,\ n,m\to\infty.$$

Таким образом, последовательность $\{h_n^m(t,\tau)z\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в пространстве $H[0,t]$ и, в силу полноты $H[0,t]$, она сходится к некоторому элементу $h_0(t,\tau)$. Существование решения уравнения Винера-Хопфа доказано.

Пусть $h_1(t,\tau)$ и $h_2(t,\tau)$ — решения уравнения Винера-Хопфа, причем $h_1(t,\tau) \ne h_2(t,\tau)$. Тогда, используя соотношение леммы 3.2, находим

$$||C^m(h_1(t) - h_2(t))^m z||_{-10}^2 + ||J_m(h_1(t) - h_2(t))^m z||_0^2 \le c(2a + 2a - 4a) = 0.$$

Таким образом, получили, что $h_1(t,\tau) = h_2(t,\tau)$ в смысле пространства $H[0,t]$.

Итак, выше показано, что для нахождения импульсной переходной матрицы фильтра $h_0(t,\tau)$ необходимо решать уравнение Винера-Хопфа (3.5.10). При этом часть компонент матрицы $h_0(t,\tau)$ по переменной τ удовлетворяет лишь интегральным уравнениям первого рода и не принадлежит пространству интегрируемых с квадратом функций даже при условии, что все компоненты матриц $K_x(\tau,\sigma)$, $C(\tau)$, $R(\tau)$ гладкие.

Решение (3.5.10) в общем случае – некорректно поставленная задача. Но при некоторых ограничениях на исходные данные, о которых будет сказано ниже, удается построить алгоритм решения задачи линейной оптимальной фильтрации без применения метода регуляризации А.Н. Тихонова. К таким методам относится алгоритм О'Рейли и Ньюманна.

5. Рассмотрим метод О'Рейли-Ньюманна.

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Пусть задана динамическая система

$$\frac{dx_1(\tau)}{d\tau} = F_{11}(\tau)x_1(\tau) + F_{12}(\tau)x_2(\tau) + u_1(\tau), \tag{3.5.21}$$

$$\frac{dx_2(\tau)}{d\tau} = F_{21}(\tau)x_1(\tau) + F_{22}(\tau)x_2(\tau) + u_2(\tau), \tag{3.5.22}$$

где $0 \le \tau \le t \le \infty$, $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ — n_1 – и n_2 –мерные случайные процессы, описывающие состояние системы, $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$ — белые гауссовские шумы с нулевыми средними, $x_1(0)$ и $x_2(0)$ — гауссовские случайные векторы, причем для $\forall\sigma \in [0,t], \tau < \infty$ имеют место соотношения:

$$M[u_1(\tau)u_1^m(\sigma)] = Q_{11}(\tau)\delta(\tau-\sigma),\ Q_{11}(\tau) = Q_{11}^m(\tau) > 0,$$

$$M[u_2(\tau)u_2^m(\sigma)] = Q_{22}(\tau)\delta(\tau-\sigma),\ Q_{22}(\tau) = Q_{22}^m(\tau) > 0,$$

$$M[u_1(\tau)u_2^m(\sigma)] = Q_{12}(\tau)\delta(\tau-\sigma) = M[u_2(\tau)u_1^m(\sigma)], \tag{3.5.23}$$

$$M[x_1(0)] = x_{10},\ M[x_2(0)] = x_{20},\ M[(x_1(0) - x_{10})(x_1(0) - x_{10})^m] = P_{11},$$

$$P_{11} = P_{11}^m > 0,\ M[(x_2(0) - x_{20})(x_2(0) - x_{20})^m] = P_{22},\ P_{22} = P_{22}^m > 0,$$

$$M[(x_1(0) - x_{10})(x_2(0) - x_{20})^m] = P_{12},\ P_{12} = P_{21};$$

выражение $Q(\tau) > 0$ означает, что для $\forall u(\tau) \in L_2[0,t]$, $(u, Qu)_0 \geq c\|u\|_0^2$, $c > 0$, а $P > 0$ – что для $\forall z \in E_n$, $(z, Pz)_n \geq c'\|z\|_n^2, c' > 0$. Матрицы $\{F_{ij}(\tau)\}_{i,j=1,2}$ состоят из элементов, принадлежащих $L_2[0,t]$.

Наблюдения проводятся по закону

$$y_1(\tau) = x_1(\tau), \tag{3.5.24}$$

$$y_2(\tau) = C_1(\tau)x_1(\tau) + C_2(\tau)x_2(\tau) + v(\tau), \tag{3.5.25}$$

где $0 \leq \tau \leq t < \infty$, $v(\tau)$ — q–мерный белый гауссовский шум с нулевым средним и ковариацией $M[v(\tau)v^m(\sigma)] = R(\tau)\delta(\tau - \sigma)$, матрица $R(\tau)$ — симметрическая и положительно определенная. Процессы $u_1(\tau)$, $u_2(\tau)$, $v(\tau)$ некоррелированы со случайными векторами $x_1(0)$ и $x_2(0)$.

$$M \begin{bmatrix} u_1(\tau)v^m(\sigma) \\ u_2(\tau)v^m(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(\tau) \\ U_2(\tau) \end{bmatrix} \delta(\tau - \sigma). \tag{3.5.26}$$

Элементы матриц $R(\tau)$, $\{Q_{ij}(\tau)\}_{i,j=1,2}$ — гладкие, т.е. имеют как минимум первую непрерывную производную, а $C_1(\tau)$ и $C_2(\tau)$ — непрерывные на $[0,t]$.

Требуется по измерениям $\{y_1(\tau), y_2(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$ найти линейную оценку вектора $x(\tau) = \begin{bmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{bmatrix}$ в точке $\tau = t$, удовлетворяющую критерию

$$m(t) = \inf_h \{M[(z, x(t) - \hat{x}(0) - \hat{x}(t))_n^2] \mid \hat{x}(t) = \int_0^t h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau\}, \tag{3.5.27}$$

где нижняя грань берется по всем матрицам $h(t,\tau)$, удовлетворяющим соотношению: $h^m(t,\tau)z \in H[0,t]$ (см. пункт 4 раздела 3.5) для $\forall z \in E_n$, $\hat{x}(0)$ – оценка начального состояния вектора $x(0)$.

Поскольку, вследствие (3.5.24), вектор $x_1(\tau)$ наблюдается на промежутке $[0,t]$ точно, то задача сводится к нахождению оценки $\hat{x}_2(t)$ вектора $x_2(t)$ такой, что

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} = \int_0^t h_0(t,\tau)y(\tau)\,d\tau + \hat{x}_0(0),\ \hat{x}_0(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \hat{x}_2(0) \end{bmatrix},$$

$h_0(t,\tau)$ – оптимальная импульсная переходная матрица фильтра, $\hat{x}_0(0)$ – наилучшая оценка начального состояния вектора $x(0)$.

Вначале выясним, как выбрать оптимальную оценку $\hat{x}_0(0)$, учитывая значения реализации $x_1(0)$. Для этого $\hat{x}_2(0)$ представим в виде

$$\hat{x}_2(0) = x_{20} + N(x_1(0) - x_{10}). \tag{3.5.28}$$

Матрицу N в (3.5.28) выберем так, чтобы среднеквадратическая ошибка при определении оценки $\hat{x}_2(0)$ была минимальной. Пусть

$$\varepsilon(0) \equiv x_2(0) - \hat{x}_2(0),\ P(0) \equiv M[\varepsilon(0)\varepsilon^m(0)].$$

Тогда $\varepsilon(0) = x_2(0) - x_{20} - N(x_1(0) - x_{10})$, откуда

$$P(0) = P_{22} - NP_{21} - P_{21}N^m + NP_{11}N^m,\ P_{12} = P_{21}^m.$$

Очевидно, что $P(0)$ достигает наименьшего значения (в смысле поэлементного сравнения матриц) в том и только в том случае, если матрица $N = P_{21}P_{11}^{-1}$. Таким образом, наилучшие в среднеквадратическом смысле начальные данные будут:

$$\hat{x}_2(0) = x_{20} + P_{21}P_{11}^{-1}[x_1(0) - x_{10}], \tag{3.5.29}$$

$$P(0) = P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{21}^m. \tag{3.5.30}$$

Так как, по условию, случайные величины $x_2(0)$ и $x_1(0)$ – совместно гауссовские, то наилучшей среднеквадратическо оценкой $\hat{x}_2(0)$ случайной величины $x_2(0)$ является условное математическое ожидание $M[x_2(0)|x_1(0)]$, которое совпадает с выражением (3.5.29).

Найдем оптимальную линейную оценку $\hat{x}_2(t), t > 0$. Обозначим через $\bar{x}(t)$ гауссовский случайный процесс $x_2(t) - \hat{x}_2(0)$. Тогда $M[\bar{x}(0)] = 0$ и на основании (3.5.27) имеем

$$m(t) = \inf_{\bar{h}}\{M[z, \bar{x}(t) - \hat{x}_2(t))_n^2] \mid \hat{x}(t) = \int_0^t \bar{h}(t,\tau)y(\tau)\,d\tau\}, \tag{3.5.31}$$

где нижняя грань берется по всем допустимым матрицам-функциям $\bar{h}(t,\tau)$, $\bar{h}^m(t,\tau)z \in H[0,t]$, $\forall z \in E_n$. Интеграл понимается в смысле соотношения (1.1.11).

Матрица $\bar{h}_0(t,\tau)$, удовлетворяющая критерию (3.5.31), является, как известно, решением уравнения Винера-Хопфа

$$M[\bar{x}(t)y^m(\sigma)] = \int_0^t \bar{h}_0(t,\tau)M[y(\tau)y^m(\sigma)]\,d\tau,\ \sigma \in [0,t]. \tag{3.5.32}$$

Наблюдения $y(\tau) = \begin{bmatrix} y_1(\tau) \\ y_2(\tau) \end{bmatrix}$ принадлежат векторному произведению пространств $L_2[0,t] \times W_{2t}^{-1}[0,t]$. Обозначим через $\mathbf{L}[0,t] \equiv L_2[0,t] \times W_{2t}^{-1}[0,t]$.

Введем оператор

$$\mathcal{F}(f) \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{d}{d\tau} - F_{11} & 0 \\ -C_1(\tau) & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\tau) \\ f_2(\tau) \end{bmatrix},\ f = \begin{bmatrix} f_1(\tau) \\ f_2(\tau) \end{bmatrix},$$

$f_1(\tau) \in L_2[0,t]$, $f_2(\tau) \in W_{2t}^{-1}[0,t]$, размерности векторов $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ равны $m-q$ и q соответственно, производная $\dfrac{d}{d\tau}$ понимается в обобщенном смысле.

Оператор $\mathcal{F}$ является линейным непрерывным оператором, отображающим $\mathbf{L}[0,t]$ в декартово произведение $W_{2t}^{-1}[0,t] \times W_{2t}^{-1}[0,t]$, так как оператор $\mathcal{L} \equiv \dfrac{d}{d\tau} - F_{11}(\tau)$ - непрерывный из $L_2[0,t]$ в $W_{2t}^{-1}[0,t]$ (см. лемму 1.1).

Существует непрерывный оператор $\mathcal{F}^{-1}$, задаваемый выражением

$$\mathcal{F}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1} & 0 \\ C_1(\tau)\mathcal{L}^{-1} & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(\tau,0) & 0 \\ C_1(\tau)\Phi(\tau,0) & I_q \end{bmatrix},$$

где оператор $\mathcal{L}^{-1}$ — обратный к $\mathcal{L}$ и на элементах $y(\tau)$ из $L_2[0,t]$ определяется формулой $\mathcal{L}^{-1}y \equiv \equiv \Phi(\tau,0)y(0)$, $\Phi(\tau,\sigma)$ — фундаментальная матрица решений уравнения $\mathcal{L}x = 0$.

Пусть наблюдается процесс $s(\tau)$, связанный с $y(\tau)$ соотношением

$$s(\tau) = \mathcal{F}(y) = \begin{bmatrix} \dfrac{dy_1(\tau)}{d\tau} - F_{11}(\tau)y_1(\tau) \\ y_2(\tau) - C_1(\tau)y_1(\tau) \end{bmatrix}. \tag{3.5.33}$$

Тогда, учитывая (3.5.24), (3.5.25), (3.5.21) и (3.5.22), измерения $s(\tau)$ можно представить в виде

$$s(\tau) = \begin{bmatrix} F_{11}(\tau)x_2(\tau) + u_1(\tau) \\ C_2(\tau)x_2(\tau) + v(\tau) \end{bmatrix}. \tag{3.5.34}$$

Обозначим $w(\tau) = \begin{bmatrix} u_1(\tau) \\ v(\tau) \end{bmatrix}$. Так как $Q_{11}(\tau) > 0$ и $R(\tau) > 0$, то $w(\tau)$ — белый гауссовский шум с нулевым средним и интенсивностью

$$R_w \equiv \begin{bmatrix} Q_{11}(\tau) & U_1(\tau) \\ U_1^m(\tau) & R(\tau) \end{bmatrix} > 0,\ \tau \in [0,t]. \tag{3.5.35}$$

Рассмотрим уравнение Винера-Хопфа

$$M[\bar{x}(t)s^m(\sigma)] = \int_0^t h_1(t,\tau)M[s(\tau)s^m(\sigma)]\,d\tau. \tag{3.5.36}$$

Так как $s(\tau)=\mathcal{F}y(\tau)$, то

$$M[\bar{x}(t)\{\mathcal{F}y(\sigma)\}^m]=\int_0^t h_1(t,\tau)(M[\mathcal{F}y(\tau)\{\mathcal{F}y(\sigma)\}^m])\,d\tau.$$

Далее, умножим это выражение на произвольный элемент $z\in E_n$, транспонируем полученное соотношение и меняем местами операцию математического ожидания M и оператор $\mathcal{F}$ (операторы M и $\mathcal{F}$ перестановочные), тогда

$$\mathcal{F}M[y(\sigma)\bar{x}^m(t)]z=\mathcal{F}\int_0^t M[y(\sigma)\{\mathcal{F}y(\tau)\}^m]h_1^m(t,\tau)z\,d\tau.$$

Используя линейность оператора $\mathcal{F}$ находим, что

$$\mathcal{F}\{M[y(\sigma)\bar{x}^m(t)]z-\int_0^t M[y(\sigma)\{\mathcal{F}y(\tau)\}^m]h_1^m(t,\tau)z\,d\tau\}=0,$$

и благодаря существованию ограниченного обратного оператора $\mathcal{F}^{-1}$ и произвольности вектора z получаем

$$M[y(\sigma)\bar{x}^m(t)]=\int_0^t M[y(\sigma)\{\mathcal{F}y(\tau)\}^m]h_1^m(t,\tau)\,d\tau,$$

или, транспонируя последнее выражение, имеем:

$$M[\bar{x}(t)y^m(\sigma)]=\int_0^t h_1(t,\tau)M[\mathcal{F}(y(\tau))y^m(\sigma)]\,d\tau.$$

Таким образом, уравнение (3.5.36) эквивалентно уравнению

$$M[\bar{x}(t)y^m(\sigma)]=\int_0^t h_1(t,\tau)\mathcal{F}(M[y(\tau)y^m(\sigma)])\,d\tau. \qquad (3.5.37)$$

Справедливо соотношение

$$\int_0^t h_1(t,\tau)\mathcal{F}(M[y(\tau)y^m(\sigma)])\,d\tau=\int_0^t \mathcal{F}_m^*(h_1(t,\tau))M[y(\tau)y^m(\sigma)]\,d\tau, \qquad (3.5.38)$$

где $\mathcal{F}_m^*x^m=[\mathcal{F}^*x]^m$ для $\forall x\in L_2[0,t]\times W_{2t}^{-1}[0,t]$, а $\mathcal{F}^*$ — сопряженный к $\mathcal{F}$ оператор,

$$\mathcal{F}^*=\begin{bmatrix}\mathcal{L}^* & -C_1^m(\tau)\\ 0 & I_q\end{bmatrix},$$

$\mathcal{L}^*$ — сопряженный с $\mathcal{L}$ оператор, $\mathcal{L}^*\equiv-\frac{d}{d\tau}-F_{11}^m(\tau)$. Таким образом, уравнение (3.5.37) можно записать в виде

$$\int_0^t \mathcal{F}_m^*(h_1(t,\tau))M[y(\tau)y^m(\sigma)]\,d\tau=M[\bar{x}(t)y^m(\sigma)]. \qquad (3.5.39)$$

Вычитая уравнение (3.5.39) из (3.5.32) находим, что

$$\int_0^t \{\bar{h}_0(t,\tau)-\mathcal{F}_m^*(h_1(t,\tau))\}M[y(\tau)y^m(\sigma)]\,d\tau=0. \qquad (3.5.40)$$

Покажем, что

$$\bar{h}_0(t,\tau) = \mathcal{F}_m^*(h_1(t,\tau)). \tag{3.5.41}$$

Для этого сначала докажем, что решение уравнения (3.5.36) существует и единственно.

Пусть

$$A(\tau) = \begin{bmatrix} F_{12}(\tau) \\ C_2(\tau) \end{bmatrix}.$$

Тогда (3.5.34) принимает вид

$$s(\tau) = A(\tau)\bar{x}_2(\tau) + w(\tau), \tag{3.5.42}$$

а ядро интегрального уравнения (3.5.36)

$$M[s(\tau)s^m(\sigma)] = A(\tau)K_{\bar{x}}(\tau,\sigma)A^m(\sigma) + R_w(\tau)\delta(\tau-\sigma)$$

является положительно определенным, так как матрица $R_w(\tau)$ положительно определена, а матрица $A(\tau)K_{\bar{x}}(\tau,\sigma)A^m(\sigma)$ неотрицательная. Из положительной определенности ядра уравнения (3.5.36) следует существование и единственность его решения.

Используя свойства δ–функции Дирака, получаем

$$M[\bar{x}(t)s^m(\sigma)] = \int_0^t h_1(t,\tau)A(\tau)K_{\bar{x}}(\tau,\sigma)A^m(\sigma)\,d\tau + h_1(t,\sigma)R_w(\sigma),$$

а это уравнение Фредгольма 2-го рода, решение которого корректно.

Умножим уравнения (3.5.32) и (3.5.36) на произвольный вектор z из E_n и введем обозначения:

$$u_1(\tau) \equiv h_1^m(t,\tau)z\,;\ \mathcal{B}_s u \equiv \int_0^t M[s(\sigma)s^m(\tau)]u(\tau)\,d\tau, \ \text{ для } \forall u(\tau) \in W_2^1[0,t];$$

$$f_1(\sigma) \equiv M[s(\sigma)\bar{x}^m(t)]z\,;\ u_0(\tau) \equiv h_0^m(t,\tau)z\,;\ f(\sigma) \equiv M[y(\sigma)\bar{x}^m(t)]z\,; \tag{3.5.43}$$

$$\mathcal{B}v \equiv \int_0^t M[y(\sigma)y^m(\tau)]v(\tau)\,d\tau, \ \text{ для } \forall v(\tau) \in W^{-1}_{2(m-q)}[0,t] \times W^1_{2(q)}[0,t],$$

где $W^{-1}_{2(m-q)}[0,t] \times W^1_{2(q)}[0,t]$ — декартово произведение $m-q$–мерного негативного пространства $W^{-1}_{2(m-q)}[0,t]$ и q–мерного позитивного пространства $W^1_{2(q)}[0,t]$.

Уравнения (3.5.32) и (3.5.36), с учетом введенных обозначений, принимают вид:

$$\mathcal{B}u_0 = f \tag{3.5.44}$$

и

$$\mathcal{B}_s u_1 = f_1. \tag{3.5.45}$$

Легко показать, что для $\forall u \in W_2^1[0,t]$ верно равенство: $\mathcal{B}_s u = \mathcal{F}\mathcal{B}\mathcal{F}^* u$, то есть – $\mathcal{B}_s = \mathcal{F}\mathcal{B}\mathcal{F}^*$ на $W_2^1[0,t]$ и $f_1 = \mathcal{F}f$, вектор-функции f и f_1 принадлежат $W_2^1[0,t]$ (см. раздел 3.1). Отметим, что оператор $\mathcal{F}^*$ ограниченный и для $\forall u \in L_2[0,t]$ справедливо неравенство: $\|\mathcal{F}^* u\|_{-10} \le c^*\|u\|_0$, где c^* — положительная константа. Кроме этого, оператор $\mathcal{F}^*$ имеет ограниченный обратный оператор:

$$(\mathcal{F}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathcal{L}^*)^{-1} & (\mathcal{L}^*)^{-1}C_1^m(\tau) \\ 0 & I_q \end{bmatrix}.$$

Это вытекает из неравенств леммы 1.1.

Рассмотрим скалярное произведение $(\mathcal{B}_s u, u)_0$, u — произвольный элемент из W_2^1. Из свойств операторов $\mathcal{B}_s$ и $\mathcal{F}^*$ для $\forall u \in W_2^1$ следует справедливость цепочки соотношений:

$$(\mathcal{B}_s u, u)_0 = (\mathcal{F}\mathcal{B}\mathcal{F}^* u, u)_0 = \langle \mathcal{B}\mathcal{F}^* u, \mathcal{F}^* u\rangle \ge c\|u\|_0^2 \ge \frac{c}{(c^*)^2}\|\mathcal{F}^* u\|_{-10}^2.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{B}$ положительно определен на декартовом произведении пространств: $(m-q)$-мерном пространстве $L_{2(m-q)}[0,t]$ и q-мерном – $W^1_{2(q)}[0,t]$, то есть на $L_{2(m-q)}[0,t]\times W^1_{2(q)}[0,t]$.

Подставим в уравнение (3.5.45) вместо оператора $\mathcal{B}_s$ его представление $\mathcal{F}\mathcal{B}\mathcal{F}^*$ и умножим полученное выражение слева на $\mathcal{F}^{-1}$. В результате находим, что уравнение (3.5.45) эквивалентно уравнению:

$$\mathcal{B}\mathcal{F}^* u_1 = f. \tag{3.5.46}$$

Из выражений (3.5.44), (3.5.46) и положительной определенности оператора $\mathcal{B}$ имеем, что $u_0=\mathcal{F}^*u_1$ и u_0 можно вычислить по формуле $u_0=\mathcal{F}^*(\mathcal{B}_s)^{-1}\mathcal{F}f$. Соотношение (3.5.41) доказано.

Для вычисления оценки $\hat{x}_2(t)$ построим фильтр типа Калмана-Бьюси. Подставляя в уравнение (3.5.22) известную функцию $x_1(\tau)$, получаем дифференциальное уравнение для вектора состояния системы $x_2(\tau)$

$$\frac{dx_2(\tau)}{d\tau} = F_{21}(\tau)y_1(\tau)+F_{22}(\tau)x_2(\tau)+u_2(\tau), \tag{3.5.47}$$

где $y_1(\tau)=x_1(\tau)$ известная вектор-функция. Считаем, что наблюдается процесс $s(\tau)$

$$s(\tau)=\begin{bmatrix} F_{12}(\tau)\\ C_2(\tau)\end{bmatrix}x_2(\tau)+\begin{bmatrix} u_1(\tau)\\ v(\tau)\end{bmatrix}. \tag{3.5.48}$$

Математическое ожидание $x_2(0)$ заменяем условным математическим ожиданием (3.5.29), а дисперсию полагаем равной $P(0)$ из (3.5.30).

Воспользуемся теперь процедурой обобщенного фильтра Калмана-Бьюси. В результате получим фильтр вида

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}_2(\tau)}{d\tau} &= F_{22}(\tau)\hat{x}_2(\tau)+F_{21}(\tau)x_1(\tau)+K_1(\tau)\Big[\frac{dx_1(\tau)}{d\tau}+F_{11}(\tau)x_1(\tau)-\\ &-F_{12}(\tau)\hat{x}_2(\tau)\Big]+K_2(\tau)[y_2(\tau)-C_1(\tau)x_1(\tau)-C_2(\tau)\hat{x}_2(\tau)],\end{aligned} \tag{3.5.49}$$

вектор $\hat{x}_2(0)$ вычисляется по (3.5.29), а матрица $K(\tau)\equiv[K_1(\tau)\quad K_2(\tau)]$ имеет вид

$$K(\tau)=\{P(\tau)Q^m(\tau)+[Q_{21}(\tau)\quad U_2(\tau)]\}R_w^{-1}(\tau), \tag{3.5.50}$$

где матрица $R_w(\tau)$ имеет вид (3.5.35). Матрица ковариации ошибки $P(\tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати

$$\begin{aligned}\frac{dP(\tau)}{d\tau} &= F_{22}P(\tau)+P(\tau)F_{22}^m+Q_{22}(\tau)-\\ -[P(\tau)A^m(\tau)&+[Q_{21}(\tau)\quad U_2(\tau)]]R_w^{-1}(\tau)[P(\tau)A^m(\tau)+[Q_{21}(\tau)\quad U_2(\tau)]]^m,\end{aligned} \tag{3.5.51}$$

где P_0 имеет вид (3.5.30). В дифференциальном уравнении для оценки $\hat{x}_2(\tau)$ присутствует некорректная операция дифференцирования наблюдаемого процесса. Чтобы исключить дифференцирование в (3.5.49), сделаем замену по формуле

$$\hat{x}_2(\tau)=\zeta(\tau)+K_1(\tau)x_1(\tau), \tag{3.5.52}$$

где матрица $K_1(\tau)$ определяется из выражения (3.5.50). После подстановки (3.5.52) в (3.5.49) и сокращений получим

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} &= \{F_{22}(\tau)-K_1(\tau)F_{12}(\tau)-K_2(\tau)C_2(\tau)\}\zeta+\{F_{22}(\tau)K_1(\tau)+\\ &+F_{21}(\tau)-K_1(\tau)F_{11}-K_1(\tau)F_{12}(\tau)K_1(\tau)-K_2(\tau)C_1(\tau)-K_2(\tau)C_1(\tau)-\\ &-K_2(\tau)C_2(\tau)K_1(\tau)-\frac{dK_1(\tau)}{d\tau}\}y_1(\tau)+K_2(\tau)y_2(\tau),\end{aligned} \tag{3.5.53}$$

причем

$$\zeta(0)=x_{20}+(P_{21}P_{11}^{-1}-K_1(0))x_1(0)-P_{21}P_{11}^{-1}x_{10}. \tag{3.5.54}$$

Таким образом, для нахождения оценки $\hat{x}_2(\tau)$ необходимо найти вспомагательную вектор-функцию $\zeta(\tau)$, используя соотношения (3.5.51),
(3.5.30), (3.5.53) и (3.5.54), а затем применить формулу (3.5.52).

В заключение напомним, что алгоритм О'Рейли-Ньюманна может быть применен для решения задачи линейной фильтрации лишь при выполнении условий: матрица $Q_{11}(\tau)$ положительно определена и определитель матрицы P_{11} отличен от нуля.

4 Регуляризованные линейные фильтры

В предыдущем разделе рассмотрен фильтр Калмана-Бьюси и его некоторые обобщения. При выводе алгоритмов решения в задачах, исследуемых выше, существенную роль играли условия, накладываемые на шумы в системе, наблюдениях и на ковариационную матрицу вектора начальных условий. Если эти условия нарушены, то задача линейной оптимальной фильтрации становится некорректно поставленной и для ее решения необходимо использовать метод регуляризации.

4.1 Регуляризованный линейный фильтр для общего случая вырожденного белого шума в наблюдениях

1. П о с т а н о в к а з а д а ч и . Пусть n –мерный случайный процесс $x(\tau) = x(\omega, \tau)$, $\tau \in [0, t]$, $\omega \in \Omega$, генерируется путем пропускания векторного случайного процесса $u(\tau)$ с компонентами в виде белых гауссовских шумов (возможно вырожденных) через линейную нестационарную систему

$$\mathcal{L}(x) \equiv \frac{dx(\tau)}{d\tau} - F(\tau)x(\tau) = G(\tau)u(\tau), \quad x(0) = x_0. \tag{4.1.1}$$

Наблюдается случайный векторный процесс размерности $m \leq n$

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau) + w(\tau), \tag{4.1.2}$$

где $F(\tau)$, $G(\tau)$ и $C(\tau)$ — матрицы-функции соответствующих размерностей. Элементы матриц $G(\tau)$ и $C(\tau)$ — гладкие функции, а матрицы $F(\tau)$ — кусочно- непрерывные. Решение задачи Коши понимается в смысле определения 1.6, реализации шума

$$w(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ v(\tau) \end{bmatrix} \tag{4.1.3}$$

имеют компоненты из негативного пространства $W_2^{-1}[0, t]$. Равенство в (4.1.2) понимается в смысле негативного пространства $W_2^{-1}[0, t]$, а не поточечно, $v(\tau)$ — белый (возможно вырожденный) q –мерный шум. Все элементы ковариационной матрицы процесса $w(\tau)$ принадлежат декартову произведению $W_2^{-1}[0, t] \times W_2^{-1}[0, t]$.

Обозначим

$$m(t) = \inf_h \{M(z, x(t) - \hat{x}(t))_n^2] \mid \hat{x}(t) = \int\limits_0^t h(t, \tau)y(\tau)\, d\tau\}, \tag{4.1.4}$$

где z — произвольный постоянный вектор из E_n, нижняя грань берется по всем матрицам $h(t, \tau)$ с элементами из позитивного пространства $W_2^1[0, t]$ (по переменной τ), а интеграл понимается как и в (1.1.11).

Задачу линейной оптимальной фильтрации можно сформулировать следующим образом.

Пусть известны наблюдения $\{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$. Требуется найти последовательность n –мерных векторов

$$\{\hat{x}_\alpha(t) = \int\limits_0^t h_\alpha(t, \tau)y(\tau)\, d\tau\}_{\alpha > 0} \tag{4.1.5}$$

с матрицами-функциями $h_\alpha(t,\tau)$, все элементы которых при любых $\alpha > 0$ принадлежат позитивному пространству $W_2^1[0,t]$ и такую, что

$$\lim_{\alpha\to 0} M[(z, x(t) - \hat{x}_\alpha(t))_n^2] = m(t),\ \forall z \in E_n. \tag{4.1.6}$$

Для упрощения дальнейших выкладок считаем, что шумы $u(\tau)$ и $w(\tau)$ имеют нулевые средние и некоррелированы между собой, причем

$$M[x_0] = 0,\ M[x_0 x_0^m] = P_0,\ P_0 = P_0^m \ge 0,\ M[x_0 w^m(\tau)] = 0,$$

$$M[x_0 u^m(\tau)] = 0,\ M[u(\tau)u^m(\sigma)] = Q(\tau)\delta(\tau-\sigma),\ Q(\tau) = Q^m(\tau) \ge 0,$$

$$M[w(\tau)w^m(\sigma)] = R_w(\tau)\delta(\tau-\sigma),\ \sigma \in [0,t],$$

где $R_w(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\tau) \end{bmatrix}$, а $R(\tau)$ — матрица интенсивности белого шума $v(\tau)$, то есть $M[v(\tau)v^m(\sigma)] = R(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $R(\tau)$ — симметрическая, неотрицательно определенная матрица с гладкими элементами.

Нахождение оптимальной линейной оценки в смысле минимума среднеквадратической ошибки, как уже отмечалось, эквивалентно решению уравнения Винера-Хопфа

$$K_x(t,\sigma)C^m(\sigma) = \int_0^t h(t,\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\,d\tau + h(t,\sigma)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\sigma) \end{bmatrix}. \tag{4.1.7}$$

Свойства решения этого уравнения изучены в разделе 3.5.4.

Рассмотрим случай, когда нарушаются условия, принятые в 3.5.5.

2. Решение задачи фильтрации.

Рассмотрим уравнение

$$M[x(t)y^m(\sigma)] = \int_0^t h_\alpha(t,\tau)M[y(\tau)y^m(\sigma)]\,d\tau + \alpha h_\alpha(t,\sigma), \tag{4.1.8}$$

где α — положительное число, параметр регуляризации.

Используя статистические свойства случайных процессов $u(\tau)$, $v(\tau)$, случайного вектора x_0 и свойства δ-функции Дирака, уравнение (4.1.8) можно записать следующим образом:

$$K_x(t,\sigma)C^m(\sigma) = \int_0^t h_\alpha(t,\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\,d\tau + h_\alpha(t,\sigma)S_\alpha(\sigma), \tag{4.1.9}$$

где $S_\alpha(\sigma) = \begin{bmatrix} \alpha I_{m-q} & 0 \\ 0 & R(\sigma) + \alpha I_q \end{bmatrix}$, I_{m-q} и I_q — единичные матрицы порядка $(m-q)$ и q.

Уравнение (4.1.9) отличается от (4.1.7) слагаемым $\alpha h_\alpha(t,\sigma)$ и при фиксированном α представляет собой уравнение Фредгольма второго рода, решение которого, как известно, является корректно поставленной задачей.

Запишем уравнение (4.1.9) в операторной форме. Для этого умножим (4.1.9) на произвольный фиксированный вектор $z \in E_n$ и введем обозначения:

$$C(\sigma)K_x(t,\sigma)z = f(t,\sigma),\ h_\alpha^m(t,\tau)z = u_\alpha(t,\tau),\ \mathcal{B} = \mathcal{A} + \mathcal{R},$$

$$\mathcal{A}u = \int_0^t C(\sigma)K_x^m(\tau,\sigma)C^m(\tau)u(\tau)\,d\tau,\ \mathcal{R}u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\sigma) \end{bmatrix} u(\sigma).$$

Операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{B}$ — симметрические и неотрицательно определены. Уравнение Винера-Хопфа (4.1.9) в операторной форме имеет вид

$$\mathcal{B}u_\alpha + \alpha u_\alpha = f \tag{4.1.10}$$

Исследуем свойства решения $u_\alpha(\tau,\sigma)$ уравнения (4.1.10).

Теорема 4.1 *Если элементы матриц $K_x(t,\sigma)C^m(\sigma)$, $C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)$, $R(\sigma)$ интегрируемы с квадратом при каждом фиксированном t и $\alpha > 0$, то существует единственное решение $h_\alpha(t,\sigma)$ уравнения (4.1.9), интегрируемое с квадратом по второму аргументу, т.е. $h_\alpha^m(t,\tau)z \in L_2[0,t]$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1. Отметим, что оператор $\mathcal{B} = \mathcal{B}+\alpha I$ — положительно определенный и симметрический при любых $\alpha > 0$.

Теорема 4.2 *Если матрицы $K_x(t,\sigma)C^m(\sigma)$, $\dfrac{\partial K_x(t,\sigma)C^m(\sigma)}{\partial\sigma}$, $S_\alpha^{-1}(\sigma)$ и $\dfrac{dR(\sigma)}{d\sigma}$ состоят из элементов, интегрируемых с квадратом на $[0,t]$, то решение $h_\alpha(t,\sigma)$ уравнения (4.1.9) имеет интегрируемую с квадратом по второму аргументу производную, то есть для $\forall z \in E_n$ $\dfrac{\partial h_\alpha^m(t,\sigma)}{\partial\sigma} z \in L_2[0,t]$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.2.

Лемма 4.1 *Решение уравнения*

$$\mathcal{B}u_\alpha + \alpha u_\alpha = f, \tag{4.1.10}$$

доставляет минимум функционалу

$$\varphi_\alpha(u) = ||\mathcal{B}u - f||_0^2 + \alpha\langle u, \mathcal{B}u\rangle, \quad u \in H[0,t]$$

(Определение пространства $H[0,t]$ дано после доказательства леммы 3.2, см. стр. 51).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение Эйлера для функционала $\varphi(u)$ имеет вид

$$\mathcal{B}(\mathcal{B}u_\alpha + \alpha u_\alpha - f) = 0.$$

Отсюда видно, что функционал $\varphi_\alpha(u)$ на решении уравнения $\mathcal{B}u_\alpha + \alpha u_\alpha = \; = f$ достигает минимума.

Факторизуем пространство $W_{20}^{-1}[0,t]$ по множеству нулей билинейной формы $\langle u, \mathcal{B}u\rangle$, $u \in H[0,t]$; получаем пространство $H_-[0,t]$. Построим с помощью изометрического оператора j_0^* пространство $H_0[0,t]$ следующим образом: если $u \in H_-[0,t]$, то $j_0^* u \in H_0[0,t]$. Введем в $H_0[0,t]$ норму $||u||_{\mathcal{B}}^2 = \langle u, \mathcal{B}u\rangle$, $(\langle u, \mathcal{B}u\rangle > 0$, $\forall u \in H_-[0,t], u \neq 0)$. Пополнение пространства $H_0[0,t]$ по этой норме обозначим $H_{\mathcal{B}}[0,t]$.

Напомним, что главным решением называют решение, имеющее минимальную норму [33].

Теорема 4.3 *Последовательность решений $\{h_\alpha(t,\sigma)\}_{\alpha>0}$ уравнения Винера-Хопфа (4.1.9) при $\alpha \to 0$ сходится (при каждом фиксированном t) в смысле пространства $H_{\mathcal{B}}[0,t]$ к главному решению уравнения (4.1.7).*

Если выполнены условия леммы 3.3, то при каждом фиксированном t имеет место соотношение

$$||C^m h_\alpha^m(t)z - C^m h_0^m(t)z||_{-10}^2 + ||\mathcal{I}_m h_\alpha^m(t)z - \mathcal{I}_m h_0^m(t)z||_0^2 \to 0, \text{ при } \alpha \to 0,$$

где $h_0(t,\tau)$ главное решение уравнения (4.1.7), а $\mathcal{I}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функционал $\varphi_\alpha(u)$ с учетом введенных обозначений можно записать в виде

$$\varphi_\alpha(u) = ||\mathcal{B}u - f||_0^2 + \alpha||u||_{\mathcal{B}}^2.$$

Этот функционал, согласно лемме 3.4, достигает минимума на элементе u_α, являющемся решением уравнения $\mathcal{B}u_\alpha + \alpha u_\alpha = f$. Таким образом, справедливо неравенство $\varphi_\alpha(u_\alpha) \le \varphi_\alpha(u_0)$, или подробнее:

$$||\mathcal{B}u_\alpha - f||_0^2 + \alpha||u_\alpha||_{\mathcal{B}}^2 \le \alpha||u_0||_{\mathcal{B}}^2, \tag{4.1.11}$$

где $\alpha > 0$, u_0 — главное решение уравнения (4.1.7), которое в операторной форме имеет вид

$$\mathcal{B}u = f. \tag{4.1.12}$$

Из (4.1.11) следует, что

$$||u_\alpha||_{\mathcal{B}} \le ||u_0||_{\mathcal{B}}. \tag{4.1.13}$$

Таким образом, множество решений уравнения $\mathcal{B}u_\alpha + \alpha u_\alpha = f$ (обозначим его через D_α) ограничено в $H_{\mathcal{B}}[0,t]$, а значит – слабо компактно [24]. Выделим из D_α любую слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_\alpha\}_{\alpha>0}$, слабый предел которой обозначим $\bar{u}_0$. Покажем, что $\bar{u}_0 = u_0$ и $\mathcal{B}\bar{u}_0 = \bar{f} = f$. Перейдем в (4.1.11) к пределу по α:

$$\lim_{\alpha\to 0}\{||\mathcal{B}u_\alpha - f||_0^2 + \alpha||u_\alpha||_{\mathcal{B}}^2\} = ||\mathcal{B}\bar{u}_0 - f||_0^2 = ||\bar{f} - f||_0^2 = 0,$$

то есть $\bar{u}_0 = u_0$ и $\bar{f} = f$. Из слабой сходимости u_α к u_0 в силу теоремы С. Банаха [24,25] получаем: $\lim\limits_{\alpha\to 0}||u_\alpha||_{\mathcal{B}} \geq ||u_0||_{\mathcal{B}}$, а из этого неравенства и (4.1.13) следует, что $||u_\alpha - u_0||_{\mathcal{B}} \to 0$ при $\alpha \to 0$, то есть имеет место сильная сходимость в $H_{\mathcal{B}}[0,t]$. Из сильной сходимости последовательности $\{u_\alpha\}_{\alpha>0}$ к u_0 в $H_{\mathcal{B}}[0,t]$ следует сходимость по билинейной форме $\langle u, \mathcal{B}u\rangle$ в $H[0,t]$ и, в случае выполнения условий леммы 3.3, имеет место соотношение

$$||C^m(h_\alpha(t) - h_0(t))^m z||_{-10}^2 + ||\mathcal{I}_m(h_\alpha(t) - h_0(t))^m z||_0^2 \to 0,$$

при $\alpha \to 0$. Теорема полностью доказана.

Теорема 4.4 *Последовательность оценок $\{\hat{x}_\alpha(\tau)\}_{\alpha>0}$, удовлетворяющая критерю (4.1.6), находится из соотношения*

$$\hat{x}_\alpha(t) = \int_0^t D(h_\alpha(t,\tau))j^* y(\tau)\,d\tau, \tag{4.1.14}$$

где $h_\alpha(t,\tau)$ - решение уравнения (4.1.9), D и j^* - изометрические операторы, действующие из $W_2^1[0,t]$ в $L_2[0,t]$ и из $W_2^{-1}[0,t]$ в $L_2[0,t]$ соответственно (см.раздел 1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исследуем разность

$$|M(z, x(t) - \hat{x}(t))_n^2] - M(z, x(t) - \hat{x}_\alpha(t))_n^2]| = |\langle h_0^m(t)z, \mathcal{B}h_0^m(t)z\rangle -$$

$$-\langle h_\alpha^m(t)z, \mathcal{B}h_\alpha^m(t)z\rangle + 2\langle (M[x(t)y^m(\tau)])^m z, \{h_\alpha(t) - h_0(t)\}^m z\rangle|.$$

Оценим вначале два последних слагаемых в правой части:

$$|\langle h_0^m(t)z, \mathcal{B}h_0^m(t)z\rangle - \langle h_\alpha^m(t)z, \mathcal{B}h_\alpha^m(t)z\rangle| = |\,||h_0^m(t)z||_{\mathcal{B}}^2 - ||h_\alpha^m(t)z||_{\mathcal{B}}| \leq$$

$$\leq (||h_0^m(t)z||_{\mathcal{B}} + ||h_\alpha^m(t)z||_{\mathcal{B}})||h_0^m(t)z - h_\alpha^m(t)z||_{\mathcal{B}} \leq 2||h_0^m(t)z||_{\mathcal{B}}||h_0^m(t)z - h_\alpha^m(t)z||_{\mathcal{B}} \to 0, \text{ при } \alpha \to 0. \tag{4.1.15}$$

Здесь использовано неравенство (4.1.13) и теорема 4.3.

Рассмотрим теперь выражение

$$\langle (M[x(t)y^m(\tau)])^m z, \{h_\alpha(t) - h_0(t)\}^m z\rangle = \langle K_{xy}^m(t)z, \{h_\alpha(t) - h_0(\tau)\}^m z\rangle = \psi(\Delta h),$$

где $\Delta h = \{h_\alpha(t,\tau) - h_0(t,\tau)\}^m z, z \in E_n$.

Функционал $\psi(\Delta h)$ — при каждом фиксированном t определен на $W_2^{-1}[0,t]$. Вектор-функция $K_{xy}^m(t,\sigma)z$ принадлежит позитивному пространству по переменной σ для любых $z \in E_n$. Для $K_{xy}^m(t,\sigma)z$ можно найти функцию $u^*(\sigma) \in H_{\mathcal{B}}[0,t]$ возможно не единственную, такую, что $K_{xy}^m(t,\sigma)z = \mathcal{B}u^*$. Тогда $\psi(\Delta h) = \langle \mathcal{B}u^*, \Delta h\rangle = \langle u^*, \mathcal{B}\Delta h\rangle$.

Справедливы равенства

$$|\langle u, \mathcal{B}v\rangle| = |\langle \sqrt{\mathcal{B}}u, \sqrt{\mathcal{B}}v\rangle|^2 = \langle u, \mathcal{B}u\rangle\langle v, \mathcal{B}v\rangle,\ \forall u, v \in H_{\mathcal{B}}[0,t].$$

Используя эти соотношения, находим

$$|\psi(\Delta h)|^2 \leq \langle u^*, \mathcal{B}u^*\rangle\langle \Delta h, \mathcal{B}(\Delta h)\rangle \leq c\langle \Delta h, \mathcal{B}(\Delta h)\rangle \to 0 \text{ при } \alpha \to 0 \tag{4.1.16}$$

по теореме 4.3, c — положительная константа, так как билинейная форма $\langle u^*, \mathcal{B}u^*\rangle$, $u^* \in H_{\mathcal{B}}[0,t]$ ограничена.

Из соотношений (4.1.15) и (4.1.16) следует справедливость теоремы 4.4.

Регуляризованное уравнение Винера-Хопфа (4.1.9) соответствует следующей задаче фильтрации.

Некоторый случайный процесс $x(\tau)$ моделируется системой (4.1.1).

Наблюдается процесс $\{y_\alpha(\tau), 0 \le \tau \le t\}$, связанный с $x(\tau)$ соотношением

$$y_\alpha(\tau) = C(\tau)x(\tau) + v_\alpha(\tau), \tag{4.1.17}$$

где $v_\alpha(\tau)$ — случайный процесс типа белого гауссовского шума с нулевым средним и ковариацией

$$M[v_\alpha(\tau)v^m(\sigma)] = S_\alpha(\tau)\delta(\tau-\sigma), S_\alpha(\sigma) = \begin{bmatrix} \alpha I_{m-q} & 0 \\ 0 & R(\sigma)+\alpha I_q \end{bmatrix},$$

$S_\alpha(\sigma)$ — симметричная, *положительно определенная* матрица. Процессы $v_\alpha(\tau)$, $u(\tau)$ и случайный вектор x_0 попарно некоррелированы.

Требуется определить по наблюдениям (4.1.17) оценку $\hat{x}_\alpha(t)$ процесса $x(t)$, доставляющую минимум функционалу

$$m(t) = M[(z, x(t) - \hat{x}_\alpha(t))_n^2], \tag{4.1.18}$$

где $\hat{x}_\alpha(t) = \int\limits_0^t h_\alpha(t,\tau)y_\alpha(\tau)\,d\tau$. Интеграл здесь понимается как и в соотношении (1.1.11), а равенства (4.1.1) и (4.1.18), как и раньше, в смысле негативного пространства.

Регуляризованная задача фильтрации (4.1.1), (4.1.17), (4.1.18) для каждого фиксированного $\alpha > 0$ является обычной задачей Калмана-Бьюси. Для этой задачи справедлива теорема двойственности (теорема 3.3), которую можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4.5 *Задача оценки вектора состояния системы (4.1.1) по наблюдениям (4.1.17) эквивалентна нахождению закона управления $H(t,\tau)$ линейной детерминированной системой*

$$\frac{d\varphi(t,\tau)}{d\tau} = -F^m(\tau)\varphi(t,\tau) - C^m(\tau)H^m(t,\tau) \tag{4.1.19}$$

с начальным условием

$$\varphi(t,\tau)|_{\tau=t} = \varphi(t,t) = z,\ z \in E_n; \tag{4.1.20}$$

при этом $H(t,\tau)$ – минимизирует функционал

$$l(H) = \varphi^m(t,0)P_0\varphi(t,0) + \int\limits_0^t H(t,\tau)S_\alpha(\tau)H^m(t,\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t \varphi^m(t,\tau)G(\tau)Q(\tau)G^m(t)\varphi(t,\tau)\,d\tau. \tag{4.1.21}$$

Закон управления $H(t,\tau)$ связан с импульсной переходной функцией фильтра $h_\alpha(t,\tau)$ соотношением

$$H(t,\tau) = -z^m h_\alpha(t,\tau). \tag{4.1.22}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.3.

Также справедлива теорема, устанавливающая связь между решением матричного уравнения Риккати и оптимальным управлением $H(t,\tau)$. А именно,

Теорема 4.6 *Пусть матричная функция $P(\tau)$ удовлетворяет уравнению Риккати*

$$\frac{dP(\tau)}{d\tau} = F(\tau)P(\tau) + P(\tau)F^m(\tau) + G(\tau)Q(\tau)G^m(\tau) - P(\tau)C^m(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau)C(\tau)P(\tau), \quad P(0) = P_0. \tag{4.1.23}$$

Тогда оптимальное управление $H(t,\tau)$ для задачи (4.1.19)-(4.1.21) удовлетворяет соотношению

$$H(t,\tau) = -\varphi^m(t,\tau)P(\tau)C^m(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau). \tag{4.1.24}$$

Доказательство теоремы дословно повторяет выкладки раздела 3.1.2.

Далее покажем, что оценка $\hat{x}_\alpha(t)$ может быть определена не только из соотношения (4.1.14), для реализации которого требуется знание импульсной переходной матрицы $h_\alpha(t,\tau)$, удовлетворяющей уравнению Винера-Хопфа (4.1.19), но и из решения некоторого дифференциального уравнения, что упрощает вычислительный процесс.

Теорема 4.7 *Для линейной оценки* $\hat{x}(t)$ *, удовлетворяющей соотношению (4.1.4), существует последовательность оценок* $\{\hat{x}_\alpha(t)\}_{\alpha>0}$, *являющаяся решением уравнения*

$$\frac{d\hat{x}_\alpha(\tau)}{d\tau} = F(\tau)\hat{x}_\alpha(\tau) + P(\tau)C^m(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau)[y(\tau) - C(\tau)\hat{x}_\alpha(\tau)],$$

$$\hat{x}_\alpha(0) = 0,\ 0 \le \tau \le t < \infty, \tag{4.1.25}$$

и такая, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\{M[(z, x(t) - \hat{x}_\alpha(t))_n^2] - M[(z, x(t) - \hat{x}(t))_n^2]\} = 0,\ \forall z \in E_n.$$

Доказательство. Подставляя (4.1.24) в (4.1.22) находим, что $z^m h_\alpha(t,\tau) = \varphi^m(t,\tau)P(\tau)C^m(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau)$.

Обозначим $P(\tau)C^m(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau) = K_\alpha(\tau)$ и подставим вместо $\varphi^m(t,\tau)$ его значение $\varphi^m(t,\tau) = z^m\Psi(t,\tau)$, где $\Psi(t,\tau)$ — фундаментальная матрица системы (4.1.25),

$$\frac{d\Psi(t,\tau)}{dt} = [F(t) - K_\alpha(t)C(t)]\Psi(t,\tau),\ \Psi(\tau,\tau) = I. \tag{4.1.26}$$

Тогда $h_\alpha(t,\tau) = \Psi(t,\tau)K_\alpha(\tau)$ и выражение для оценки можно записать в виде

$$\hat{x}_\alpha(t) = \int_0^t h_\alpha(t,\tau)y(\tau)\,d\tau = \int_0^t \Psi(t,\tau)K_\alpha(\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Дифференцируя (в обобщенном смысле) это выражение по t , применяя (4.1.26) и теорему 4.4, получаем:

$$\frac{d\hat{x}_\alpha(t)}{dt} = \Psi(t,t)K_\alpha(t)y(t) + \int_0^t \frac{d\Psi(t,\tau)}{dt}K_\alpha(\tau)y(\tau)\,d\tau = F(t)\hat{x}_\alpha(t) + K_\alpha(t)[y(t) - C(t)\hat{x}_\alpha(t)],$$

откуда находим (4.1.25).

4.2 Решение задачи линейной оптимальной фильтрации при наблюдениях с чисто цветным шумом

Алгоритм решения задачи линейной оптимальной фильтрации с цветным шумом в измерениях разработан в 1977 году В.П. Диденко и О.Е. Цитрицким [12,3,25] .

1. Постановка задачи.

Случайный n –мерный процесс $x(\tau)$ генерируется путем пропускания векторного случайного процесса $u(\tau)$ с компонентами в виде белых гауссовских шумов (возможно, вырожденных) через линейную нестационарную систему

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x(\tau) + G(\tau)u(\tau),\ x(0) = x_0, 0 \le \tau \le t < \infty. \tag{4.2.1}$$

Наблюдается случайный векторный процесс $\{y(\tau),\ 0 \le \tau \le t\}$ размерности $m \le n$

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau) + w(\tau), \tag{4.2.2}$$

где $F(\tau)$, $G(\tau)$ и $C(\tau)$ — матрицы соответствующих размерностей. Элементы матриц $G(\tau)$ и $C(\tau)$ — гладкие функции, а матрицы $F(\tau)$ — кусочно-непрерывные. Решение задачи Коши понимается в смысле определения 1.6 (см. стр. 12), а равенство в (4.2.1) – в смысле негативного пространства. Шум $w(\tau)$ предполагается чисто цветным, то есть все элементы его ковариационной матрицы $K_w(\tau,\sigma) = M[w(\tau)w^m(\sigma)]$, $\sigma \in [0,t]$ принадлежат декартову произведению $L_2[0,t] \times L_2[0,t]$, а компоненты его реализаций с вероятностью 1 – пространству интегрируемых с квадратом на $[0,t]$ функций.

Требуется найти последовательность n –мерных векторов

$$\{\hat{x}_\alpha(t) \equiv \int_0^t h_\alpha(t,\tau)y(\tau)\,d\tau\}_{\alpha>0} \tag{4.2.3}$$

с матрицами $h_\alpha(t,\tau)$, все элементы которых при любом $\alpha > 0$ принадлежат позитивному пространству $W_2^1[0,t]$, и такую, что

$$\lim_{\alpha\to 0} M[(z, x(t) - \hat{x}_\alpha(t))_n^2] = m(t),\ \forall z \in E_n, \tag{4.2.4}$$

где

$$m(t) = \inf_h \{M[(z, x(t) - \hat{x}(t))_n^2] \mid \hat{x}(t) = \int_0^t h(t,\tau) y(\tau)\, d\tau\}; \tag{4.2.5}$$

нижняя грань берется по всем матрицам $h(t,\tau)$ с элементами из $W_2^1[0,t]$ по переменной τ. Шумы $u(\tau)$, $w(\tau)$ и случайный вектор x_0 имеют нулевые средние и некоррелированы между собой, причем

$$M[u(\tau)u^m(\sigma)] = Q(\tau)\delta(\tau-\sigma),\ M[w(\tau)w^m(\sigma)] = K_w(\tau,\sigma),\ M[x_0 x_0^m] = P_0,$$

матрицы $Q(\tau)$ и P_0 — симметрические и неотрицательно определены, элементы матрицы $Q(\tau)$ — гладкие функции.

2. Алгоритм решения задачи.

Пусть $\{\varphi_i(\tau)\}_{i=1}^\infty$ — произвольный ортогональный базис в $L_2[0,t]$ и

$$K_N(\tau,\sigma) = \sum_{i,j=1}^N \varphi_i(\tau) C_{ij} \varphi_j(\sigma) = M_N^m(\tau) A_N M_N(\sigma),$$

где C_{ij} — матрица, состоящая из коэффициентов Фурье элементов матрицы $K_w(\tau,\sigma)$:

$$M_N^m(\tau) = [\varphi_1(\tau)I_m \ \ \varphi_2(\tau)I_m \ \ \cdots \ \ \varphi_N(\tau)I_m],$$

I_m — m-мерная единичная матрица,

$$A_N = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}.$$

Введем обозначения: $W(t) = \begin{bmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & A_N \end{bmatrix}$, $V(\tau) = [C(\tau)Z(\tau) \ \ M_N^m(\tau)]$, $Z(\tau)$ — матрица, столбцы которой являются линейно независимыми решениями ситемы

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x(\tau),$$

$$B(t) = Z^{-1}(0)P_0\{Z^{-1}(0)\}^m + \int_0^t Z^{-1}(\tau)G(\tau)Q(\tau)G^m(\tau)\{Z^{-1}(\tau)\}^m d\tau.$$

Теорема 4.8 *Существует последовательность функций $\{\hat{x}_\alpha(t)\}_{\alpha>0}$ вида (4.2.3), где параметр $\alpha = \alpha(N)$ подбирается для каждого N в соответствии с теорией регуляризации, причем последовательность $\{\hat{x}_\alpha(t)\}_{\alpha>0}$ такая, что выполняется (4.2.4). Для каждой пары $(\alpha; N)$ вектор-функция $\hat{x}_\alpha(t) = \hat{x}_{\alpha(N)}(t)$ удовлетворяет линейному векторному дифференциальному уравнению*

$$\frac{d\hat{x}_\alpha(t)}{dt} = F(t)\hat{x}_\alpha(t) + \alpha^{-1}[Q_1(t)C^m(t) + Q_2(t)M_N(t)][y(t) - V(t)v_\alpha(t)],\ \hat{x}_\alpha(0) = 0. \tag{4.2.6}$$

Вектор $v_\alpha(t)$ является решением линейного векторного дифференциального уравнения

$$\begin{gathered}\frac{dv_\alpha(t)}{dt} = \alpha^{-1}[V(t)P_1(t) + V(t)W(t)]^m[y(t) - V(t)v_\alpha(t)], \\ v_\alpha(0) = 0,\end{gathered} \tag{4.2.7}$$

причем

$$\begin{gathered}\frac{dP_1(t)}{dt} = -\alpha^{-1}[V(t)P_1(t) + V(t)W(t)]^m[V(t)P_1(t) + V(t)W(t)], \\ P(0) = 0.\end{gathered} \tag{4.2.8}$$

Матрицы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ являются блоками симметрической матрицы

$$P_2(t) = \begin{bmatrix} Q_1(t) & Q_2(t) \\ Q_2^m(t) & Q_3(t) \end{bmatrix},$$

удовлетворяющей матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \begin{bmatrix} F(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_2(t) + P_2(t) \begin{bmatrix} F^m(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(t)Q(t)G^m(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} -$$

$$-\alpha_{-1} P_2(t)[C(t) \;\; M_N^m(t)]^m [C(t) \;\; M_N^m(t)] P_2(t), \tag{4.2.9}$$

$$P_2(0) = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & A_N \end{bmatrix}.$$

Таким образом, алгоритм построения оценки $\hat{x}_\alpha(t)$ случайного процесса $x(t)$ при фиксированных α и N принимает следующий вид.

Уравнение линейного фильтра – это дифференциальные уравнения (4.2.6) и (4.2.7). Неизвестные коэффициенты этих уравнений находим, решая матричные уравнения (4.2.8) и (4.2.9) типа Риккати. На этом заканчиваются предварительные вычисления. После этого поступающие наблюдения $y(t)$ сначала подаем на вход линейной системы (4.2.7) и определяем вектор $v_\alpha(t)$. Затем этот вектор и наблюдения $y(t)$ подставляем в (4.2.6) и находим оценку $\hat{x}_\alpha(t)$.

Подробное обоснование алгоритма дано в [12], [25, стр. 105-136].

5 Оценки точности решения. Выбор параметра регуляризации

В работах [16, 25, 3] и разделе 4 отмечено, что задача линейной оптимальной фильтрации (задача построения оптимальной в смысле минимума среднеквадратической ошибки линейной оценки случайного процесса) при наличии цветного шума в наблюдениях некорректно поставлена. Для ее решения разработан регуляризирующий алгоритм, который приводит к регуляризованному фильтру Калмана-Бьюси. Алгоритм основан на идее регуляризации уравнения Винера-Хопфа, а именно, вместо уравнения

$$\mathcal{B}u = f \tag{5.0.1}$$

рассматривается регуляризованное уравнение Винера-Хопфа

$$\mathcal{B}u_\alpha + \alpha u_\alpha = f, \alpha > 0, \tag{5.0.2}$$

где α - параметр регуляризации.

Решение u_α уравнения (5.0.2) доставляет минимум функционалу

$$\varphi(u) = ||\mathcal{B}u - f||_0^2 + \alpha\langle u, \mathcal{B}u\rangle,\ \alpha > 0 \tag{5.0.3}$$

и определяет импульсную переходную матрицу-функцию линейного оптимального фильтра. Последовательность $\{u_\alpha(t,\tau)\}_{\alpha>0}$ решений (5.0.2) при $\alpha \to 0$ сходится к импульсной переходной функции $u_0(t,\tau)$, удовлетворяющей уравнению (5.0.1) (см. теорему 4.3) и задающей решение задачи линейной оптимальной фильтрации (теорема 4.4).

В изложенном в разделе 4.1 алгоритме знание импульсной переходной функции, а следовательно, и решения уравнения (5.0.2) не требуется, при этом слабой сходимости $\{u_\alpha(t,\tau)\}_{\alpha>0} \to u_0(t,\tau)$ при $\alpha \to 0$ достаточно для среднеквадратической сходимости регуляризованных оценок к решению задачи фильтрации (теорема 4.4, см. стр. 62).

5.1 Оценки точности решения задачи линейной оптимальной фильтрации

В этом разделе приводится теорема о сходимости оценок и получены оценки точности решения задачи линейной оптимальной фильтрации в случае приближенного задания исходных данных при использовании регуляризирующего алгоритма, приведенного в разделе 4.1.

Постановка задачи. Пусть некоторый векторный n–мерный случайный процесс $x(\tau)$ ($0 \le \tau \le t < \infty$) генерируется системой

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau)x(\tau) + G(\tau)u(\tau),\ x(0) = x_0, \tag{5.1.1}$$

где $u(\tau)$ - белый гауссовский шум со следующими статистиками:
$M[u(\tau)] = 0$, $M[u(\tau)u^m(\sigma)] = Q(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $Q(\tau) = Q^m(\tau)$, $Q(\tau) \ge 0$, $\tau, \sigma \in [0,t]$, x_0 — случайный гауссовский вектор, $M[x_0] = 0$, $M[x_0 x_0^m] = P_0$, $P_0 = P_0^m$, $P_0 \ge 0$, $M[u(\tau)x_0^m] = 0$. Равенство (5.1.1) понимается в смысле негативного пространства.

Наблюдается m–мерный процесс $\{y(\tau), 0 \le \tau \le t\}$, связанный с $x(\tau)$ соотношением

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau) + w(\tau), \tag{5.1.2}$$

где $C(\tau)$ — матрица наблюдений, $w(\tau)$ — гауссовский вырожденный белый шум,

$$M[w(\tau)] = 0,\ M[w(\tau)u^m(\sigma)] = 0,\ M[w(\tau)x_0^m] = 0,\ M[w(\tau)w^m(\sigma)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\tau) \end{bmatrix} \delta(\tau-\sigma),$$

где $R(\tau)$ — матрица интенсивности q-мерного белого гауссовского шума, $R(\tau) > 0$, $R(\tau) = R^m(\tau)$ ($0 \le q \le m \le n$).

Вместо множества исходных данных

$$\Delta = \{F(\tau), G(\tau), Q(\tau), P_0, C(\tau), R(\tau)\}$$

известна совокупность их приближений

$$\Delta_\varepsilon = \{F_\varepsilon(\tau), G_\varepsilon(\tau), Q_\varepsilon(\tau), P_{0\varepsilon}, C_\varepsilon(\tau), R_\varepsilon(\tau)\}.$$

Матрицы $Q_\varepsilon(\tau)$, $P_{0\varepsilon}$ и $R_\varepsilon(\tau)$ — симметрические и неотрицательно определенные. Множество Δ_ε таково, что справедливо соотношение:

$$\max_i\{\|\mathcal{I}_i - \mathcal{I}_{i\varepsilon}\|,\ \mathcal{I}_i \in \Delta,\ \mathcal{I}_{i\varepsilon} \in \Delta_\varepsilon\} \le \varepsilon, \tag{5.1.3}$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторая константа, $\|\cdot\|$ — матричная норма в $L_2[0,t]$.

Требуется по наблюдениям $\{y(\tau), 0 \le \tau \le t\}$ построить последовательность оценок $\{\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(\tau)\}_{\alpha>0}$ процесса $x(\tau)$ в точке $\tau = t$, удовлетворяющую соотношению

$$\lim_{\alpha\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} M[(z, x(t) - \hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t))_n^2] = m(t), \tag{5.1.4}$$

где

$$m(t) = \inf_h\{M[(z, x(t) - \int_0^t h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau)_n^2],\ h^m(t,\tau)z \in W_2^1[0,t]\},$$

z — произвольный элемент из E_n, $h(t,\tau)$ — импульсная переходная матрица, интеграл в последнем выражении понимается в смысле (1.1.11).

Теорема 5.1 *Последовательность оценок $\{\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(\tau)\}_{\alpha>0}$, для которых выполняется (5.1.4), может быть найдена из уравнения*

$$\frac{\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(\tau)}{d\tau} = F_\varepsilon(\tau)\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(\tau) + P_\varepsilon(\tau)C_\varepsilon^m(\tau)S_{\varepsilon\alpha}^{-1}(\tau)[y(\tau) - C_\varepsilon(\tau)\hat{x}(\tau)],\ \hat{x}_{\varepsilon\alpha}(0) = 0,$$

где $P_\varepsilon(\tau)$ удовлетворяет матричному уравнению Риккати

$$\frac{dP_\varepsilon(\tau)}{d\tau} = P_\varepsilon(\tau)F_\varepsilon^m(\tau) + F_\varepsilon(\tau)P_\varepsilon(\tau) + G_\varepsilon(\tau)Q_\varepsilon(\tau)G_\varepsilon^m(\tau) - P_\varepsilon(\tau)C_\varepsilon(\tau)S_{\varepsilon\alpha}^{-1}(\tau)C_\varepsilon^m(\tau)P_\varepsilon(\tau),\ P_\varepsilon(0) = P_{0\varepsilon},$$

$$S_{\varepsilon\alpha}(\tau) = \begin{bmatrix} \alpha I_{m-q} & 0 \\ 0 & \alpha I_q + R_\varepsilon(\tau) \end{bmatrix},$$

I_{m-q}, I_q — единичные матрицы размера $(m-q)\times(m-q)$ и $q\times q$ соответственно, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.4, при этом

$$\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t) = \int_0^t Dh_{\varepsilon\alpha}(t,\tau)j^*y(\tau)\,d\tau; \tag{5.1.5}$$

здесь $h_{\varepsilon\alpha}(t,\tau)$ — решение уравнения Винера- Хопфа

$$K_{x\varepsilon}(t,\sigma)C_\varepsilon^m(\sigma) = \int_0^t h_{\varepsilon\alpha}(t,\tau)C_\varepsilon(\tau)K_{x\varepsilon}(\tau,\sigma)C_\varepsilon^m(\sigma)\,d\tau + h_{\varepsilon\alpha}(t,\sigma)S_{\varepsilon\alpha}(\sigma), \tag{5.1.6}$$

где $K_{x\varepsilon}(\tau,\sigma) = M[x_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon^m(\tau)]$, $x_\varepsilon(\tau)$ — решение дифференциального уравнения (5.1.1) с исходными данными Δ_ε. Уравнение (5.1.6) можно записать в векторной форме

$$\mathcal{B}_\varepsilon u_{\varepsilon\alpha} + \alpha u_{\varepsilon\alpha} = f_\varepsilon, \tag{5.1.7}$$

где

$$u_{\varepsilon\alpha}(t,\tau) = h^m_{\varepsilon\alpha}(t,\tau)z,\ f_\varepsilon(t,\sigma) = C_\varepsilon(\sigma)K^m_{x\varepsilon}(t,\sigma)z,\ z \in E_n,$$

$$\mathcal{B}_\varepsilon u = \int_0^t C_\varepsilon(\sigma)K^m_{x\varepsilon}(\tau,\sigma)C^m_\varepsilon(\tau)u(\tau)\,d\tau + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_\varepsilon(\tau) \end{bmatrix}^m u(\tau). \tag{5.1.8}$$

Решение уравнения (5.1.7) минимизирует функционал

$$\varphi_\varepsilon(u) = \|\mathcal{B}_\varepsilon u - f_\varepsilon\|_0^2 + \alpha\langle u, \mathcal{B}_\varepsilon u\rangle.$$

Имеет место

Теорема 5.2 *Оценки точности решения задачи линейной оптимальной фильтрации задаются неравенствами*

$$M[(z,x(t)-\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t))_n^2] \le M[(z,x(t)-\hat{x}_\alpha(t))_n^2] + 2\frac{\varepsilon_f^2 + \varepsilon_{\mathcal{B}}^2\|u_{\varepsilon\alpha}\|^2_{-10}}{\alpha} \to m(t),\ \alpha\to 0,\ \varepsilon\to 0,\ \frac{\varepsilon^2}{\alpha}\to 0, \tag{5.1.9}$$

где

$$\varepsilon_f = \varepsilon\|K_{x\varepsilon}\| + (\varepsilon+\|C_\varepsilon\|)\varepsilon_x,\ \varepsilon_{\mathcal{B}} = \varepsilon(1+\|K^m_{x\varepsilon}C^m_\varepsilon\|) + (\varepsilon+\|C_\varepsilon\|)[\varepsilon_x\|C_\varepsilon\| + (\varepsilon_x+\|K_{x\varepsilon}\|)\varepsilon],$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_\phi|P_{0\varepsilon}|\|\Phi_\varepsilon\| + (\varepsilon_\phi\|\Phi_\varepsilon\|)\{\varepsilon\|\Phi_\varepsilon\| + (\varepsilon+|P_{0\varepsilon}|)\varepsilon_\phi\} + \varepsilon_\phi\|G_\varepsilon Q_\varepsilon G^m_\varepsilon\|\|\Phi_\varepsilon\|+$$

$$+\Big[\varepsilon\|Q_\varepsilon G^m_\varepsilon\|\|\Phi_\varepsilon\| + (\varepsilon+\|G_\varepsilon\|\Big(\varepsilon\|G_\varepsilon\|\|\Phi_\varepsilon\| + (\varepsilon+\|Q_\varepsilon\|)(\varepsilon\|\Phi_\varepsilon\| + (\varepsilon+\|G_\varepsilon\|)\varepsilon_\phi)\Big)\Big](\varepsilon_\phi+\|\Phi_\varepsilon\|),$$

$$\varepsilon_\phi^2 = 2\varepsilon^2 e^{ct}\|\Phi_\varepsilon\|, c>0, c=const,$$

$\Phi_\varepsilon(\tau,\sigma)$ — *фундаментальная матрица решений системы (5.1.1) с исходными данными* Δ_ε .

Если выполняются условия леммы 3.2, то верны соотношения

$$c_0\|u\|^2_{-10} \le \langle u, \mathcal{B}u\rangle \le c_1\|u\|^2_{-10},$$

где c_0 *и* c_1 — *положительные константы и оценки принимают вид:*

$$M[(z,x(t)-\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t))_n^2] \le \{\sqrt{m(t)} + \sqrt{\alpha c'}\|K_x\|\|C\|\|z\|_n+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\sqrt{(\varepsilon_f^2 + \varepsilon_B^2\|P_{\hat{x}\varepsilon\alpha}\|\|z\|_n^2}\}^2 \to 0,\ \text{если}\ \alpha\to 0, \varepsilon\to 0,\ \frac{\varepsilon^2}{\alpha}\to 0, \tag{5.1.10}$$

или

$$M[(z,x(t)-\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t))_n^2] \le \{\sqrt{m(t)} + \sqrt{\alpha c'}(\varepsilon_x+\|K_{x\varepsilon}\|)(\varepsilon+\|C_\varepsilon\|)\|z\|_n+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\sqrt{(\varepsilon_f^2 + \varepsilon_B^2\|P_{\hat{x}\varepsilon\alpha}\|\|z\|_n^2}\}^2 \to 0,\ \text{если}\ \alpha\to 0, \varepsilon\to 0,\ \frac{\varepsilon^2}{\alpha}\to 0, \tag{5.1.11}$$

где $P_{\hat{x}\varepsilon\alpha}(t) = M[\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t)\hat{x}^m_{\varepsilon\alpha}(t)]$.

Доказательство. В выражении $\psi(t) = M[(z,x(t)-\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t))_n^2]$ прибавим и вычтем $\hat{x}_\alpha(t)$ под знаком скалярного произведения, тогда, используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\psi(t) \le M[(z,x(t)-\hat{x}_\alpha(t))_n^2] + M[(z,\hat{x}_\alpha(t)-\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t))_n^2]+$$

$$+2\{M[(z,x(t)-\hat{x}_\alpha(t))_n^2]M[(z,\hat{x}_\alpha(t)-\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t))_n^2]\}^{1/2}, \tag{5.1.12}$$

здесь $\hat{x}_\alpha(t)$ — решение задачи линейной оптимальной фильтрации при точных исходных данных,

$$\hat{x}_\alpha(t) = \int_0^t Dh_\alpha(t,\tau)j^*y(\tau)\,d\tau, \tag{5.1.13}$$

$h_\alpha(t,\tau)$ – удовлетворяет уравнению

$$K_x(t,\sigma)C^m(\sigma) = \int_0^t h_\alpha(t,\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\,d\tau + h_\alpha(t,\sigma)S_\alpha(\sigma), \tag{5.1.14}$$

$K_x(\tau,\sigma)=M[x(\tau)x^m(\sigma)]$, $x(\tau)$ — решение (5.1.1). Для точных данных уравнение (5.1.14) имеет вид:

$$\mathcal{B}u_\alpha+\alpha u_\alpha=f. \tag{5.1.15}$$

Оценим выражение $M[(z,\hat{x}_\alpha(t)-\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t))^2_n]$.

Учитывая представления (5.1.5) и (5.1.13) для $\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t)$, $\hat{x}_\alpha(t)$ и обозначения (5.1.8), находим, что

$$M[(z,\hat{x}_\alpha(t)-\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t))^2_n]=\langle u_\alpha-u_{\varepsilon\alpha},\mathcal{B}(u_\alpha-u_{\varepsilon\alpha})\rangle.$$

Вычтем из (5.1.7) уравнение (5.1.15). Тогда

$$\mathcal{B}\Delta u_\alpha+\alpha\Delta u_\alpha=f_\varepsilon-f+(\mathcal{B}-\mathcal{B}_\varepsilon)u_{\varepsilon\alpha},\ \Delta u_\alpha=u_{\varepsilon\alpha}-u_\alpha,$$

решение этого уравнения доставляет минимум функционалу

$$\mathcal{L}(u)=||\mathcal{B}u-\{f_\varepsilon-f+(\mathcal{B}-\mathcal{B}_\varepsilon)u_{\varepsilon\alpha}\}||^2_0+\alpha\langle u,\mathcal{B}u\rangle, u\in W^{-1}_{20}[0,t].$$

Справедливо неравенство $\mathcal{L}(\Delta u_\alpha)\le\mathcal{L}(0)$, из которого следует, что

$$\alpha\langle\Delta u_\alpha,\mathcal{B}\Delta u_\alpha\rangle\le||f_\varepsilon-f+(\mathcal{B}-\mathcal{B}_\varepsilon)u_{\varepsilon\alpha}||^2_0\le 2(||f_\varepsilon-f||^2_0+||\mathcal{B}-\mathcal{B}_\varepsilon||^2||u_{\varepsilon\alpha}||^2_{-10}), \tag{5.1.16}$$

где $||u_{\varepsilon\alpha}||_{-10}$ — норма в $W^{-1}_{20}[0,t]$, а $||\cdot||$ — операторная норма:

$$||\mathcal{B}||=\sup_u\{\langle u,\mathcal{B}u\rangle|\ u\in W^{-1}_{20}[0,t],\ ||u||_{-10}=1\}.$$

Оценим нормы $||f_\varepsilon-f||_0$ и $||\mathcal{B}-\mathcal{B}_\varepsilon||$. Так как

$$f_\varepsilon(t,\sigma)-f(t,\sigma)=\{[C_\varepsilon(\sigma)-C(\sigma)]K^m_{x\varepsilon}(t,\sigma)-C(\sigma)[K_{x\varepsilon}(t,\sigma)-K_x(t,\sigma)]^m\}z$$

и $||C_\varepsilon(\sigma)-C(\sigma)||<\varepsilon,$ то

$$||f_\varepsilon-f||_0\le\varepsilon||K_{x\varepsilon}||+(\varepsilon+||C_\varepsilon||)||K_{x\varepsilon}-K_x||||z||_n, \tag{5.1.17}$$

где $||\cdot||=\left(\int\limits_0^t|\cdot|^2\,d\tau\right)^{1/2}$, а $|\cdot|^2$ – сумма квадратов элементов матрицы.

По формуле Коши из (5.1.1) имеем:

$$\begin{gathered}x(t)=\Phi(t,0)x_0+\int\limits_0^t\Phi(t,\tau)G(\tau)u(\tau)\,d\tau,\\ x_\varepsilon(t)=\Phi_\varepsilon(t,0)x_{0\varepsilon}+\int\limits_0^t\Phi_\varepsilon(t,\tau)G_\varepsilon(\tau)u_\varepsilon(\tau)\,d\tau,\end{gathered} \tag{5.1.18}$$

причем

$$\begin{gathered}\frac{d\Phi(t,\tau)}{dt}=F(t)\Phi(t,\tau),\ \Phi(\tau,\tau)=I,\\ \frac{d\Phi_\varepsilon(t,\tau)}{dt}=F_\varepsilon(t)\Phi_\varepsilon(t,\tau),\ \Phi_\varepsilon(\tau,\tau)=I,\end{gathered} \tag{5.1.19}$$

I — единичная матрица. Используя (5.1.18), (5.1.19), находим выражение для разности ковариационных матриц случайных процессов $x(\tau)$ и $x_\varepsilon(\tau)$:

$$K_{x\varepsilon}(\tau,\sigma)-K_x(\tau,\sigma)=\Phi_\varepsilon(\tau,0)P_{0\varepsilon}\Phi^m_\varepsilon(\sigma,0)-\Phi(\tau,0)P_0\Phi(\sigma,0)+$$

$$+\int\limits_0^{\min(\tau,\sigma)}\Phi_\varepsilon(\tau,s)G_\varepsilon(s)Q_\varepsilon(s)G^m_\varepsilon(s)\Phi^m_\varepsilon(\sigma,s)\,ds-\int\limits_0^{\min(\tau,\sigma)}\Phi(\tau,s)G(s)Q(s)G^m(s)\Phi^m(\sigma,s)\,ds.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к выше приведенному выражению, после несложных преобразований получаем

$$||K_{x\varepsilon}-K_x||\le|\Phi_\varepsilon(t,0)-\Phi(t,0)|\,|P_{0\varepsilon}|\,|\Phi_\varepsilon(t,0)|+|\Phi_\varepsilon(t,0)|\{\varepsilon|\Phi_\varepsilon(t,0)|+|P_0|\,|\Phi_\varepsilon(t,0)-\Phi(t,0)|\}+$$

$$+\|\Phi_\varepsilon - \Phi\|\|G_\varepsilon Q_\varepsilon G_\varepsilon^m\|\|\Phi_\varepsilon\| + \|\Phi_\varepsilon\|\Big(\varepsilon\|Q_\varepsilon G_\varepsilon^m\|\|\Phi_\varepsilon\| + \|G\|[\varepsilon\|G_\varepsilon\|\|\Phi_\varepsilon\| + \|G\|\|\Phi_\varepsilon - \Phi\|]\Big). \tag{5.1.20}$$

Далее оценим норму разности $\|\Phi_\varepsilon(t,\tau) - \Phi(t,\tau)\|$.

Введем обозначения $\Psi(t,\sigma) = \Phi_\varepsilon(\tau,\sigma) - \Phi(\tau,\sigma)$. Справедливо уравнение

$$\begin{gathered}\frac{d\Psi(\tau,\sigma)}{d\tau} = F(\tau)\Psi(\tau,\sigma) + \{F_\varepsilon(\tau) - F(\tau)\}\Phi_\varepsilon(\tau,\sigma),\\ \Psi(\sigma,\sigma) = 0,\ \Psi(\tau,\sigma) = 0 \text{ при } \tau < \sigma.\end{gathered} \tag{5.1.21}$$

Умножим (5.1.21) на произвольный единичный вектор $z \in E_n$; обозначим $v(\tau,\sigma) = \Psi(\tau,\sigma)z$, $g(\tau,\sigma) = \Phi_\varepsilon(\tau,\sigma)z$, тогда (5.1.21) примет вид

$$\frac{dv(\tau,\sigma)}{d\tau} = F(\tau)v(\tau,\sigma) + \{F_\varepsilon(\tau) - F(\tau)\}g(\tau,\sigma),$$

$$v(\sigma,\sigma) = 0,\ v(\tau,\sigma) = 0 \text{ при } \tau < \sigma.$$

Справедлива оценка

$$\left\|\frac{dv}{d\tau}\right\|_{-1t} \le \|Fv\|_{-1t} + \|(F_\varepsilon - F)g\|_{-1t}.$$

Возведем в квадрат обе части этой оценки и, используя известное неравенство $|2ab| \le a^2 + b^2$, получаем

$$\left\|\frac{dv}{d\tau}\right\|^2_{-1t} \le 2(\|Fv\|^2_{-1t} + \|(F_\varepsilon - F)g\|^2_{-1t}),$$

где оператор $\frac{d\cdot}{d\tau} \equiv D_t^*$ определен на $L_2[0,t]$ и действует в $W_{2t}^{-1}[0,t]$, причем $\|D_t^* v\|_{-1t} = \|v\|_0$ для любых $v \in L_2[0,t]$ [25]. Так как по построению элементы матриц $\Phi_\varepsilon(\tau,\sigma)$, $\Phi(\tau,\sigma)$ и $v(\tau,\sigma)$ принадлежат по обоим аргументам $L_2[0,t]$, то

$$\|v\|_0^2 \le 2(\|Fv\|^2_{-1t} + \|(F_\varepsilon - F)g\|^2_{-1t}), \tag{5.1.22}$$

а норму $\|Fv\|^2_{-1t}$ можно оценить следующим образом

$$\|Fv\|^2_{-1t} \le c_1 \int_0^t \int_0^t |v(\tau,s)|^2\, ds d\tau,\ c_1 = \lim_{t\to\infty} \int_0^t |F(s)|^2\, ds. \tag{5.1.23}$$

Неравенство (5.1.23) следует из определения нормы в негативном пространстве

$$\|Fv\|_{-1t} = \sup_y \{|\int_0^t y^m(s)F(s)v(s,\sigma)\, ds|,\ y \in W_{2t}^1[0,t], \|y\|_{1t} = 1\}$$

и соотношений

$$|\int_0^t y^m(s)F(s)v(s,\sigma)\, ds| = |\int_0^t y^m(s)\frac{d}{ds}\int_0^t F(\tau)v(\tau,\sigma)\, d\tau ds| =$$

$$= |-\int_0^t \frac{dy^m(s)}{ds}\int_0^s F(\tau)v(\tau,\sigma)\, d\tau ds| \le \left\|\frac{dy}{ds}\right\|_0 \left(\int_0^t |\int_0^s F(\tau)v(\tau,\sigma)\, d\tau|^2\, ds\right)^{1/2} \le$$

$$\le \|y\|_{1t}\left(\int_0^t \left[\int_0^s |F(\tau)|^2 d\tau \int_0^s |v(\tau,\sigma)|^2 d\tau\right] ds\right)^{1/2} \le \sqrt{c_1}\|y\|_{1t}\left(\int_0^t \int_0^s |v(\tau,\sigma)|^2\, d\tau ds\right)^{1/2}.$$

Тогда (5.1.22), с учетом (5.1.23), запишется в виде

$$\|v\|_0^2 \le 2c_1 \int_0^t \int_0^s |v(\tau,\sigma)|^2\, d\tau ds + 2\|(F_\varepsilon - F)g\|^2_{-1t}. \tag{5.1.24}$$

Для неравенства (5.1.24) справедлива лемма Грануолла: если $\varrho(t)$ и $\sigma(t)$ неотрицательные функции, для которых выполняется неравенство

$$\varrho(t) \le c\int\limits_0^t \varrho(s)\,ds + \sigma(t),\ c = const,\ c > 0,$$

то имеет место неравенство $\varrho(t) \le e^{ct}\sigma(t)$.

Таким образом, справедливы соотношения

$$\|v\|_0^2 \le 2e^{2ct}\|(F_\varepsilon - F)g\|_{-1t}^2 \le 2\varepsilon^2\|g\|_{-1t}^2 e^{2ct},$$

верные для любых $z \in E_n$, а значит, верна оценка

$$\|F_\varepsilon - F\|^2 \le 2\varepsilon^2 e^{2ct}\|\Phi_\varepsilon\|^2 = \varepsilon_\Phi^2 \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где $c = 4(\varepsilon + \lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t |F_\varepsilon(\tau)|^2\,d\tau))$. Из этого неравенства и оценок $\|Q\| \le \varepsilon + \ +\|Q_\varepsilon\|$, $\|G\| \le \varepsilon + \|G_\varepsilon\|$ следует, что

$$\|K_{x\varepsilon} - K_x\| \le \varepsilon_\Phi|P_{0\varepsilon}|\,\|\Phi_\varepsilon\| + (\varepsilon_\Phi + \|\Phi_\varepsilon\|)\{\varepsilon\|\Phi_\varepsilon\| + (\varepsilon + |P_{0\varepsilon}|)\varepsilon_\Phi\} +$$
$$+(\varepsilon_\Phi + \|\Phi_\varepsilon\|)\Big(\varepsilon\|Q_\varepsilon G_\varepsilon^m\|\|\Phi_\varepsilon\| + (\varepsilon + \|G_\varepsilon\|)\Big[\varepsilon\|G_\varepsilon\|\|\Phi_\varepsilon\| +$$
$$+(\varepsilon + \|Q_\varepsilon\|)[\varepsilon\|\Phi_\varepsilon\| + (\varepsilon + \|G_\varepsilon\|)\varepsilon_\Phi]\Big]\Big) = \varepsilon_x \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \qquad (5.1.25)$$

с учетом (5.1.25) оценку (5.1.17) можно записать в виде

$$\|f_\varepsilon - f\| \le \varepsilon\|K_{x\varepsilon}\| + (\varepsilon + \|C_\varepsilon\|)\varepsilon_x = \varepsilon_f \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \qquad (5.1.26)$$

Оценим норму $\|\mathcal{B}_\varepsilon - \mathcal{B}\|$. Обозначим: $\Delta Su = [S_\varepsilon(\sigma) - S(\sigma)]u(\sigma)$,

$$S_\varepsilon(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_\varepsilon(\sigma) \end{bmatrix},\ S(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\sigma) \end{bmatrix},$$

$$\Delta\mathcal{B}u = \int\limits_0^t [C_\varepsilon(\sigma)K_{x\varepsilon}^m(\tau,\sigma)C_\varepsilon^m(\tau) - C(\sigma)K_x^m(\tau,\sigma)C^m(\tau)]u(\tau)\,d\tau$$

и определим оценки норм $\|\Delta S\|$ и $\|\Delta\mathcal{B}\|$. По определению операторной нормы

$$\|\Delta S\| = \sup_u\left\{\frac{|(u,\Delta Su)_0|}{\|u\|_0^2}, u \in L_2[0,t], \|u\|_0 \ne 0\right\}. \qquad (5.1.27)$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к числителю (5.1.27) и учитывая (5.1.3), получаем

$$|(u,\Delta Su)_0| \le \|\Delta S\|\|u\|_0^2 \le \varepsilon\|u\|_0^2,\ \forall u \in L_2[0,t]$$

и

$$\|\Delta S\| = \|S_\varepsilon - S\| \le \varepsilon. \qquad (5.1.28)$$

Аналогично

$$|(u,\mathcal{B}u)_0| \le \|C_\varepsilon K_{x\varepsilon}^m C_\varepsilon^m - CK_x^m C^m\|\|u\|_0^2 = \|(C_\varepsilon - C)K_{x\varepsilon}^m C_\varepsilon^m + C(K_{x\varepsilon} - K_x)^m C^m - \varepsilon + CK_{x\varepsilon}^m(C_\varepsilon - C)^m\|u\|_0^2 \le$$
$$\le \{\varepsilon\|K_{x\varepsilon}^m C_\varepsilon^m\| + (\varepsilon + \|C_\varepsilon\|)[\varepsilon\|C_\varepsilon\| + (\varepsilon + \|K_{x\varepsilon}\|)\varepsilon]\}\|u\|_0^2,$$
$$\forall u \in L_2[0,t],$$

отсюда

$$\|\Delta B\| \le \varepsilon\|K_{x\varepsilon}^m C_\varepsilon^m\| + (\varepsilon + \|C_\varepsilon\|)[\varepsilon + \|K_{x\varepsilon}^m\|)\varepsilon]. \qquad (5.1.29)$$

При выводе (5.1.29) использовались неравенства (5.1.3), (5.1.25) и соотношения $\|C\| \le \varepsilon + \|C_\varepsilon\|$, $\|K_x\| \le \varepsilon + \|K_{x\varepsilon}\|$.

Из неравенств (5.1.28) и (5.1.29) следует, что

$$\|\mathcal{B}_\varepsilon - \mathcal{B}\| \le \varepsilon(1 + \|K^m_{x\varepsilon} C^m_\varepsilon\|) + (\varepsilon + \|C_\varepsilon\|)[\varepsilon_x \|C_\varepsilon\| + (\varepsilon_x + \|K_{x\varepsilon}\|)\varepsilon] = \varepsilon_B \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{5.1.30}$$

Подставим (5.1.30) и (5.1.26) в (5.1.16). Тогда

$$\alpha\langle u_\alpha - u_{\varepsilon\alpha}, \mathcal{B}(u_\alpha - u_{\varepsilon\alpha})\rangle \le 2(\varepsilon_f^2 + \varepsilon_B^2 \|u_{\varepsilon\alpha}\|^2_{-10})$$

и

$$M[(z, \hat{x}_\alpha(\tau) - \hat{x}_{\varepsilon\alpha}(\tau))^2_n] = \langle u_\alpha - u_{\varepsilon\alpha}, \mathcal{B}(u_\alpha - u_{\varepsilon\alpha})\rangle \le \frac{2}{\alpha}(\varepsilon_f^2 + \varepsilon_B^2 \|u_{\varepsilon\alpha}\|^2_{-10}) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{5.1.31}$$

Из (5.1.31) и (5.1.12) следует (5.1.9).

Далее оценим первое слагаемое в правой части неравенства (5.1.12). Добавим и вычтем в выражении $M[(z, x(t) - \hat{x}_\alpha(t))^2_n]$ оценку $\hat{x}(t)$, удовлетворяющую соотношению

$$m(t) = \inf_h \bigl\{ M[(z, x(t) - \hat{x}(t))^2_n] \mid \hat{x}(t) = \int_0^t h(t,\tau) y(\tau)\, d\tau,\ h^m(t,\tau) z \in W_2^1[0,t],\ \forall z \in E_n \bigr\}.$$

Тогда, после несложных преобразований, имеем

$$M[(z, x(t) - \hat{x}_\alpha(t))^2_n] \le m(t) + M[(z, \hat{x}(t) - \hat{x}_\alpha(t))^2_n] + 2\{m(t) M[(z, \hat{x}(t) - \hat{x}_\alpha(t))^2_n]\}^{1/2}. \tag{5.1.32}$$

Найдем оценку выражения $M[(z, \hat{x}(t) - \hat{x}_\alpha(t))^2_n]$. Так как вектор оценки $\hat{x}(t) = \int\limits_0^t h(t,\tau) y(\tau)\, d\tau$, а $\hat{x}_\alpha(t) = \int\limits_0^t h_\alpha(t,\tau) y(\tau)\, d\tau$ (интегралы понимаются так же, как и в (1.1.11)), то

$$M[(z, \hat{x}(t) - \hat{x}_\alpha(t))^2_n] = \int_0^t \int_0^t z^m [h(t,\tau) - h_\alpha(t,\tau)] K_y(\tau,\sigma) [h(t,\tau) - h_\alpha(t,\tau)]^m z\, d\tau d\sigma =$$

$$= \langle u_0 - u_\alpha, \mathcal{B}(u_0 - u_\alpha)\rangle, \tag{5.1.33}$$

где u_0 — решение (5.0.1), u_α — решение (5.1.15), $K_y(\tau,\sigma) = M[y(\tau) y^m(\sigma)]$.

Для оценки билинейной формы в (5.1.33) вычитаем (5.0.1) из (5.0.2). В результате получаем уравнение

$$\mathcal{B}(u_0 - u_\alpha) + \alpha(u_0 - u_\alpha) = \alpha u_0, \tag{5.1.34}$$

где $u_0(\tau)$ принадлежит, как уже отмечалось ранее, $W_{20}^{-1}[0,t]$ и равенство в (5.1.34) понимается в смысле негативного пространства.

Применим оператор $\mathcal{B}$ к выражению (5.1.34) и обозначим через v_α значение оператора $\mathcal{B}$ на элементе $u_0 - u_\alpha$, то есть $v_\alpha = \mathcal{B}(u_0 - u_\alpha)$. Тогда имеем, что

$$\mathcal{B} v_\alpha + \alpha v_\alpha = \alpha f.$$

Решение этого уравнения доставляет минимум функционалу

$$J(v) = \|\mathcal{B} v - \alpha f\|_0^2 + \alpha(v, \mathcal{B} v)_0$$

и справедливо неравенство $J(v_\alpha) \le J(0)$, то есть

$$\|\mathcal{B} v_\alpha - \alpha f\|_0^2 + \alpha(v_\alpha, \mathcal{B} v_\alpha)_0 \le \alpha^2 \|f\|_0^2,$$

или

$$(v_\alpha, \mathcal{B} v_\alpha)_0 \le \alpha \|f\|_0^2. \tag{5.1.35}$$

Пусть выполняются условия леммы 3.2. Тогда для $\forall v \in L_2[0,t]$ справедливо неравенство $(v, \mathcal{B} v)_0 \ge$ $\ge c_0 \|v\|_0^2$ и соотношение (5.1.35) принимает вид: $\sqrt{c_0}\|v_\alpha\|_0 \le \sqrt{\alpha}\|f\|_0$. Учитывая то, что $v_\alpha = \mathcal{B}(u_0 - u_\alpha)$, получаем выражение: $\sqrt{c_0}\|\mathcal{B}(u_0-u_\alpha)\|_0 \le \sqrt{\alpha}\|f\|_0$. Так как $\mathcal{B}$ — ограниченный, положительно определенный оператор (см. леммы 3.1 и 3.2), то

$$\langle u_0-u_\alpha, \mathcal{B}(u_0-u_\alpha)\rangle \le \alpha\frac{c_1}{c_0}\|f\|_0^2 \le \alpha c'\|K_x\|^2\|C\|^2\|z\|_n^2,\ c'>0,\ c'=const.$$

Заменив u_0, u_α и $\mathcal{B}$ их значениями, получим:

$$M[(z,\hat{x}(t)-\hat{x}_\alpha(t))_n^2] \le \alpha c'\|K_x\|^2\|C\|^2\|z\|_n^2. \tag{5.1.36}$$

Подставим (5.1.36) в (5.1.32), имеем

$$M[(z,x(t)-\hat{x}_\alpha(t))_n^2] \le m(t)+\alpha c'\|K_x\|^2\|C\|^2\|z\|_n^2+$$

$$+2\{\sqrt{\alpha c'}\sqrt{m(t)}\|K_x\|\|C\|\|z\|_n\} = \{\sqrt{m(t)}+\sqrt{\alpha}\sqrt{c'}\|K_x\|\|C\|\|z\|_n\}^2. \tag{5.1.37}$$

Теперь можно оценить соотношение (5.1.12). Заменяя в (5.1.12) выражения $M[(z,x(t)-\hat{x}_\alpha(t))_n^2]$ и $M[(z,\hat{x}_\alpha(t)-\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t))_n^2]$ оценками (5.1.31) и (5.1.37), находим

$$M[(z,x(t)-\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t))_n^2] \le [\sqrt{m(t)}+\sqrt{\alpha}\sqrt{c'}\|K_x\|\|C\|\|z\|_n]^2+\frac{2}{\alpha}(\varepsilon_f^2+\varepsilon_B^2\|u_{\varepsilon\alpha}\|_{-10}^2)+$$

$$+2[\sqrt{m(t)}+\sqrt{\alpha}\sqrt{c'}\|K_x\|\|C\|\|z\|_n]\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\sqrt{(\varepsilon_f^2+\varepsilon_B^2\|u_{\varepsilon\alpha}\|_{-10}^2} =$$

$$= \{\sqrt{m(t)}+\sqrt{\alpha}\sqrt{c'}\|K_x\|\|C\|\|z\|_n+\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\sqrt{(\varepsilon_f^2+\varepsilon_B^2\|u_{\varepsilon\alpha}\|_{-10}^2}\}^2. \tag{5.1.38}$$

В правой части (5.1.38) присутствуют величины: $\|K_x\|$ — норма ковариационной матрицы случайного вектора $x(t)$, $\|C\|$ — норма матрицы наблюдения, которые не могут быть вычислены по заданным приближенным данным Δ_ε и поэтому их необходимо исключить. Легко показать, что справедливы неравенства

$$\|K_x\| \le (\varepsilon_B+1)\|K_{x\varepsilon}\|, \tag{5.1.39}$$

$$\|C\| \le (\varepsilon+1)\|C_\varepsilon\|. \tag{5.1.40}$$

Кроме того, если оператор $\mathcal{B}$ — положительно определен, то

$$\|u_{\varepsilon\alpha}\|_{10}^2 \le c\|P_{\hat{x}\varepsilon\alpha}\|\|z\|_n^2, \tag{5.1.41}$$

где $P_{\hat{x}\varepsilon\alpha}=M[\hat{x}_{\varepsilon\alpha}(t)\hat{x}_{\varepsilon\alpha}^m(t)]$ и $z^mP_{\hat{x}\varepsilon\alpha}z=\langle u_{\varepsilon\alpha},\mathcal{B}_\varepsilon u_{\varepsilon\alpha}\rangle \le c\|u_{\varepsilon\alpha}\|_{-10}^2$.

Подставив (5.1.39),(5.1.40) и (5.1.41) в правую часть (5.1.38), получаем (5.1.11). Неравенство (5.1.10) следует из (5.1.38) и (5.1.31). Теорема полностью доказана.

5.2 Выбор квазиоптимального параметра регуляризации

При решении задач линейной оптимальной фильтрации часто бывает трудно сказать что-либо определенное о точности задания исходных данных или их оценки задаются грубо. В этих случаях, если параметр регуляризации выбирать согласно критерию невязки или обобщенного принципа невязки [33,20,21], решение задачи линейной оптимальной фильтрации будет значительно отличаться от точного решения [33].

В работах [33,22] для выбора параметра регуляризации предлагаются два способа, которые не зависят в явном виде от ошибок задания исходных данных – критерий квазиоптимальности и критерий отношения. В общем случае эти критерии доказаны численно (проверены на большом числе примеров), а в случае точного задания оператора для алгебраических систем доказательство приведено в [22]. Недостатком этих методов является то, что они работают в области, близкой к оптимальному параметру регуляризации – локально [33,22] и поэтому их следует применять в сочетании с другими способами выбора параметра регуляризации, такими, как критерий невязки [20], критерий минимума мажоратных оценок [33].

В этом параграфе получены соотношения для выбора квазиоптимального значения параметра регуляризации при решении задачи линейной оптимальной фильтрации.

К р и т е р и й к в а з и о п т и м а л ь н о с т и [33,22].

В качестве квазиоптимального значения параметра регуляризации α_k *выбираем наименьшее из значений* $\alpha > 0$ *, реализующих локальный минимум функции*

$$J(\alpha) = \left\| \alpha \frac{\partial u_\alpha(t,\sigma)}{\partial \alpha} \right\|_{-10}.$$

Величину $\alpha \dfrac{\partial u_\alpha(t,\sigma)}{\partial \alpha}$ находят, обычно, из соотношений:

$$\mathcal{B} u_\alpha + \alpha u_\alpha = f, \tag{5.2.1}$$

$$\mathcal{B}\left(\alpha \frac{\partial u_\alpha(t,\sigma)}{\partial \alpha}\right) + \alpha \left(\alpha \frac{\partial u_\alpha(t,\sigma)}{\partial \alpha}\right) = f - \mathcal{B} u_\alpha. \tag{5.2.2}$$

Уравнение (5.2.2) получено следующим образом: дифференцируя по α (5.2.1) имеем

$$\mathcal{B}\left(\frac{\partial u_\alpha(t,\sigma)}{\partial \alpha}\right) + \alpha \left(\frac{\partial u_\alpha(t,\sigma)}{\partial \alpha}\right) + u_\alpha = 0,$$

далее, умножим полученное соотношение на α и заменим в нем αu_α выражением из (5.2.1).

Уравнения (5.2.1) и (5.2.2), в силу свойств оператора $\mathcal{B}$ — неотрицательности и симметричности – имеют единственные решения.

Для задачи линейной оптимальной фильтрации интегральные уравнения (5.2.1) и (5.2.2) можно свести к дифференциальным, что позволяет упростить вычислительный процесс.

Теорема 5.3 *В качестве оптимального значения параметра регуляризации* α_k *выбирается наименьшее из значений* $\alpha > 0$ *, реализующих локальный минимум функции*

$$J(\alpha) = \left\| \alpha \frac{\partial h^m_\alpha(t,\tau)}{\partial \alpha} z \right\|_{-10},$$

здесь z *— произвольный элемент из* E_n *, величина* $\dfrac{\partial h^m_\alpha(t,\tau)}{\partial \alpha} = v_\alpha(t,\tau)$ *находится из соотношений*

$$\frac{\partial v_\alpha(t,\tau)}{\partial t} = [F(t) - K(t)C(t)] v_\alpha(t,\tau) - v_\alpha(t,t) C(t) h_\alpha(t,\tau), \tag{5.2.3}$$

$$v_\alpha(t,t) = \int_0^t h_\alpha(t,\tau) h^m_\alpha(t,\tau) d\tau C^m(t) S^{-1}_\alpha(t) + P_\alpha(t) C^m(t) \frac{\partial S^{-1}_\alpha(t)}{\partial \alpha}, \tag{5.2.4}$$

а импульсная переходная матрица $h_\alpha(t,\tau)$ *удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial h_\alpha(t,\tau)}{\partial t} = [F(t) - K(t)C(t)] h_\alpha(t,\tau), \tag{5.2.5}$$

$$h_\alpha(t,t) = P_\alpha(t) C^m(t) S^{-1}_\alpha(t) = K(t), \tag{5.2.6}$$

где матрица $P_\alpha(t)$ *— решение уравнения Риккати*

$$\begin{gathered} \frac{dP_\alpha(t)}{dt} = P_\alpha(t) F^m(t) + F(t) P_\alpha(t) + G(t) Q(t) G^m(t) - P_\alpha(t) C^m(t) S^{-1}_\alpha(t) C(t) P(t), \\ P_\alpha(0) = P_0. \end{gathered} \tag{5.2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцировав по t уравнение Винера-Хопфа

$$K_x(t,\tau) C^m(\sigma) = \int_0^t h_\alpha(t,\tau) C(\tau) K_x(\tau,\sigma) C^m(\sigma)\, d\tau + h_\alpha(t,\sigma) S_\alpha(\sigma), \tag{5.2.8}$$

получаем

$$\frac{\partial K_x(t,\sigma)}{\partial t}C^m(\sigma) = h_\alpha(t,t)C(t)K_x(t,\sigma)C^m(\sigma) + \int\limits_0^t \frac{\partial h_\alpha(t,\tau)}{\partial t}C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\,d\tau + \frac{\partial h_\alpha(t,\sigma)}{\partial t}S_\alpha(\sigma). \quad (5.2.9)$$

Так как

$$\frac{\partial K_x(t,\sigma)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}M[x(t)x^m(\sigma)] = M[\frac{dx(t)}{dt}x^m(\sigma)]$$

производная в последнем выражении понимается в обобщенном смысле (т.е. в смысле негативного пространства), то, подставляя в это выражение вместо $\dfrac{dx(t)}{dt}$ его значение из (5.1.1) и учитывая некоррелированность процессов $x(\sigma)$ и $u(t)$ при $t > \sigma$, находим, что

$$\frac{\partial K_x(t,\sigma)}{\partial t} = F(t)K_x(t,\sigma).$$

Тогда выражение (5.2.9) можно записать следующим образом

$$\int\limits_0^t \Big(\frac{\partial h_\alpha(t,\tau)}{\partial t} - [F(t) - h_\alpha(t,t)C(t)]h_\alpha(t,\tau)\Big)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\,d\tau +$$

$$+\Big(\frac{\partial h_\alpha(t,\tau)}{\partial t} - [F(t) - h_\alpha(t,t)C(t)]h_\alpha(t,\tau)\Big)S_\alpha^{-1}(\sigma) = 0.$$

Это равенство выполняется только при условии, что

$$\frac{\partial h_\alpha(t,\tau)}{\partial t} = [F(t) - h_\alpha(t,t)C(t)]h_\alpha(t,\tau),$$

причем

$$h_\alpha(t,t) = P_\alpha(t)C^m(t)S_\alpha^{-1}(t),$$

где $P_\alpha(t)$ решение уравнения Риккати (5.2.7) (см. теорему 4.7 и теорему 4.5). Соотношения (5.2.5) и (5.2.7) доказаны.

Дифференцируем по α уравнение (5.2.8), получаем

$$\int\limits_0^t \frac{\partial h_\alpha(t,\tau)}{\partial \alpha}C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\,d\tau + \frac{\partial h_\alpha(t,\sigma)}{\partial \alpha}S_\alpha(\sigma) + h_\alpha(t,\sigma) = 0. \quad (5.2.10)$$

Определим дифференциальное уравнение для вычисления величины
$v_\alpha(t,\tau) = \dfrac{\partial h_\alpha(t,\tau)}{\partial \alpha}$. Для этого продифференцируем (5.2.10) по t. Тогда

$$v_\alpha(t,t)C(t)K_x(t,\sigma)C^m(\sigma) + \int\limits_0^t \frac{\partial v_\alpha(t,\tau)}{\partial t}C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\,d\tau + \frac{\partial v_\alpha(t,\sigma)}{\partial t}S_\alpha(\sigma) + \frac{\partial h_\alpha(t,\sigma)}{\partial t} = 0. \quad (5.2.11)$$

Заменим в первом слагаемом выражение $K_x(t,\sigma)C^m(\sigma)$ согласно (5.2.8). Учитывая соотношения (5.2.5) и (5.2.10), после некоторых преобразований получаем однородное интегральное уравнение

$$\int\limits_0^t \Big[\frac{\partial v_\alpha(t,\tau)}{\partial t} + v_\alpha(t,t)C(t)h_\alpha(t,\tau) - \{F(t) - K(t)C(t)\}v_\alpha(t,\tau)\Big]C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)\,d\tau +$$

$$+\Big[\frac{\partial v_\alpha(t,\sigma)}{\partial t} + v_\alpha(t,t)C(t)h_\alpha(t,\sigma) - \{F(t) - K(t)C(t)\}v_\alpha(t,\sigma)\Big]S_\alpha(\sigma) = 0,$$

которое имеет лишь тривиальное решение, так как матрица $S_\alpha(\sigma) > 0$, а матрица $C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)$ — неотрицательное ядро интегрального оператора. Таким образом,

$$\frac{\partial v_\alpha(t,\sigma)}{\partial t} = [F(t) - K(t)C(t)]v_\alpha(t,\sigma) - v_\alpha(t,t)C(t)h_\alpha(t,\sigma).$$

Соотношение (5.2.3) доказано, но в нем неизвестно $v_\alpha(t,t)$. Для определения $v_\alpha(t,t)$ дифференцируем по α выражение (5.2.6)

$$\frac{\partial h_\alpha(t,t)}{\partial \alpha} = v_\alpha(t,t) = \frac{\partial P_\alpha(t)}{\partial \alpha} C^m(t) S_\alpha^{-1}(t) + P_\alpha(t) C^m(t) \frac{\partial S_\alpha^{-1}(t)}{\partial \alpha}. \tag{5.2.12}$$

Матрица $P_\alpha(t)$, удовлетворяющая уравнению Риккати (5.2.7), может быть интерпретирована как матрица ковариации ошибки оценивания задачи линейной оптимальной фильтрации, у которой: вектор состояния $x(\tau)$ формируется системой (5.1.1), а наблюдается процесс $y_\alpha(\tau)$, связанный с $x(\tau)$ соотношением

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau) + w(\tau) + \sqrt{\alpha}\xi(\tau), \tag{5.2.13}$$

где $\xi(\tau)$ — m-мерный белый гауссовский шум с нулевым средним, ковариацией $M[\xi(\tau)\xi^m(\sigma)] = I_m\delta(\tau-\sigma)$ и некоррелированный с процессами $u(\tau)$, $w(\tau)$ и x_0.

Ошибка оценивания задачи (5.1.1), (5.2.13) определяется выражением

$$x_\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}_{\alpha y}(t), \tag{5.2.14}$$

где

$$\hat{x}_{\alpha y}(t) = \int\limits_0^t D h_\alpha(t,\tau) j^* y_\alpha(\tau)\, d\tau, \tag{5.2.15}$$

а матрица ковариации ошибки оценивания

$$P_\alpha(t) = M[(x(t) - \hat{x}_{\alpha y}(t))(x(t) - \hat{x}_{\alpha y}(t))^m].$$

Дифференцируем $P_\alpha(t)$ по α :

$$\frac{\partial P_\alpha(t)}{\partial \alpha} = M\left[-\frac{\partial \hat{x}_{\alpha y}(t)}{\partial \alpha}(x(t) - \hat{x}_{\alpha y}(t))^m\right] + M\left[(x(t) - \hat{x}_{\alpha y}(t))\left(-\frac{\partial \hat{x}_{\alpha y}(t)}{\partial \alpha}\right)^m\right]. \tag{5.2.16}$$

Вычислим производную $\dfrac{\partial \hat{x}_{\alpha y}(t)}{\partial \alpha}$. Из (5.2.15)

$$\frac{\partial \hat{x}_{\alpha y}(t)}{\partial \alpha} = \int\limits_0^t D v_\alpha(t,\tau) j^* y_\alpha(\tau)\, d\tau + (2\sqrt{\alpha})^{-1} \int\limits_0^t D h_\alpha(t,\tau) j^* \xi(\tau)\, d\tau. \tag{5.2.17}$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (5.2.16). Подставляя в него (5.2.17), имеем

$$M\left[-\frac{\partial \hat{x}_{\alpha y}(t)}{\partial \alpha}(x(t) - \hat{x}_{\alpha y}(t))^m\right] = \int\limits_0^t D v_\alpha(t,\tau) j^* M[y_\alpha(\tau) x^m(t)]\, d\tau +$$

$$+(2\sqrt{\alpha})^{-1} \int\limits_0^t D h_\alpha(t,\tau) j^* M[\xi(\tau)\hat{x}_{\alpha y}(\tau)]\, d\tau - \int\limits_0^t D v_\alpha(t,\tau) j^* M[y_\alpha(\tau)\hat{x}^m_{\alpha y}(t)]\, d\tau -$$

$$-(2\sqrt{\alpha})^{-1} \int\limits_0^t D h_\alpha(t,\tau) j^* M[\xi(\tau)\hat{x}^m_{\alpha y}(t)]\, d\tau. \tag{5.2.18}$$

Так как случайные процессы $\xi(\tau)$ и $x(\tau)$ некоррелированы, то второе слагаемое в (5.2.18) обращается в 0. Далее, согласно (5.2.13),

$$M[y_\alpha(\tau)x^m(t)] = C(\tau)K_x(\tau,t),$$

$$M[y_\alpha(\tau)\hat{x}^m_{\alpha y}(t)] = \int\limits_0^t M[y_\alpha(\tau) y^m_\alpha(\sigma)] h^m_\alpha(t,\sigma)\, d\sigma = S_\alpha(\tau) h^m_\alpha(t,\tau) +$$

$$+\int\limits_0^t C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^m(\sigma)h_\alpha^m(t,\sigma)\,d\sigma = C(\tau)K_x(t,\tau).$$

Последнее равенство следует из (5.2.8). Подставим эти выражения в (5.2.18). Тогда

$$M\left[\frac{\partial\hat{x}_{\alpha y}(t)}{\partial\alpha}(x(t)-\hat{x}_{\alpha y}(t))^m\right] = (2\sqrt{\alpha})^{-1}\int\limits_0^t Dh_\alpha(t,\tau)j^* M[\xi(\tau)\hat{x}_{\alpha y}^m(t)]\,d\tau.$$

Используя (5.2.15) и (5.2.13), находим, что

$$M[\xi(\tau)\hat{x}_{\alpha y}^m(t)]=\int\limits_0^t M[\xi(\tau)x^m(\sigma)]C^m(\sigma)h_\alpha^m(t,\sigma)\,d\sigma+\int\limits_0^t M[\xi(\tau)w^m(\sigma)]h_\alpha^m(t,\sigma)\,d\sigma+$$

$$+\sqrt{\alpha}\int\limits_0^t M[\xi(\tau)\xi^m(\sigma)]h_\alpha^m(t,\sigma)\,d\sigma = \sqrt{\alpha}h_\alpha^m(t,\tau),$$

здесь учитывается некоррелированность процессов $\xi(\tau)$, $x(\tau)$, $w(\tau)$, а также фильтрационное свойство δ–функции Дирака.

Таким образом,

$$M\left[\frac{\partial\hat{x}_{\alpha y}(t)}{\partial\alpha}(x(t)-\hat{x}_{\alpha y}(t))^m\right] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t h_\alpha(t,\tau)h_\alpha^m(t,\tau)\,d\tau.$$

Подставляя это выражение в (5.2.16), получаем

$$\frac{\partial P_\alpha(t)}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}\int\limits_0^t h_\alpha(t,\tau)h_\alpha^m(t,\tau)\,d\tau,$$

откуда имеем

$$v_\alpha(t,t) = \int\limits_0^t h_\alpha(t,\tau)h_\alpha^m(t,\tau)\,d\tau\, C^m(t)S_\alpha^{-1}(t) + P_\alpha(t)C^m(t)\frac{\partial S_\alpha^{-1}(t)}{\partial\alpha}.$$

Теорема доказана.

6 Задача линейной оптимальной фильтрации в системах с распределенными параметрами

Раздел посвящен вопросам решения задачи линейной фильтрации и построению алгоритма определения ее приближенного решения для систем, описываемых уравнениями параболического типа при наличии цветного шума в измерениях.

Восстановлением сигналов в системах с распределенными параметрами занимались Р. Калман [14], А. Бенсуссан [37] и др.. Но в большинстве работ конечный алгоритм приводится в операторной форме, реализация которого на ЭВМ является довольно сложной проблемой. Кроме того, если в наблюдениях присутствует цветной шум, то задача линейной фильтрации является некорректно поставленной и для ее решения необходимо применять регуляризацию.

Одной из первых работ, посвященных вопросу нахождения приближенной оценки вектора состояния системы управления с эллиптическим оператором, является [25], в которой доказана сходимость алгоритма решения в случае белых и цветных шумов в наблюдениях.

Проблеме решения задачи фильтрации для систем, описываемых уравнениями в частных производных в условиях неопределенности, посвящены работы [3,16,17].

6.1 Постановка обобщенной задачи Коши для параболических систем

В данном разделе исследуется задача решения дифференциальных уравнений параболического типа с граничными условиями Неймана в случае, когда правая часть принадлежит пространству обобщенных функций. Подход к решению таких задач разработан в работах [3,25,16].

Пусть в евклидовом пространстве E_n задана замкнутая ограниченная область P с границей $\partial P = \Gamma$, в каждой точке которой существует единственная нормаль $\bar{n}_0$; $C^2(P)$ — множество дважды дифференцируемых в классическом смысле функций $u(x)$ на P ; $C_1^2(P)$ — множество функций $u(x) \in C^2(P)$, для которых выполняется условие

$$\frac{du(x)}{d\nu}\Big|_{x\in\Gamma} = 0, \tag{6.1.1}$$

где ν — конормаль (прямую с направляющими косинусами $\nu_i = \frac{1}{a}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}n_j$, где $a = \left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}n_k\right)^2\right]^{1/2}$, n_j — координаты нормали и проходящую через каждую точку границы Γ называют конормалью). Справедливо соотношение [31]

$$\sum_{i,j=1}^{n}\cos(\bar{n}_0, x_j)a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} = a\sum_{i=1}^{n}\cos(\nu, x_i)\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv a\frac{d}{d\nu},$$

$\frac{d}{d\nu}$ — производная по конормали,

$$a = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\cos(\bar{n}_0, x_j)\right)^2\right]^{1/2}.$$

Введем обозначения: $L_2(P)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций в смысле Лебега на P; $(.,.)_{0P}$, $\|.\|_{0P}$ — скалярное произведение и норма в $L_2(P)$; $W_2^1(P)$ — позитивное соболевское пространство;

$$(u,v)_{1P} = \int\limits_P \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + u(x)v(x)\Big)dP$$

есть скалярное произведение в $W_2^1(P)$; $\|u\|_{1P} = \sqrt{(u,u)_{1P}}$ — норма в $W_2^1(P)$.

Справедливо неравенство $\|u\|_{0P} \le k\|u\|_{1P}$, $\forall u \in W_2^1(P)$, $k = const$.

Рассмотрим на P линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$Nu = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x}(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x}) + c(x)u(x), \tag{6.1.2}$$

где $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^2(P)$, $i,j = 1,...,n$, $c(x) \in C(P)$, $C(P)$ — пространство непрерывных функций на P, $c(x) \ge c_0$ для $\forall x \in P$, $c_0 = \inf\limits_x\{c(x) \mid x \in P\} > 0$.

Предполагаем, что справедливо также неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \lambda\sum_{i=1}^n \xi_i^2, \tag{6.1.3}$$

где λ — положительная константа, ξ_i — произвольные вещественные числа ($i = 1,...,n$).

Соотношения (6.1.1)-(6.1.3) задают в пространстве $L_2(P)$ замкнутый линейный оператор $\mathcal{B}$, такой, что $\mathcal{B}u = Nu$ для $\forall u \in C_1^2(P)$. Оператор $\mathcal{B}$ имеет плотную в $L_2(P)$ область определения $D(\mathcal{B})$, является симметрическим и положительно-определенным, т.е. справедливы соотношения

$$\begin{gathered}(\mathcal{B}u,v)_{0P} = (u,\mathcal{B}v)_{0P},\ \text{для}\ \forall u,v \in D(\mathcal{B});\\ (\mathcal{B}u,u)_{0P} \ge c\,\|\,u\,\|_{0P}^2,\ \text{для}\ \forall u \in D(\mathcal{B}),\ c = const > 0.\end{gathered} \tag{6.1.4}$$

Введем обозначение $(u,v)_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}u,v)_{0P}$, для $\forall u,v \in D(\mathcal{B})$. Пополним $D(\mathcal{B})$ по этому скалярному произведению. Полученное пространство обозначим через $H_{\mathcal{B}}$. Примем это пространство за позитивное $H_{\mathcal{B}} = H_{\mathcal{B}}^+$ и построим по $H_{\mathcal{B}}^+$ и $L_2(P)$ негативное пространство $H_{\mathcal{B}}^-$. Пусть величина $f(x) \in L_2(P)$. Тогда выражение $(f,u)_{0P}$, $u \in H_{\mathcal{B}}^+$ определяет непрерывный функционал на $H_{\mathcal{B}}^+$ (непрерывность следует из (6.1.4)) и

$$|(f,u)_{0P}| = |l_f(u)| \le \|f\|_{0P}\|u\|_{0P} \le c\|f\|_{0P}\|u\|_+,$$

$$f \in L_2(P),\ u \in H_{\mathcal{B}}^+\ (H_{\mathcal{B}}^+ \subset L_2(P)),$$

$\|.\|_+$ — норма в $H_{\mathcal{B}}^+$. Пополним $L_2(P)$ по норме

$$\|f\|_- = \sup_u\Big(\frac{|(f,u)_{0P}|}{\|u\|_+},\ f \in L_2(P),\ u \in H_{\mathcal{B}}^+,\ \|u\|_+ \ne 0\Big).$$

Полученное пополнение задает пространство $H_{\mathcal{B}}^-$. Оператор $\mathcal{B}$ непрерывно действует из $H_{\mathcal{B}}^+$ в $H_{\mathcal{B}}^-$.

Пусть $[0,t]$ — некоторый отрезок и переменная $\tau \in [0,t]$. Определим область $Q = P\times[0,t]$; $L_2(Q)$ — пространство функций $u(\tau,x)$ на Q, отображающих сегмент $[0,t]$ в пространство E_n и таких, что

$$\int\limits_0^t \|u(\tau)\|_{0P}^2\,d\tau = \|\,u\,\|_{0Q}^2 < \infty,$$

$\|.\|_{0Q}$ — норма в $L_2(Q)$.

Рассмотрим на пространстве $L_2(Q)$ дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial\tau} + \mathcal{B}u,\ u \in D(\mathcal{L}_1),$$

где $D(\mathcal{L}_1)$ — множество функций $u(\tau,x)$, заданных в области Q, непрерывно дифференцируемых по $\tau\in[0,t]$, а по переменной $x\in P$ функции $u(\tau,x)\in H^+_{\mathcal{B}}$ и удовлетворяющих условиям

$$u(\tau,x)|_{\tau=0}=0,\ \frac{du(\tau,x)}{d\nu}\Big|_{x\in\Gamma}=0. \tag{6.1.5}$$

Введем обозначения: $W^1_{20}(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1)$ по норме

$$\|u\|_{10Q}=(\int\limits_Q[(\frac{\partial u}{\partial\tau})^2+u\mathcal{B}u]dQ)^{1/2}, \tag{6.1.6}$$

$\|\,.\,\|_{10Q}$, $(.,.)_{10Q}$ — норма и скалярное произведение в позитивном пространстве $W^1_{20}(Q)$; $W^{-1}_{20}(Q)$ — негативное пространство, полученное пополнением $L_2(Q)$ по норме

$$\|v\|_{-10Q}=\sup_u\left[\frac{|(u,v)_{0Q}|}{\|u\|_{10Q}},\ v\in L_2(Q),\ u\in W^1_{20}(Q),\ \|u\|_{10Q}\neq0\right].$$

Обозначим через $D(\mathcal{L}_1^*)$ множество функций $u(\tau,x)$, имеющих хотя бы одну производную в классическом смысле по τ, а по переменной x функции $u(\tau,x)\in H^+_{\mathcal{B}}$ и удовлетворяющих условиям

$$u(\tau,x)|_{\tau=t}=0,\ \frac{du(\tau,x)}{d\nu}\Big|_{x\in\Gamma}=0. \tag{6.1.7}$$

$W^1_{2t}(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1^*)$ по норме (6.1.6). Пусть $W^{-1}_{2t}(Q)$ негативное пространство для $W^1_{2t}(Q)$; $\mathcal{L}_1^*$ — сопряженный оператор к $\mathcal{L}_1$;

$$\mathcal{L}_1^*u\equiv-\frac{\partial u}{\partial\tau}+\mathcal{B}u,\ u\in D(\mathcal{L}_1^*).$$

Расширим операторы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_1^*$ на все пространство $W^1_{20}(Q)$ и $W^1_{2t}(Q)$ соответственно. Расширенные операторы будем обозначать $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$.

Определение 6.1 *Обобщенным решением задачи*

$$\mathcal{L}u=f,\ f\in L_2(Q), \tag{6.1.8}$$

где f — заданная функция, называют функцию $u(\tau,x)\in W^1_{20}(Q)$, для которой существует последовательность функций $\{u_i(\tau,x)\}_{i=1}^\infty$ из множества $D(\mathcal{L}_1)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\|\mathcal{L}u_i-f\|_{-1tQ}\to0,\ \|u_i-u\|_{10Q}\to0,\quad \text{\textit{если} } i\to\infty.$$

Определение 6.2 *Обобщенным решением задачи*

$$\mathcal{L}^*v=g,\ g\in L_2(Q), \tag{6.1.9}$$

где g — заданная функция, называют функцию $v(\tau,x)\in W^1_{2t}(Q)$, для которой существует последовательность $\{v_i(\tau,x)\}_{i=1}^\infty$ функций из множества $D(\mathcal{L}_1^*)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\|\mathcal{L}^*v-g\|_{-10Q}\to0,\ \|v_i-v\|_{10Q}\to0,\ i\to\infty.$$

Лемма 6.1 *Для (6.1.8) и (6.1.9) справедливы неравенства*

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ}\le c_1\|u\|_{10Q},\ u\in W^1_{20}(Q),\ c=const,\ c>0; \tag{6.1.10}$$

$$\|\mathcal{L}^*v\|_{-10Q}\le c_2\|v\|_{1tQ},\ v\in W^1_{2t}(Q),\ c=const,\ c>0. \tag{6.1.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(\tau,x)$ — гладкая функция из позитивного пространства $W^1_{20}(Q)$, а $v(\tau,x)\in W^1_{2t}(Q)$. Тогда справедливо равенство $(v,\mathcal{L}u)_{0Q}=(\mathcal{L}^*v,u)_{0Q}$. Также имеет место соотношение

$$|(u,\mathcal{B}v)_{0P}|\le\sqrt{(u,\mathcal{B}u)_{0P}(v,\mathcal{B}v)_{0P}}.$$

Рассмотрим выражение

$$|(v,\mathcal{L}u)_{0Q}| = \Big|\int\limits_Q \left(\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau}v(\tau,x) + [\mathcal{B}u(\tau,x)]v(\tau,x)\right)dQ\Big| =$$

$$= \Big|-\int\limits_Q \left(u(\tau,x)\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau} + u(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\right)dQ\Big| \le c\|u\|_{10Q}\|v\|_{1tQ},$$

где $c = const$, $c > 0$ и использовано неравенство $\|u\|_{0Q} \le c\,\|u\|_{10Q}$, для любых функций $u \in W_{20}^1(Q)$. По определению нормы в негативном пространстве

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} = \sup_v \left\{\frac{|(v,\mathcal{L}u)_{0Q}|}{\|v\|_{1tQ}},\ \|v\|_{1tQ} \ne 0\right\} \le c_1\|u\|_{0Q} \le c\|u\|_{10Q},$$

$$u \in W_{20}^1(Q),\ v \in W_{2t}^1(Q). \tag{6.1.12}$$

Для произвольной функции $u(\tau,x) \in W_{20}^1(Q)$ неравенство получаем предельным переходом.

Доказательство неравенства (6.1.11) аналогично.

Лемма 6.2 *Для задач (6.1.8) и (6.1.9) справедливы неравенства*

$$c_1\|u\|_{0Q} \le \|\mathcal{L}u\|_{-1tQ}, c_1 = const > 0; \tag{6.1.13}$$

$$c_2\|v\|_{0Q} \le \|\mathcal{L}^*v\|_{-10Q}, c_2 = const > 0. \tag{6.1.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем оператор $\mathcal{J}_t$ в $L_2(Q)$, который на функциях $v(\tau,x) \in W_{20}^1(Q)$ определяется выражением

$$\mathcal{J}_t v(\tau,x) \equiv \int\limits_t^\tau b^{-1}(s)v(s,x)\,ds = u(\tau,x).$$

Функция $u(\tau,x) = \mathcal{J}_t v$ при $\tau = t$ равна 0 и $\frac{\partial u}{\partial \tau}\Big|_{x\in\Gamma} = 0$, т.е. $u \in W_{2t}^1(Q)$. Таким образом, оператор $\mathcal{J}_t$ определен на $W_{20}^1(Q)$ и действует в $W_{2t}^1(Q)$; $b(\tau) = -(1+\tau)$.

Рассмотрим выражение

$$(\mathcal{J}_t v, \mathcal{L}v)_{0Q} = (u,\mathcal{L}v)_{0Q} = \int\limits_Q u(\frac{\partial v}{\partial \tau} + \mathcal{B}v)\,dQ = \int\limits_Q u\frac{\partial}{\partial \tau}[b(\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau}]\,dQ + \int\limits_Q u\mathcal{B}(b(\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau})\,dQ. \tag{6.1.15}$$

Здесь учтено, что $v(\tau,x) = b(\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau}$. Оценим интегралы в правой части. Первый интеграл можно записать в виде

$$\int\limits_Q u\frac{\partial}{\partial \tau}[b(\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau}]\,dQ = \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial \tau}[ub(\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau}]\,dQ - \int\limits_Q b(\tau)\Big(\frac{\partial u}{\partial \tau}\Big)^2 dQ.$$

Согласно формуле Остроградского

$$\int\limits_Q \frac{\partial}{\partial \tau}[u(\tau,x)b(\tau)\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau}]\,dQ = \int\limits_S u(\tau,x)b(\tau)\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau}\cos(\bar{n}_0,\tau)\,dS = 0,$$

где $S = \partial Q$ — граница области Q. Равенство нулю следует из того, что $\cos(\bar{n}_0,\tau)$ отличен от нуля лишь на поверхности P и $P+T$, где T — вектор с координатами $\{\tau, x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0\}$. Но, если $v(0,x) \in P$ и $u(\tau,x) \in P+T$, то $v(0,x) = 0$ и $u(\tau,x) = 0$. Таким образом,

$$\int\limits_Q u(\tau,x)\frac{\partial}{\partial \tau}[b(\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau}]\,dQ = -\int\limits_Q b(\tau)\Big(\frac{\partial u}{\partial \tau}\Big)^2 dQ. \tag{6.1.16}$$

Преобразуем второй интеграл в правой части (6.1.15). Так как

$$\int\limits_Q \frac{\partial}{\partial\tau}[u(\tau,x)b(\tau)\mathcal{B}u(\tau,x)]\,dQ = 2\int\limits_Q u(\tau,x)b(\tau)\mathcal{B}\frac{\partial u}{\partial\tau}\,dQ + \int\limits_Q u(\tau,x)\frac{db(\tau)}{d\tau}\mathcal{B}u(\tau,x)\,dQ,$$

то

$$\int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}[b(\tau)\frac{\partial u}{\partial\tau}]\,dQ = \frac{1}{2}\int\limits_Q \frac{\partial}{\partial\tau}[u(\tau,x)b(\tau)\mathcal{B}u(\tau,x)]\,dQ - \frac{1}{2}\int\limits_Q u(\tau,x)\frac{db(\tau)}{d\tau}\mathcal{B}u(\tau,x)\,dQ. \quad (6.1.17)$$

Используя формулу Остроградского, получаем

$$\int\limits_Q \frac{\partial}{\partial\tau}[u(\tau,x)b(\tau)\mathcal{B}u(\tau,x)]\,dQ = \int\limits_S u(\tau,x)b(\tau)\mathcal{B}u(\tau,x)\cos(\bar n_0,\tau)\,dS = -b(0)\int\limits_P u(0,x)\mathcal{B}u(0,x)\,dP \quad (6.1.18)$$

($u(t,x)=0$; $\cos(\bar n_0,\tau)\neq 0$ лишь на множествах P и $P+T$). Подставив (6.1.16)-(6.1.18) в (6.1.15), получим

$$(\mathcal{J}_t v,\mathcal{L}v)_{0Q} = \int\limits_Q b(\tau)\Big(\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big)dQ - \frac{1}{2}b(0)\int\limits_P u(0,x)\mathcal{B}u(0,x)\,dP - \frac{db(\tau)}{d\tau}u(\tau,x)\mathcal{B}u(\tau,x)\,dQ.$$

Используя явный вид оператора $\mathcal{J}_t$, находим

$$(\mathcal{J}_t v,\mathcal{L}v)_{0Q} = \frac{1}{2}\int\limits_Q \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big)^2 + u\mathcal{B}u\Big]dQ + \int\limits_Q \tau\Big(\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big)^2 dQ + \frac{1}{2}\int\limits_Q\Big(\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big)^2 dQ + \frac{1}{2}\int\limits_P u(0,x)\mathcal{B}u(0,x)\,dP,$$

а так как выражение

$$\int\limits_Q (\tau+\frac{1}{2})\Big(\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big)^2 dQ + \frac{1}{2}\int\limits_P u(0,x)\mathcal{B}u(0,x)\,dP \geq 0,$$

то справедливо неравенство $(\mathcal{J}_t v,\mathcal{L}v)_{0Q} \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{1tQ}$.

Применение обобщенного неравенства Коши-Буняковского дает, что

$$\frac{1}{2}\|u\|^2_{1tQ} \leq (\mathcal{J}_t v,\mathcal{L}v)_{0Q} = (u,\mathcal{L}u)_{0Q} \leq \|u\|_{1tQ}\|\mathcal{L}v\|_{-1tQ},$$

$$\|\mathcal{L}v\|_{-1tQ} \geq \frac{1}{2}\|u\|_{1tQ}.$$

Вновь используя явный вид оператора $\mathcal{J}_t$, получаем

$$\|u\|^2_{1tQ} = \int\limits_Q \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big)^2 + u\mathcal{B}u\Big]dQ = \int\limits_Q \Big[\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_t^\tau \{-(1+s)\}v(s,x)\Big]^2 dQ +$$

$$+\int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}u(\tau,x)\,dQ \geq \int\limits_Q [-(1+\tau)v(\tau,x)]^2 dQ \geq \|v\|^2_{0Q}. \quad (6.1.19)$$

отсюда $\|\mathcal{L}v\|_{-1tQ} \geq c_1\|v\|_{0Q}$.

Для произвольных $v\in L_2(Q)$ неравенство получаем предельным переходом.

Неравенство (6.1.14) можно доказать аналогично.

Теорема 6.1 *Если справедливы оценки (6.1.13) и (6.1.14), то для любых функций $f\in L_2(Q)$ и $g\in L_2(Q)$ существуют единственные обобщенные решения задач (6.1.8) и (6.1.9) соответственно в пространствах $W^1_{20}(Q)$ и $W^1_{2t}(Q)$.*

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$l_f(v) = (v, f)_{0Q}.$$

Используя неравенство из леммы 6.2, находим

$$|l_f(v)| = |(v, f)_{0Q}| \le \|v\|_{0Q}\|f\|_{0Q} \le c\|\mathcal{L}^* v\|_{-10Q},$$

т.е. $l_f(v)$ — непрерывный линейный функционал от $\mathcal{L}^* v$, $v \in D(\mathcal{L}_1^*)$.

Расширим по теореме Хана-Банаха этот функционал на все $W_{20}^{-1}(Q)$. По обобщенной теореме Рисса [25] для линейного непрерывного функционала, определенного на пространстве $W_{20}^{-1}(Q)$, существует функция $u \in W_{20}^1(Q)$ такая, что $l(\rho) = \langle u, \rho\rangle_{0Q}$, для $\forall\rho \in W_{20}^{-1}(Q)$, где $\langle u, \rho\rangle_{0Q}$ — билинейная форма в пространствах $W_{20}^1(Q)$ и $W_{20}^{-1}(Q)$. Пусть $\rho = \mathcal{L}^* v$, где v и u — гладкие функции, удовлетворяющие условиям (6.1.7) и (6.1.5) соответственно. Тогда

$$l(\rho) \equiv \langle u, \rho\rangle_{0Q} = \langle u, \mathcal{L}^* v\rangle = (u, \mathcal{L}^* v)_{0Q} = (\mathcal{L}u, v)_{0Q} = (f, v)_{0Q}.$$

Функции $u(\tau, x)$, удовлетворяющие условиям (6.1.5), плотны в $W_{20}^1(Q)$. Таким образом, существует последовательность $\{u_i(\tau, x)\}_{i=1}^{\infty}$ гладких функций, удовлетворяющих (6.1.5), такая, что $\|u_i - u\|_{10Q} \to 0$, $i \to \infty$. Далее, используя лемму 6.1, находим, что $\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} \to 0$, $i \to \infty$. Существование решения и его единственность доказаны.

Существование и единственность решения задачи (6.1.9) доказываются аналогично.

Определение 6.3 *Обобщенным решением задачи (6.1.8) при* $f \in W_{2t}^{-1}(Q)$ *называют функцию* $u(\tau, x) \in L_2(Q)$ *такую, что для нее существует последовательность гладких функций* $\{u_i(\tau, x)\}_{i=1}^{\infty}$, $u \in W_{20}^1(Q)$, *удовлетворяющих соотношениям* $\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} \to 0$, $\|u_i - u\|_{0Q} \to 0$, $i \to \infty$.

Определение 6.4 *Обобщенным решением задачи (6.1.9) с правой частью из* $W_{20}^{-1}(Q)$ *называют функцию* $v(\tau, x) \in L_2(Q)$ *такую, что для нее существует последовательность функций* $\{v_i(\tau, x)\}_{i=1}^{\infty}$, $v_i \in W_{2t}^1(Q)$, *удовлетворяющих соотношениям* $\|\mathcal{L}^* v - g\|_{-10Q} \to 0$, $\|v_i - v\|_{0Q} \to 0$, $i \to \infty$.

Теорема 6.2 *Если справедливы оценки (6.1.13) и (6.1.14), то для любых функций* $f \in W_{2t}^{-1}(Q)$ *существует единственное обобщенное решение в смысле определения 6.3 задачи (6.1.8); для любых* $g \in W_{2o}^{-1}(Q)$ *существует единственное обобщенное решение в смысле определения 6.4 задачи (6.1.9).*

Доказательство. Пространство $L_2(Q)$ плотно в $W_{2t}^{-1}(Q)$, поэтому для любой $f \in W_{2t}^{-1}(Q)$ в $L_2(Q)$ существует последовательность $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющая соотношению $\|f_i - f\|_{-1tQ} \to 0$, $i \to \infty$. По теореме 6.1 для любой $f \in L_2(Q)$ существует единственное решение $u(\tau, x)$ задачи (6.1.8) в смысле определения 6.1.

Используя неравенство (6.1.13), находим

$$\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} = \|f_i - f\|_{-1tQ} \ge c\|u_i - u\|_{0Q}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $i \to \infty$, устанавливаем существование обобщенного решения задачи (6.1.8) с правой частью из $W_{2t}^{-1}(Q)$ в смысле определения 6.3. Единственность следует из неравенства (6.1.12).

Доказательство второй части теоремы аналогично.

Обратимся теперь к приближенному решению краевой задачи. Рассмотрим вначале задачу (6.1.8), когда правая часть $f \in L_2(Q)$. Ее приближенное решение будем искать в виде

$$u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^{k} y_i(\tau)\rho_i(x), k = 1, 2, ... \tag{6.1.20}$$

где $\rho(x)$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(Q)$, удовлетворяющая условию (6.1.1), а выражение для $y_i(\tau)$ находится из соотношений

$$\begin{aligned}(\frac{\partial u_k}{\partial \tau}, \rho_j)_{0P} + (\mathcal{B}u, \rho_j)_{0P} = (f, \rho_j)_{0P},\\ (u_k(0, x), \rho_j)_{0P} = y_j(0), j = 1, ..., k\end{aligned} \tag{6.1.21}$$

и, используя (6.1.20), получаем, что

$$\begin{gathered}\frac{dy_i(\tau)}{d\tau}+\sum_{s=1}^{k}y_s(\tau)(\mathcal{B}\rho_s,\rho_j)_{0P}=(f,\rho_j)_{0P},\\ y_i(0)=0,\ i,j=1,...,k.\end{gathered}\tag{6.1.22}$$

Это уравнение можно записать в матричной форме

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau}=F_k y(\tau)+G_k(\tau),y(0)=0,\tag{6.1.23}$$

где $y(\tau)$ и $G_k(\tau)$ — векторы столбцы, $y(\tau)=\{y_1(\tau),y_2(\tau),...,y_k(\tau)\}$; $G_k(\tau)=\{(f,\rho_1)_{0P},(f,\rho_2)_{0P}...,(f,\rho_k)_{0P}\}$, F_k — матрица вида

$$F_k=\begin{bmatrix}(\mathcal{B}\rho_1,\rho_1)_{0P} & \cdots & (\mathcal{B}\rho_1,\rho_k)_{0P}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (\mathcal{B}\rho_k,\rho_1)_{0P} & \cdots & (\mathcal{B}\rho_k,\rho_k)_{0P}\end{bmatrix}.$$

Отметим, что решение (6.1.22) понимается в смысле определения 6.1.

Лемма 6.3 *Для любой функции* $f\in L_2(Q)$ *справедливо неравенство*

$$||f||_{0Q}\geq c||u_k||_{10Q}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим обе части соотношения (6.1.21) на $(2t-\tau)\dfrac{dy_j(\tau)}{d\tau}$. Суммируя по j $(j=1,...,k)$ и интегрируя по τ от 0 до t, находим

$$\int_0^t(\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau},\sum_{j=1}^{k}(2t-\tau)\frac{dy_j(\tau)}{d\tau}\rho_j)_{0P}\,d\tau+\int_0^t(\mathcal{B}u_k,\sum_{j=1}^{k}(2t-\tau)\frac{dy_j(\tau)}{d\tau}\rho_j)_{0P}\,d\tau=$$

$$=\int_0^t(f(\tau,x),\sum_{j=1}^{k}(2t-\tau)\frac{dy_j(\tau)}{d\tau}\rho_j)_{0P}\,d\tau,$$

отсюда, используя соотношение (6.1.20), получаем

$$(\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau},(2t-\tau)\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau})_{0Q}+(\mathcal{B}u_k,(2t-\tau)\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau})_{0Q}\equiv$$

$$\equiv(\mathcal{L}u_k,(2t-\tau)\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau})_{0Q}=(f,(2t-\tau)\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau})_{0Q}.$$

Рассмотрим выражение $(\mathcal{B}u_k,(2t-\tau)\dfrac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau})_{0Q}$. Справедливо равенство

$$(\mathcal{B}u_k,(2t-\tau)\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau})_{0Q}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau}\{[2t-\tau]\mathcal{B}u_k,u_k\})_{0Q}+\frac{1}{2}(\mathcal{B}u_k,u_k)_{0Q}.$$

Применяя формулу Остроградского, имеем

$$(\frac{\partial}{\partial\tau}\{[2t-\tau]\mathcal{B}u_k,u_k\})_{0Q}=\int_S(2t-\tau)(\mathcal{B}u_k)u_k\cos(\bar{n}_0,\tau)\,dS=$$

$$=-\int_P 2t(\mathcal{B}u_k(0,x))u_k(0,x)\,dP+\int_{P+T}t(\mathcal{B}u_k(t,x))u_k(t,x)\,d(P+T),$$

но $u(0,x)=0$. Тогда

$$(\mathcal{B}u_k,(2t-\tau)\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau})_{0Q}=\frac{1}{2}(\mathcal{B}u_k,u_k)_{0Q}+\frac{1}{2}t(\mathcal{B}u_k,u_k(t,x))_{0Q}\geq\frac{1}{2}(\mathcal{B}u_k,u_k)_{0Q}.$$

Таким образом,

$$(f,(2t-\tau))\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau})_{0Q}\geq\frac{1}{2}(\mathcal{B}u_k,u_k)_{0Q}+(\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau},(2t-\tau)\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau})_{0Q}\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}(\mathcal{B}u_k,u_k)_{0Q}+c(\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau},\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau})_{0Q}\geq c\|u_k\|^2_{10Q}.$$

Здесь учтено, что $(2t-\tau)\geq 1,\ \ 0<c\leq 1,\ \ c$ — константа.

Применяя обобщенное неравенство Коши-Буняковского к левой части, находим

$$c\|u_k\|^2_{10Q}\leq\|f\|_{0Q}(2t-\tau)\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau}\|_{0Q}\leq\|f\|_{0Q}\|\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau}\|_{0Q},$$

то есть справедливо соотношение

$$\|f\|^2_{0Q}\geq\left(c\frac{\|u_k\|^2_{10Q}}{\|\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau}\|_{0Q}}\right)^2\geq\frac{\|u_k\|^4_{10Q}}{\|\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau}\|^2_{0Q}+(\mathcal{B}u_k,u_k)_{0Q}}=c^2\|u_k\|^2_{10Q}.$$

Последнее неравенство верно, так как $(\mathcal{B}u_k,u_k)_{0Q}\geq 0$. Таким образом, $\|f\|_{0Q}\geq c\|u_k\|_{10Q}$, что и требовалось доказать.

Теорема 6.3 *Пусть* $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ *— полная ортонормированная система гладких функций в* $L_2(P)$, *такая, что* $\left.\frac{d\rho_i(x)}{dx}\right|_{x\in\partial P}=0$, *а* $y_i(\tau)$ *— решение задачи (6.1.23). Тогда*

$$u_k(\tau,x)=\sum_{i=1}^{k}y_i(\tau)\rho_i(x),k=1,2,...,$$

задает в смысле определения 6.1 решение задачи (6.1.8), то есть выполняются соотношения

$$\|u_k-u\|_{10Q}\to 0,\ \|\mathcal{L}u_k-f\|_{-1tQ}\to 0,\ k\to\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 6.3 множество функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничено в $W^1_{20}(Q)$, значит, слабо компактно в $W^1_{20}(Q)$ и можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{k_n}\}_{k_n=1}^{\infty}$ в $W^1_{20}(Q)$. Тогда в силу плотности $W^1_{20}(Q)$ подпоследовательность $\{u_{k_n}\}_{k_n=1}^{\infty}$ слабо сходится к некоторому пределу $\bar{u}\in W^1_{20}(Q)$. Покажем, что $\bar{u}$ — решение задачи (6.1.8). Умножим (6.1.21) на функцию $\varphi(\tau)\in W^1_{20}(Q)$ и после интегрирования от 0 до t получим

$$(\mathcal{L}u_{k_n},\varphi(\tau)\rho_j(x))_{0Q}=(f,\varphi(\tau)\rho_j(x))_{0Q},\ j=1,...,k. \tag{6.1.24}$$

Так как $\|u_{k_n}-\bar{u}\|_{10Q}\to 0,\ k\to\infty,$ то согласно неравенству (6.1.10)

$$\|\mathcal{L}u_{k_n}-\mathcal{L}u_{k_m}\|_{-1tQ}\leq\|u_{k_n}-\bar{u}\|_{10Q}\to 0,\ n\to m.$$

Последовательность $\{\mathcal{L}u_{k_n}\}_{k_n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $W^{-1}_{2t}(Q)$ и имеет предел в $W^{-1}_{2t}(Q)$. Обозначим этот предел $\mathcal{L}\bar{u}$. Функция $\varphi(\tau)\rho_j(x)$ принадлежит $W^{-1}_{2t}(Q)$ и (6.1.24) можно понимать в смысле билинейной формы, т.е. (6.1.24) справедливо, если $\mathcal{L}u_{k_n}\in W^{-1}_{2t}(Q)$. Перейдем к пределу по $k\to\infty$ в (6.1.24) и с учетом непрерывности скалярного произведения в $L_2(Q)$ получим $\langle\mathcal{L}\bar{u},\varphi(\tau)\rho_j(x)\rangle_{tQ}=\langle f,\varphi(\tau)\rho_j(x)\rangle_{0Q}$, $j=1,...,k$. Это выражение можно записать в виде

$$\langle\mathcal{L}\bar{u}-f,\varphi(\tau)\rho_j(x)\rangle_{tQ}=0. \tag{6.1.25}$$

В силу непрерывности $\varphi(\tau)\rho_j(x)$ находим $\mathcal{L}\bar{u}-f=0$, т.е. $\bar{u}$ — решение уравнения (6.1.8), что и требовалось доказать. Следует отметить, что (6.1.25) справедливо и в случае, если $f\in W^{-1}_{2t}(Q)$.

Теорема 6.4 *Пусть* $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ *— полная ортонормированная система гладких функций в* $L_2(P)$, *причем* $\rho_i(x)\in W^1_2(P)$ *и* $\left.\frac{d\varphi_i(x)}{dx}\right|_{x\in\partial P}=0$, *вектор-функция* $f(\tau,x)$ *принадлежит пространству* $W^{-1}_{2t}(Q)$, *и* $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *— последовательность осреднений функции* f, *функция* $y_{i\varepsilon}(\tau)$ *— решение задачи*

$$\frac{dy_{i\varepsilon}(\tau)}{d\tau}+\sum_{j=1}^{k}y_{j\varepsilon}(\tau)(\mathcal{B}\rho_j,\rho_i)_{0P}=(f_\varepsilon,\rho_i)_{0P},\ y_{i\varepsilon}(0)=0,\ i=1,...,k.$$

Тогда справедливы соотношения

$$||u_{k\varepsilon}-u||_{0Q}\to 0,\ ||\mathcal{L}u_{k\varepsilon}-f||_{-1tQ}\to 0,\ k\to\infty,\ \varepsilon\to 0,$$

где $u_{k\varepsilon}(\tau,x)=\sum\limits_{i=1}^{k}y_{i\varepsilon}(\tau)\rho_i(x),\ \ ||f_\varepsilon-f||_{-1tQ}\to 0,\ \varepsilon\to 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем соотношение (6.1.21) для функций f и f_ε

$$\Big(\frac{\partial u_{k\varepsilon}}{\partial\tau},\rho_j\Big)_{0P}+(\mathcal{B}u_{k\varepsilon},\rho_j)_{0P}=(f_\varepsilon,\rho_j)_{0P};$$

$$\Big(\frac{\partial u_{k}}{\partial\tau},\rho_j\Big)_{0P}+(\mathcal{B}u_{k},\rho_j)_{0P}=(f,\rho_j)_{0P}.$$

После вычитания первого из второго получим

$$\Big(\frac{\partial(u_k-u_{k\varepsilon})}{\partial\tau},\rho_j\Big)_{0P}+(\mathcal{B}(u_k-u_{k\varepsilon}),\rho_j)_{0P}=(f-f_\varepsilon,\rho_j)_{0P}. \tag{6.1.26}$$

Умножая (1.1.26) на оператор $\mathcal{J}_t(y_{j\varepsilon}-y_j)=\int\limits_t^\tau[-(1+s)^{-1}][y_{j\varepsilon}(s)-y_j(s)]ds$, и суммируя по j $(j=1,...,k)$, находим

$$\Big(\frac{\partial(u_k-u_{k\varepsilon})}{\partial\tau},\mathcal{J}_t(u_k-u_{k\varepsilon})\Big)_{0Q}+(\mathcal{B}(u_k-u_{k\varepsilon}),\mathcal{J}_t(u_k-u_{k\varepsilon}))_{0Q}=(f-f_\varepsilon,\mathcal{J}_t(u_k-u_{k\varepsilon}))_{0Q}=(f-f_\varepsilon,\mathcal{J}_t(u_k-u_{k\varepsilon})_{0Q}.$$

Оператор $\mathcal{J}_t$ переводит элемент из $L_2(Q)$ в пространство $W^1_{2t}(Q)$, поэтому справедливо равенство

$$\langle\frac{\partial(u_k-u_{k\varepsilon})}{\partial\tau},\mathcal{J}_t(u_k-u_{k\varepsilon})\rangle_{0Q}+\langle\mathcal{B}(u_k-u_{k\varepsilon}),\mathcal{J}_t(u_k-u_{k\varepsilon})\rangle_{0Q}=\langle f-f_\varepsilon,\mathcal{J}_t(u_k-u_{k\varepsilon})\rangle_{0Q},$$

или

$$\langle\mathcal{L}(u_k-u_{k\varepsilon}),\mathcal{J}_t(u_k-u_{k\varepsilon})\rangle_{tQ}=\langle f-f_\varepsilon,\mathcal{J}_t(u_k-u_{k\varepsilon})\rangle_{tQ}.$$

Согласно (6.1.26)

$$\langle\mathcal{L}(u_k-u_{k\varepsilon}),\mathcal{J}_t(u_k-u_{k\varepsilon})\rangle_{tQ}\ge c||\mathcal{J}_t(u_k-u_{k\varepsilon})||^2_{1tQ}.$$

Верно также неравенство

$$\langle f-f_\varepsilon,\mathcal{J}_t(u_k-u_{k\varepsilon})\rangle_{tQ}\ge c||\mathcal{J}_t(u_k-u_{k\varepsilon})||^2_{1tQ},$$

откуда, применяя обобщенное неравенство Коши-Буняковского, находим

$$||f-f_\varepsilon||_{-1tQ}\ge c||\mathcal{J}_t(u_k-u_{k\varepsilon})||_{1tQ}\ge c||u_k-u_{k\varepsilon}||_{0Q} \tag{6.1.27}$$

и по теореме 6.3

$$||u_{k\varepsilon}-u_\varepsilon||_{10Q}\to 0,\ ||\mathcal{L}u_{k\varepsilon}-f_\varepsilon||_{-1tQ}\to 0,\ k\to\infty.$$

Имеет место соотношение (см. лемму 6.2)

$$c_0||u_{k\varepsilon}-u_\varepsilon||_{0Q}\le||\mathcal{L}(u_{k\varepsilon}-u_\varepsilon)||_{-1tQ}, \tag{6.1.28}$$

Так как $||f-f_\varepsilon||_{-1tQ}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, то последовательность $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ фундаментальна. Действительно, $||f_{\varepsilon_1}-f_\varepsilon||_{-1tQ}\to 0$ при $\varepsilon_1,\varepsilon\to 0$ и из (6.1.28) вытекает, что $||u_\varepsilon-u_{\varepsilon_1}||_{0Q}\to 0$, $\varepsilon_1,\varepsilon\to 0$. Обозначим $\bar u=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon$. Покажем, что $\bar u=u$. Неравенство (6.1.13) справедливо для всех $u\in L_2(Q)$, т.е. $||\mathcal{L}u_\varepsilon||_{-1tQ}\ge c||u_\varepsilon||_{0Q}$, следовательно,

$$||\mathcal{L}(u_{k\varepsilon}-u)||_{-1tQ}=||f_\varepsilon-f||_{-1tQ}\ge c||u_\varepsilon-u||_{0Q}. \tag{6.1.29}$$

Переходя к пределу по $\varepsilon\to 0$, находим $0\ge c||\bar u-u||_{0Q}$, но $||\bar u-u||_{0Q}\ge 0$ и поэтому $\bar u=u$.

Оценим норму $||u_k-u||_{0Q}$. Применяя неравенство треугольника, находим

$$||u_k-u||_{0Q}\le||u-u_\varepsilon||_{0Q}+||u_\varepsilon-u_{k\varepsilon}||_{0Q}+||u_{k\varepsilon}-u_k||_{0Q}.$$

Выбирая ε и k так, чтобы $\|u-u_\varepsilon\|_{0Q}\le\frac{\delta}{3}$, $\|u_\varepsilon-u_{k\varepsilon}\|_{0Q}\le\frac{\delta}{3}$, $\|u_{k\varepsilon}-u_k\|_{0Q}\le\ \le\frac{\delta}{3}$, ($\delta>0$, δ — фиксированное произвольное число), и используя соотношение (6.1.27) и теорему 6.3, получаем

$$\|u_k-u\|_{0Q}<\delta\to 0, k\to\infty,$$

где

$$u_k(t,x)=\sum_{i=1}^{k}y_i(\tau)\rho_i(x), k=1,2,...,$$

$$\mathcal{D}y_i\equiv\frac{dy_i(\tau)}{d\tau}-F_ky_i(\tau)=G_k(\tau);\ G_k(\tau)\in W_2^{-1}[0,t],$$

$$y_i(\tau)|_{\tau=0}=0,\ i=1,...,k.$$

Для функции $y(\tau)\in L_2[0,t]$ существует последовательность гладких функций $\{\xi_i(\tau)\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что $\xi_i(0)=0,\ \ i=1,2,...,$ и

$$\|y(\tau)-\xi_i(\tau)\|_0\to 0,\ \|\mathcal{D}\xi_i(\tau)-G_k(\tau)\|_{-10}\to 0,\ i\to\infty.$$

Теорема 6.4 доказана.

6.2 Восстановление сигналов в параболических системах

Рассмотрим задачу восстановления сигналов в системах, описываемых дифференциальными уравнениями параболического типа при наличии цветных шумов в измерениях. Как известно, решение задачи линейной фильтрации в этом случае, вообще говоря, некорректно [33,25]. Ниже предложен метод нахождения приближенного решения задачи, основанный на идее регуляризации А.Н. Тихонова и сведении задачи линейной фильтрации в системах с операторными коэффициентами к задаче линейной фильтрации в системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Доказывается сходимость алгоритма решения задачи.

Пусть, как и раньше, в n-мерном эвклидовом пространстве E_n задана ограниченная замкнутая область P с границей ∂P. В каждой точке границы $\partial P=\Gamma$ существует единственная внешняя нормаль $\bar{n}_0$. $L_2(P)$ — пространство интегрируемых с квадратом в смысле Лебега функций на P (здесь и дальше буква в скобках указывает область или множество, на котором определены функции, принадлежащие рассматриваемому пространству); $(.,.)_{0P}$ — скалярное произведение в $L_2(P)$. На множестве дважды дифференцируемых функций $C^2(P)$ задан оператор $\mathcal{B}$, определенный соотношением

$$Nu=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x}(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x})+c(x)u(x),$$

где $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)\in C^2(P)$, $i,j=1,...,n$, $c(x)\in C(P)$, $C(P)$ — пространство непрерывных функций на P, $c(x)\ge c_0$ для $\forall x\in P$, $c_0=\inf\{c(x)\mid x\in P\}>0$. $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\ge\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, λ — положительная константа, ξ_i — произвольные вещественные числа ($i=1,...,n$). Существует ограниченная производная $\dfrac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}$, $\forall x\in P$; и выполняются граничные условия

$$\frac{du}{d\nu}\Big|_{x\in\Gamma}=0,$$

где $d/d\nu$ — производная по конормали ν.

Оператор $\mathcal{B}$ симметрический и положительно определенный.

Пусть $Q=P\times[0,t]$, где $[0,t]$ — конечный промежуток времени. Рассмотрим в $L_2(Q)$ дифференциальный оператор $\mathcal{L}_1u\equiv\dfrac{\partial u}{\partial\tau}+\mathcal{B}u(\tau,x)$, определенный на множестве $D(\mathcal{L}_1)$ функций $u(\tau,x)$, $0\le\tau\le t$, $x\in P$, непрерывно дифференцируемых по τ и дважды непрерывно дифференцируемых по x, которые удовлетворяют условиям

$$u(0,x)=\frac{du}{d\nu}\Big|_{x\in\Gamma}=0.$$

Через $W^1_{20}(Q)$ обозначим пополнение $D(\mathcal{L}_1)$ по норме

$$\|u\|_{10Q} = (\int\limits_Q [(\frac{\partial u}{\partial \tau})^2 + u\mathcal{B}u]\,dQ)^{1/2}. \tag{6.2.1}$$

Примем $W^1_{20}(Q)$ за позитивное пространство. По $W^1_{20}(Q)$ и $L_2(Q)$ построим пространство $W^{-1}_{20}(Q)$. $W^1_{2t}(Q)$ — пополнение по норме (6.2.1) гладких функций $v(\tau,x)$, удовлетворяющих соотношениям

$$v(t,x) = \frac{dv(x)}{d\nu}\Big|_{x\in\Gamma} = 0.$$

Пусть $W^{-1}_{2t}(Q)$ — негативное пространство, полученное по $W^{-1}_{2t}(Q)$ и $L_(Q)$. Расширение оператора $\mathcal{L}_1$ на $W^1_{20}(Q)$ обозначим через $\mathcal{L}$, а через $\mathcal{L}^*$ — оператор сопряженный с $\mathcal{L}$. $\mathcal{L}^*v \equiv -\dfrac{\partial v}{\partial \tau} + \mathcal{B}v(\tau,x)$, на гладких функциях $v(\tau,x)$.

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Пусть полезный q-мерный векторный сигнал $u(\tau,x)$ формируется системой

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial \tau} + \mathcal{B}u(\tau,x) = v(\tau,x); \tag{6.2.2}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ \frac{u(\tau,x)}{d\nu}\Big|_{x\in\Gamma} = 0, \tag{6.2.3}$$

где $v(\tau,x)$ — белый гауссовский шум с известными статистиками, реализации $v(\tau,x)\in W^{-1}_{2t}(Q)$.

Измерения производятся на интервале $[0,t]$ и связаны с $u(\tau,x)$ соотношением

$$r(\tau,x_1) = \mathcal{S}u + \xi(\tau),\ r(\tau,x_1)\in W^{-1}_{2t}(G),$$

где $\mathcal{S}$ — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства состояний $L_2(Q)$ в пространство измерений $L_2(G)$; $G = \Lambda\times[0,t]$; Λ — множество, в которое оператор $\mathcal{S}$ переводит область P ($\Lambda\subset E_n$); $\xi(\tau)$ — шум измерений (например, вырожденный белый гауссовский шум). Равенства в уравнении наблюдений и (6.2.2) понимаются в смысле негативного пространства, решение (6.2.2), (6.2.3) – в обобщенном смысле.

Требуется по измерениям $\{r(\tau,x_1),\ 0\le\tau\le t\}$ определить последовательность оценок $\hat u_\alpha(\tau,x)$ процесса $u(\tau,x)$ в точке $\tau=t$, для которой выполняется соотношение

$$\lim_{\alpha\to 0} M[(z,\mathcal{A}_\alpha r - u)^2_q] = m(t),\ \mathcal{A}_\alpha r = \hat u_\alpha(\tau,x), \tag{6.2.4}$$

где $\mathcal{A}_\alpha$ — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства наблюдений $W^{-1}_{2t}(G)$ в пространство состояний $L_2(Q)$, z — произвольный вектор из E_n,

$$m(t) = \inf_{\mathcal{A}_i} M[(z,\mathcal{A}_i r - u)^2_n], \tag{6.2.5}$$

нижняя грань берется по всем линейным непрерывным операторам $\mathcal{A}_i$, действующим из $W^{-1}_{2t}(G)$ в $L_2(Q)$. Пространство таких операторов обозначим через $F(G,Q)$.

Решение линейной задачи фильтрации для систем с распределенными параметрами эквивалентно решению операторного уравнения Винера-Хопфа

$$\mathcal{A}_0\mathcal{R}_r = \mathcal{R}_{ur}, \tag{6.2.6}$$

где $\mathcal{A}_0$ — линейный оператор, удовлетворяющий критерию (6.2.5); $\mathcal{R}_r$ — корреляционный оператор случайного процесса $r(\tau,x_1)$; $\mathcal{R}_{ur}$ — взаимнокорреляционный оператор случайных процессов $u(\tau,x)$ и $r(\tau,x_1)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.5 *Последовательность операторов* $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha>0}$, $\mathcal{A}_\alpha\in F(G,Q)$, *удовлетворяющая критерию (6.2.4), находится из операторного уравнения*

$$\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_r + \alpha\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{R}_{ur}, \tag{6.2.7}$$

где α — *параметр регуляризации,* $\alpha>0$.

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\varphi(\mathcal{A}) = M[(z, \mathcal{A}r - u)_n^2],$$

где $\mathcal{A} \in F(Q,G)$, $z \in E_n$. Этот функционал можно записать несколько иначе, а именно

$$\varphi(\mathcal{A}) = (z, \mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{R}_r z)_n - 2(z, \mathcal{A}\mathcal{R}_{ru} z)_n + (z, \mathcal{R}_u z)_n, \tag{6.2.8}$$

где $\mathcal{A}^*$ — оператор, связанный с оператором $\mathcal{A}$ соотношением $\mathcal{A}^* r = (\mathcal{A}r)^m$; $\mathcal{R}_u$ — корреляционный оператор случайного процесса $u(\tau, x)$.

Из последнего выражения для $\varphi(\mathcal{A})$ видно, что минимизировать следует первые два слагаемые.

Введем обозначения

$$\rho(\mathcal{A}) = (z, \mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{R}_r z)_n - (z, \mathcal{A}\mathcal{R}_{ru} z)_n.$$

Отметим, что

$$\inf_{\mathcal{A}}\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A} \in F(Q,G)\} = -(z, \mathcal{A}_0\mathcal{R}_{ru} z)_n, \tag{6.2.9}$$

где $\mathcal{A}_0$ удовлетворяет $\mathcal{A}\mathcal{R}_r = \mathcal{R}_{ru}$. Решение этого уравнения в общем случае некорректно [33].

Регуляризирующий функционал имеет вид

$$\varphi_\alpha(\mathcal{A}) = (z, \mathcal{R}_u z)_n + \rho(\mathcal{A}) + \alpha(z, \mathcal{A}\mathcal{A}^* z)_n,$$

а выражение, которое необходимо минимизировать,

$$\rho_\alpha(\mathcal{A}) = \rho(\mathcal{A}) + \alpha(z, \mathcal{A}\mathcal{A}^* z)_n. \tag{6.2.10}$$

Уравнение Эйлера для функционала $\varphi_\alpha(\mathcal{A})$ имеет вид (6.2.7). Это уравнение имеет единственное решение.

Обозначим $\Delta = \mathcal{A} - \mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{A}_\alpha$ — решение (6.2.7), и запишем выражение (6.2.10), используя это обозначение. После несложных преобразований находим

$$\rho_\alpha(\mathcal{A}) - \rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha) = \alpha(z, \mathcal{A}\mathcal{A}^* z)_n + (z, \Delta\Delta^* z)_n,$$

так как $(z, \Delta\Delta^* z)_n \geq 0$, то справедливо неравенство

$$\rho_\alpha(\mathcal{A}) \geq \rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha) + \alpha(z, \mathcal{A}\mathcal{A}^* z)_n \geq \rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha). \tag{6.2.11}$$

Нижняя грань $\rho_\alpha(\mathcal{A})$ равна

$$\inf_{\mathcal{A}}\{\rho_\alpha(\mathcal{A}),\ \mathcal{A} \in F(Q,G)\} = -(z, \mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru} z)_n. \tag{6.2.12}$$

Пусть теперь $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$-(z, \mathcal{R}_u z)_n \leq -(z, \mathcal{A}_0\mathcal{R}_{ru} z)_n \leq -(z, \mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru} z)_n,$$

которое следует из (6.2.12) и неравенства $(z, \mathcal{R}_u z)_n \geq |(z, \mathcal{A}_0\mathcal{R}_{ru} z)_n|$, так как

$$\inf_{\mathcal{A}}\{\varphi_\alpha(\mathcal{A}),\ \mathcal{A} \in F(Q,G)\} = (z, \mathcal{R}_u z)_n - (z, \mathcal{A}_0\mathcal{R}_{ru} z)_n \geq 0.$$

Таким образом последовательность операторов $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha>0}$ задает ограниченную снизу последовательность $\{(z, \mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru} z)_n\}_{\alpha>0}$ при $\alpha \to 0$. Эта последовательность монотонно убывает, а значит, существует предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}(z, \mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru} z)_n$.

Так как $\rho(\mathcal{A}) \leq \rho_\alpha(\mathcal{A})$ для $\alpha > 0$ и всех $\mathcal{A} \in F(Q,G)$, то

$$\inf_{\mathcal{A}}\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A} \in F(Q,G)\} \leq \inf_{\mathcal{A}}\{\rho_\alpha(\mathcal{A}),\ \mathcal{A} \in F(Q,G)\},$$

а следовательно

$$\inf_{\mathcal{A}}\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A} \in F(Q,G)\} \leq -\lim_{\alpha\to 0}(z, \mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru} z)_n. \tag{6.2.13}$$

Справедливо также неравенство

$$\inf_{\mathcal{A}}\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A} \in F(Q,G)\} \geq -\lim_{\alpha\to 0}(z, \mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru} z)_n, \tag{6.2.14}$$

которое вытекает из соотношения

$$\rho(\mathcal{A}) = \lim_{\alpha\to 0}\rho_\alpha(\mathcal{A}) \geq -\lim_{\alpha\to 0}(z, \mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_n,$$

так как

$$\rho_\alpha(\mathcal{A}) \geq \rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha) = \inf_{\mathcal{A}}\{\rho_\alpha(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(Q,G)\}.$$

Из неравенств (6.2.12) и (6.2.14) следует, что

$$\inf_{\mathcal{A}}\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(Q,G)\} = -\lim_{\alpha\to 0}(z, \mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_n.$$

В свою очередь, справедливо соотношение

$$\rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha) - \alpha(z, \mathcal{A}_\alpha\mathcal{A}_\alpha^* z)_n = \rho(\mathcal{A}_\alpha) \leq \inf_{\mathcal{A}}\{\rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha),\ \mathcal{A}_\alpha\in F(Q,G)\} = -\lim_{\alpha\to 0}(z, \mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_n,$$

но

$$\rho(\mathcal{A}_\alpha) \geq \inf_{\mathcal{A}}\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(Q,G)\} = -\lim_{\alpha\to 0}(z, \mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_n.$$

Таким образом находим, что

$$\inf_{\mathcal{A}}\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(Q,G)\} = -\lim_{\alpha\to 0}(z, \mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_n \leq \rho(\mathcal{A}_\alpha) \leq \inf_{\mathcal{A}}\{\rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha),\ \mathcal{A}_\alpha\in F(Q,G)\} = -(z, \mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_n.$$

Переходя к пределу в правой части неравенства по α при $\alpha\to 0$, получаем, что

$$\inf_{\mathcal{A}}\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(Q,G)\} = -\lim_{\alpha\to 0}\rho(\mathcal{A}_\alpha). \tag{6.2.15}$$

Следовательно, последовательность решений $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha>0}$ операторного уравнения (6.2.7) является решением задачи фильтрации.

6.3 Приближенное решение задачи линейной фильтрации

Пусть $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^\infty$ ортогональная система гладких функций в пространстве $L_2(P)$, причем выполняются условия $\left.\dfrac{d\rho_i(x)}{d\nu}\right|_{x\in\Gamma} = 0$, $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — ортогональная система в $L_2(\Lambda)$.

Прежде чем приступить к изложению метода, отметим некоторые свойства рассматриваемых функций и операторов.

Если $u(\tau,x)\in W_{2t}^{-1}(Q)$, то вектор-функцию $u(\tau,x)$ можно представить в виде

$$u(\tau,x) = \sum_{i=1}^\infty \vartheta_i(\tau)\rho_i(x),\ \vartheta_i(\tau)\in W_{2t}^{-1}[0,t].$$

Действительно. Применим к функции $u(\tau,x)$ оператор j_t^*, получим

$$j_t^* u(\tau,x) = \psi(\tau,x)\in L_2(Q) \text{ и } \psi(\tau,x) = \sum_{i=1}^\infty \beta_i(\tau)\rho_i(x),\ \beta_i(\tau)\in L_2[0,t].$$

Используя оператор D_t^*, находим

$$u(\tau,x) = \sum_{i=1}^\infty D_t^*\beta_i(\tau)\rho_i(x) = \sum_{i=1}^\infty \vartheta_i(\tau)\rho_i(x), \tag{6.3.1}$$

где $\vartheta_i(\tau) = D_t^*\beta(\tau)$.

Обозначим через $\vartheta(\tau) = \{\vartheta_1(\tau), \vartheta_2(\tau), \vartheta_3(\tau), ..., \vartheta_k, ...\}$ — бесконечный вектор. Тогда, если функция $g(\tau,x)\in W_{2t}^{-1}(Q)$, то ее можно представить в виде

$$g(\tau,x) = \sum_{i=1}^\infty \gamma_i(\tau)\rho_i(x) = \gamma^m(\tau)\rho(x),$$

$\rho(x) = \{\rho_1(x), \rho_2(x), ...\}$ — бесконечный вектор с координатами из $L_2(P)$, $\gamma(\tau) = \{\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau), ...\}$.

Лемма 6.4 *Для того чтобы оператор $\mathcal{A}$, действующий из $W_{2t}^{-1}(Q)$ в $L_2(Q)$ и определяемый выражением:*

$$\mathcal{A}g \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_i(\tau)\rho_i(x) = u, \tag{6.3.2}$$

был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\vartheta(\tau)$ имел вид

$$\vartheta(\tau) = \int_0^{\tau} H(\tau, s)\gamma(s)\, ds, \tag{6.3.3}$$

где $H(\tau, s)$ — бесконечная матрица с элементами $h_{ij}(\tau, s)$, принадлежащими по аргументу s позитивному пространству $W_2^1[0, t]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть оператор $\mathcal{A}$ - непрерывный. Тогда для каждого $i = 1, 2, ...$ выражение $\vartheta_i(\tau) = (\mathcal{A}g, \rho_i)_{0P}$ является линейным непрерывным функционалом над $W_{2t}^{-1}(Q)$ (в силу непрерывности оператора $\mathcal{A}$ и скалярного произведения в $L_2(P)$).

Согласно обобщенной теореме Рисса о виде линейного непрерывного функционала в оснащенном гильбертовом пространстве [25], а именно то, что всякий линейный функционал в гильбертовом пространстве W_2^{-1} имеет вид: $\Phi(u) = \langle u, v\rangle$, где v — некоторый элемент из W_2^1, однозначно определяемый элементом v ; при этом $\|\Phi\| = \|v\|_1$, находим

$$\vartheta_i(\tau) = (\mathcal{A}g, \rho_i)_{0P} = \langle g, h_i\rangle, \tag{6.3.4}$$

где $h_i(\tau, x) \in W_{2t}^1(Q)$ и единственно.

Элемент $h_i(\tau, x)$ можно представить в виде

$$h_i(\tau, x) = \sum_{j=1}^{\infty} h_{ij}(\tau)\lambda_j(x), \;\; h_{ij}(\tau) \in W_2^1[0, t],$$

$\{\lambda_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ — ортогональная система функций в $L_2(\Lambda)$. Выражение (6.3.4) с учетом выше полученного соотношения и (6.3.1), запишется следующим образом

$$h_i(\tau, x) = \langle \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(\tau)\lambda_j(x), \sum_{k=1}^{\infty} h_{ik}(\tau)\lambda_k(x)\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \gamma_j(\tau), h_{ij}(\tau)\rangle.$$

Достаточность очевидна.

Как известно, если оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве имеет матричное представление, то он ограничен [4,25], то есть выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\sum_{k=1}^{\infty} h_{ik}x_k|^2 \le N^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2, \tag{6.3.5}$$

для любых $x_i (i = 1, 2, 3, ...)$ удовлетворяющих неравенству $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$; N — постоянная зависящая от оператора $\mathcal{A}$.

Это представление понадобится при доказательстве теоремы сходимости. Перейдем к решению задачи фильтрации. Приближенное значение состояния системы

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial \tau} + \mathcal{B}u(\tau, x) = v(\tau, x); \tag{6.2.2}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \;\; \frac{du(\tau, x)}{d\nu}\Big|_{x\in\Gamma} = 0 \tag{6.2.3}$$

будем искать в виде конечной суммы

$$u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i(\tau)\rho_i(x), \tag{6.3.6}$$

$\{\rho_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ортогональный базис в $L_2(P)$, $\left.\dfrac{d\rho_i(x)}{d\nu}\right|_{x\in\Gamma} = 0$, $\vartheta_i(\tau)$ – находятся из соотношений

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial \tau}, \rho_j\right)_{0P} + (\mathcal{B}u, \rho_j)_{0P} = (v, \rho_j)_{0P}, \\ u_k(0,x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \vartheta_i(0)\rho_i(x) \end{cases} \tag{6.3.7}$$

$\dfrac{d}{d\nu}$ — производная по конормале. Подставляя соотношение (6.3.6) в (6.3.7), получаем уравнения для определения $\vartheta_j(\tau)$

$$\frac{d\vartheta_j(\tau)}{d\tau} + \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i(\tau)(\mathcal{B}\rho_i, \rho_j)_{0P} = (v, \rho_j)_{0P},$$
$$\vartheta_j(0) = (u_0(x), \rho_j)_{0P}, \ j = 1, 2, ..., k. \tag{6.3.8}$$

Задача (6.3.8) является обобщенной задачей Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка k.

Наблюдения, для приближенной задачи, построим следующим образом

$$(r(\tau), \lambda_i)_{0\Lambda} = (\mathcal{S}u, \lambda_i)_{0\Lambda} + (\xi, \lambda_i)_{0\Lambda}, \tag{6.3.9}$$

$(.,.)_{0\Lambda}$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(\Lambda)$.

Будем считать, что наблюдается процесс $\{r_m(\tau), 0 \le \tau \le t\}$, связанный с $\vartheta(\tau)$ соотношением

$$r_m^i(\tau) = (r(\tau), \lambda_i)_{0\Lambda} = \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(\tau)(\mathcal{S}rho_j, \lambda_i)_{0\Lambda} + (\xi, \lambda_i)_{0\Lambda},$$
$$i = 1, 2, 3, ..., m < \infty. \tag{6.3.10}$$

Введем обозначения. $\vartheta(\tau)$ – k-мерный вектор с элементами $\{\vartheta_i(\tau)\}_{i=1}^{k}$, F — матрица размера $k \times k$, $F_{ij} = (\mathcal{S}\rho_i, \rho_j)_{0P}$, Gv — матрица размера $1\times k$, $(Gv)_i = (v, \rho_i)_{0P}$, C — матрица $k \times m$, $C_{lj} = (\mathcal{S}\rho_j, \lambda_l)_{0\Lambda}$, $r_m(\tau)$ — вектор наблюдений, $r_m^l(\tau) = (r(\tau), \lambda_l)_{0\Lambda}$, $w(\tau)$ — шум, $w_l = (\xi, \lambda_l)_{0\Lambda}$, $i = 1, 2, ..., k$, $j = 1, 2, ..., k$, $l = 1, 2, ..., m$.

С учетом введенных обозначений задачу линейной оптимальной фильтрации можно сформулировать в виде.

Векторный случайный процесс $\vartheta(\tau)$ моделируется системой

$$\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} = F\vartheta(\tau) + Gv(\tau), \ \vartheta(0) = \vartheta_0, \tag{6.3.11}$$

где Gv — белый шум.

Наблюдается процесс $\{r_m(\tau), 0 \le \tau \le t\}$, связанный с $\vartheta(\tau)$ соотношением

$$r_m(\tau) = C\vartheta(\tau) + w(\tau). \tag{6.3.12}$$

Требуется найти оценку $\hat{\vartheta}(\tau)$ процесса $\vartheta(\tau)$ в момент $\tau = t$, удовлетворяющую критерию минимума среднеквадратической ошибки

$$m(t) = \inf_{\mathcal{H}} \{M[(z, \vartheta(t) - \mathcal{H}r_m(t))_k^2]\}, \tag{6.3.13}$$

где нижняя грань берется по всем линейным операторам $\mathcal{H}$, действующим из пространства наблюдений в пространство состояний, $\mathcal{H}$ — определяется в (4.1.5), $z \in E_k$.

Имеют место следующие статистики:

$$M[\vartheta_0] = 0, \ M[\vartheta_0\vartheta_0^m] = P_0, \ P_0^{ij} = (\mathcal{U}_0\rho_i, \rho_j)_{0P}, \ i, j = 1, 2, ..., k,$$

$$M[Gv(\tau)] = 0, \ M[Gv(\tau)(Gv(\sigma))^m] = Q(\tau)\delta(\tau - \sigma), \ Q_{ij}(\tau) = (\mathcal{V}\rho_i, \rho_j)_{0P},$$

$$M[w(\tau)] = 0, \ M[w(\tau)w^m(\sigma)] = R(\tau)\delta(\tau - \sigma), \ R_{ql}(\tau) = (\mathcal{W}\lambda_q, \lambda_l)_{0\Lambda},$$

$q, l = 1, 2, ..., m$, $R(\tau)$ — матрица порядка m, $R(\tau) \ge 0$, $\mathcal{U}_0$ — ковариационный оператор процесса $u_0(x)$, $\mathcal{V}$ — ковариационный оператор процесса $v(\tau, x)$, $\mathcal{W}$ — ковариационный оператор процесса $\xi(\tau, x)$.

Матрица $R(\tau)$ вырожденная. Поэтому для решения задачи фильтрации (6.3.11)-(6.3.13) необходимо использовать алгоритм, полученный в части 4.1.

Покажем, что приближенное решение задачи линейной оптимальной фильтрации (6.2.1)-(6.2.3) $\hat{u}_k^\alpha(\tau,x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \hat{\vartheta}_i^\alpha(\tau)\rho_i(x)$, построенное по задаче (6.3.11)-(6.3.13) при $k\to\infty$, сходится в соответствующей норме к точному решению. Для этого докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 6.5 *Для почти всех t справедливо равенство*

$$\varliminf_{k\to\infty} M[\|u_k(t,x)-u(t,x)\|_{0P}^2] = 0,$$

где $u_k(t,x)$ – имеет вид (6.3.6), а $u(\tau,x)$ — решение уравнения (6.2.2), (6.2.3) в точке $\tau = t$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 6.4, имеет место соотношение

$$s_k(t,\omega) = \int\limits_0^t |u_k(\tau)-u(\tau)|^2 d\tau \to 0,\ k\to\infty, \tag{6.3.14}$$

для почти всех $\omega\in\Omega$, откуда

$$M[s_k(t,\omega)] = M[\int\limits_0^t |u_k(\tau)-u(\tau)|^2 d\tau] \to 0,\ k\to\infty.$$

Лемма доказана.

Запишем уравнение Винера-Хопфа для задачи (6.3.11)-(6.3.13)

$$M[\vartheta(t)r_m^m(\sigma)] = \int\limits_0^t h_{mk}(t,\tau)M[r_m(\tau)r_m^m(\sigma)]\,d\tau. \tag{6.3.15}$$

Регуляризованное уравнение имеет вид

$$M[\vartheta(t)r_m^m(\sigma)] = \int\limits_0^t h_{mk}(t,\tau)M[r_m(\tau)r_m^m(\sigma)]\,d\tau + \alpha h_{mk}^\alpha(t,\sigma). \tag{6.3.16}$$

Уравнение (6.3.16) можно записать с помощью бесконечных матриц, такое представление понадобится при доказательстве сходимости.

Используя ковариационную матрицу $M[\vartheta(t)r_m^m(\sigma)]$, построим бесконечную матрицу $K_{km}(t,\sigma)$ следующим образом

$$K_{km}(t,\sigma) = \begin{bmatrix} M[\vartheta(t)r_m^m(\sigma)] & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Эта матрица задает над $W_{2t}^{-1}(G)$ линейный оператор, действующий из $W_{2t}^{-1}(G)$ в $L_2(Q)$. Действительно, для любого $g\in W_{2t}^{-1}(G)$ справедливо соотношение $g = \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j(\tau)\lambda_j(x)$ и $\hat{h}(t) = \int\limits_0^t K_{km}(t,\tau)\hat{y}(\tau)\,d\tau$, где $\hat{y}(\tau)$ — вектор с координатами $y_i(\tau)$, функция $h(t,x) = h(g) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} h_j(t)\rho_j(x)$, h_j — координаты вектора $\hat{h}(t)$. Таким образом, матрица $K_{km}(t,\tau)$ задает оператор над $W_{2t}^{-1}(G)$. Обозначим этот оператор через $\mathcal{R}_{km}$.

Аналогично, бесконечная матрица $K_{mm}(\tau,\sigma)+\alpha I\delta(\tau-\sigma)$, построенная по $M[r_m(\tau)r_m^m(\sigma)]+\ \alpha I\delta(\tau-\sigma)$, задает оператор $\mathcal{R}_{mm}$, действующий из $W_{2t}^{-1}(G)$ в $L_2(Q)$.

Пусть

$$H_{mk}(t,\sigma) = \begin{bmatrix} h_{mk}^\alpha(t,\sigma) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Тогда, используя бесконечные матрицы, уравнение (6.3.16) запишется в виде

$$K_{km}(t,\sigma) = \int\limits_0^t H^\alpha_{mk}(t,\tau)K_{mm}(\tau,\sigma)\,d\tau + \alpha H^\alpha_{mk}(t,\sigma),$$

а в операторной форме

$$\mathcal{A}^\alpha_{km}\mathcal{R}_{mm} + \alpha\mathcal{A}^\alpha_{km} = \mathcal{R}_{km}. \tag{6.3.17}$$

Покажем, что решение уравнения (6.3.17) задает приближенное решение (6.2.7).

Докажем вначале ряд дополнительных фактов.

Лемма 6.6 *Справедливо соотношение*

$$\lim_{k,m\to\infty} \|\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{km}\| = 0.$$

Доказательство. Для каждого фиксированного t, по определению операторной нормы

$$\|\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{km}\| = \sup_{\varphi,\psi}\left\{\frac{|([\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{km}]\varphi,\psi)_{0Q}|}{\|\varphi\|_{-1tG}\|\psi\|_{0Q}};\right.$$

$$\left.\varphi\in W^{-1}_{2t}(G), \psi\in L_2(Q), \|\varphi\|_{-1tG}\neq 0, \|\psi\|_{0Q}\neq 0\right\}.$$

Оценим числитель в правой части этого равенства

$$|([\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{km}]\varphi,\psi)_{0Q}| = |M[(u,\psi)_{0Q}(r,\varphi)_{-1tG} - (u_k,\psi)_{0Q}(r_m,\varphi)_{-1tG}]|$$

и, применяя обобщенное неравенство Коши-Буняковского, находим

$$|([\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{km}]\varphi,\psi)_{0Q}| \le \Big|(M[\|u-u_k\|^2_{0Q}]M[\|r\|^2_{-1tG}])^{1/2} +$$

$$+(M[\|u_k\|^2_{0Q}]M[\|r-r_m\|^2_{-1tG}])^{1/2}\Big|\|\varphi\|_{-1tG}\|\psi\|_{0Q}.$$

Из леммы 6.5 следует, что первое слагаемое в правой части при $k\to\infty$ стремится к 0. Покажем, что при $m\to\infty$, $M[\|r-r_m\|^2_{-1tG}]\to 0$.

Рассмотрим норму $\|r-r_m\|_{-1tG}$. Отметим, что здесь r и r_m понимаются как бесконечные векторы. Координаты вектора $\bar r$ имеют вид $r_i = (r,\lambda_i)_{0\Lambda}$, вектора $\bar r_m$ — $r^i_m = \begin{cases}(r,\lambda_i)_{0\Lambda}, & i\le m,\\ 0, & i>m.\end{cases}$ Кроме того справедливо равенство $\|\bar r - \bar r_m\|_{-1tG} = \|r-r_m\|_{-1tG}$, где r и r_m представлены обобщенными рядами Фурье

$$j^*_t r = \sum_{i=1}^\infty (j^*_t(r,\lambda_i)_{0\Lambda}\lambda_i,\ j^* r_m = \sum_{i=1}^\infty (j^*_t r_m,\lambda_i)_{0\Lambda}\lambda_i.$$

Тогда

$$\|\bar r - \bar r_m\|^2_{-1tG} = \|\sum_{i=m+1}^\infty (r,\lambda_i)_{0\Lambda}\lambda_i\|_{0G} \le 2\sum_{i=1}^\infty (j^*_t\|(r,\lambda_i)_{0\Lambda}\lambda_i\|^2_{0G} =$$

$$= 2\sum_{i=m+1}^\infty \|(r,\lambda_i)_{0\Lambda}\lambda_i\|^2_{-1tG}\to 0,\ m\to\infty,$$

как остаточный член разложения функции в ряд Фурье.

Таким образом, $M[\|r-r_m\|^2_{-1tG}]\to 0$, $m\to\infty$. Лемма доказана.

Лемма 6.7 *Для каждого фиксированного t имеет место соотношение*

$$\lim_{m\to\infty}\|\mathcal{R}^\alpha_r - \mathcal{R}^\alpha_{mm}\| = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через $\mathcal{R}_r^\alpha$ обозначим оператор $\mathcal{R}_r^\alpha = \mathcal{R}_r + \alpha I\delta(\tau-\sigma)$, а $\mathcal{R}_{mm}^\alpha = \mathcal{R}_{mm}+$ $+\alpha I\delta(\tau-\sigma)$. Эти операторы при всех $\alpha > 0$ определены на всем $W_2^1(G)$ (точнее на $C(G)$ — пространстве непрерывных функций на G).

По определению операторной нормы

$$\|\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha\| = \sup_g \left\{ \frac{|\langle[\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha]g, g\rangle|}{\|g\|_{1tG}};\ g \in W_{2t}^1(G),\ \|g\|_{1tG} \neq 0 \right\}.$$

Оценим числитель. После несложных преобразований, находим

$$\begin{aligned} |\langle[\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha]g, g\rangle| &= |M[\langle r_\alpha, g\rangle^2 - \langle r_{m\alpha}, g\rangle^2]| = \\ &= |M[\langle r_\alpha - r_{m\alpha}, g\rangle\langle r_\alpha + r_{m\alpha}, g\rangle]|, \end{aligned} \tag{6.3.18}$$

где $r_\alpha(\tau)$ — наблюдения, связанные с $u(\tau,x)$ соотношением $r_\alpha(\tau) = \mathcal{S}u+\ +w_\alpha(\tau)$, $w_\alpha(\tau)$ — белый невырожденный шум с нулевым средним и ковариационным оператором $M[w_\alpha(\tau), w_\alpha(\sigma)] = (\mathcal{W}+\alpha I)\delta(\tau-\sigma)$. Наблюдения $r_{m\alpha}(\tau)$ строятся аналогично. Эти процессы нужны лишь для доказательства, конечный алгоритм их не будет содержать.

Применяя обобщеннное неравенство Коши-Буняковского к правой части (6.3.18), получаем

$$|\langle[\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha]g, g\rangle| \le (M[\|r_\alpha - r_{m\alpha}\|_{-1tG}^2](M[\|r_\alpha - r_{m\alpha}\|_{-1tG}^2])^{1/2}\|g\|_{1tG}^2 \to 0,$$

при $m \to \infty$, согласно доказательству леммы 6.6, так как поведение r_α и $r_{m\alpha}$ такое же, как r и r_m.

Теорема 6.6 *Для каждого фиксированного* $\alpha > 0$ *и* t *выполняется равенство*

$$\lim_{k,m\to\infty} M[(z, \hat{u}_{km}^\alpha - \hat{u}_\alpha)_n^2] = 0,\ z \in E_n. \tag{6.3.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (6.3.17) находим, что

$$\mathcal{A}_{km}^\alpha = \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm} + \alpha I)^{-1}$$

и этот оператор задает оптимальную линейную оценку

$$\hat{u}_{km}^\alpha(t,x) = \mathcal{A}_{km}^\alpha r = \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm} + \alpha I)^{-1} r = \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} r.$$

Для уравнения (6.2.7) аналогично

$$\hat{u}_\alpha(t,x) = \mathcal{A}_\alpha = \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r + \alpha I)^{-1} r = \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1} r.$$

Согласно этих формул математическое ожидание в (6.3.19) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &M[(z, \hat{u}_{km}^\alpha - \hat{u}_\alpha(t,x))_n^2] = \\ &= M[\Big(z, \{\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}(r_m - r)\} + \{\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1} r\Big)_n^2] \le \\ &\le 2\Big(M[(z, \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}(r_m - r)_n^2] + \\ &+ M[(z, \{\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\} r)_n^2]\Big). \end{aligned} \tag{6.3.20}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к первому слагаемому в правой части, получаем

$$\begin{aligned} &M[(z, \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}(r_m - r)_n^2] \le \\ &\le \|z\|_n^2 \|\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}\|^2 M[\|r_m - r\|_{-1tG}^2] \to 0 \text{ при } k, m \to \infty \end{aligned}$$

по лемме 6.6.

Оценим второе слагаемое. Прибавим и вычтем $\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}$, после преобразований, применим неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} &M[(z, \{\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\} r)_n^2] \le 2\Big(\|z\|_n^2 \|\mathcal{R}_{\|\Uparrow}\|^2 \|(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - (\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\|^2 + \\ &+ \|(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\|^2 \|\mathcal{R}_{km} - \mathcal{R}_{ur}\|^2 \|r\|_{-1tG}^2\Big) \to 0,\ k, m \to \infty \end{aligned}$$

согласно леммам 6.6 и 6.7.

Подставим эти соотношения в (6.3.20) и получим утверждение теоремы.

Теорема 6.7 *Для каждого фиксированного t справедливо соотношение*

$$\lim_{\alpha\to 0}\varliminf_{k,m\to\infty} M[(z,\hat{u}^{\alpha}_{km}(t,x)-u(t,x))^2_n]=m(t),$$

где $\hat{u}^{\alpha}_{km}(t)$ — решение приближенной задачи фильтрации (6.3.2),(6.3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прибавим и вычтем под знаком скалярного произведения $\hat{u}_\alpha(t,x)$ и проведем ряд преобразований:

$$\lim_{\alpha\to 0}\varliminf_{k,m\to\infty} M[(z,\hat{u}^{\alpha}_{km}(t,x)-u(t,x))^2_n]=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\varliminf_{k,m\to\infty} M[\{((z,\hat{u}^{\alpha}_{km}(t,x)-\hat{u}_\alpha(t,x))_n+(z,\hat{u}^{\alpha}(t,x)-u(t,x))_n\}^2]\leq$$

$$\leq\lim_{\alpha\to 0}\Big(\varliminf_{k,m\to\infty} M[(z,\hat{u}^{\alpha}_{km}(t,x)-\hat{u}_\alpha(t,x))^2_n]+$$

$$+2\{\varliminf_{k,m\to\infty} M[(z,\hat{u}^{\alpha}_{km}(t,x)-\hat{u}_\alpha(t,x))^2_n]M[(z,\hat{u}_\alpha(t,x)-u(t,x))^2_n]\}^{1/2}+$$

$$+M[(z,\hat{u}_\alpha(t,x)-u(t,x))^2_n]\Big)=m(t)$$

согласно теореме 6.6.

Таким образом доказана сходимость решения приближенной регуляризованной задачи линейной фильтрации к решению исходной задачи.

Алгоритм решения приближенной задачи рассмотрен в части 4.1. Параметр регуляризации выбирается согласно [33,20,25] и части 5.1.

Литература

1. Альберт А. Регресия, псевдоинверсия и рекурентное оценивание. М.: Наука, 1977. –224 с.
2. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Том 1. Харьков: Изд. при ХГУ издательского объединения Вища школа, 1977. –315 с.
3. Белов Ю.А., Диденко В.П., и др. Математическое обеспечение сложного эксперимента. Обработка измерений при исследовании сложных систем. Киев: Наукова думка, 1982. Т. 1. –301 с.
4. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965. –798 с.
5. Васильев В.А. Методы оптимальной фильтрации в системах управления космическими аппаратами // Вопросы управления космическими аппаратами. М.: Мир, 1975. С. 58-94.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. –436 с.
7. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции. Вып. 1-5. М.: Физматгиз, 1958-62.
8. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. М.: Наука, 1970- 1975. Т. 1-3.
9. Гулько Ф.Б., Новосельцева Ж.А. Решение нестационарных задач фильтрации и управления при произвольной помехе методами моделирования // Автоматика и телемеханика. 1966. №10. С. 153-168.
10. Диденко В.П., Козлов Н.Н. О регуляризации некоторых некорректных задач технической кибернетики // ДАН СССР. 1974. 214. №3. С. 528-531.
11. Диденко В.П., Козлов Н.Н. Регуляризованный метод решения задач оценки сообщений // ДАН СССР. 1975. №5. С. 1045-1048.
12. Диденко В.П., Цитрицкий О.Е. Фильтрация и регуляризация. Киев: КГУ, 1977. –51 с.
13. Калман Р.Е., Бьюси Р.С. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания // Тех.механика. 1961. Т. 83, Сер. Д, №1. С. 123-141.
14. Калман Р.Е., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. –400 с.
15. Колмогоров А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. Сер.мат., 1941. 5, №1. С. 5-16.
16. Колос И.В. О решении задачи линейной фильтрации при наличии цветного шума в наблюдениях // Укр.мат.журнал. 1979. 31, №4. С. 372-379.
17. Колос И.В. О приближенном решении обобщенной задачи Неймана для параболических уравнений // Вестник Киевского университета: Моделирование и оптимизация сложных систем. Киев: Изд. КГУ, 1982. Вып. 1. С. 27-39.
18. Колос И.В. Об одной задаче восстановления сигналов в системах с операторными коэффициентами // Вычислительная и прикладная математика. Республ.межвед.науч.сб., Киев: Изд. КГУ, 1981. Вып. 45. С. 21-24.
19. Колос И.В., Колос М.В. Об оценках точности решения задач линейной оптимальной фильтрации с цветным шумом в наблюдениях // Вычислит. методы и системы обработки данных на ЭВМ. М.: МГУ, 1988. С. 19-33.
20. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987. –240 с.
21. Морозов В.А., Гребенников А.И. Методы решения некорректно поставленных задач. Алгоритмический аспект. М.: МГУ, 1992. –320 с.
22. Леонов А.С. К обоснованию выбора параметра регуляризации по критерию квазиоптимальности и отношения // ЖВМ и МФ. 1978. 18, №6. С. 1363-1376.
23. Липцер Р.Ш. Уравнение почти оптимального фильтра Калмана при особенной матрице ковариации шума в наблюдениях // Автоматика и телемеханика. 1974. №1. С. 35-41.
24. Люстерник Л.Ф., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, ГРФМЛ. 1965. –520 с.
25. Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е. Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979. –232 с.
26. Пугачев В.С. Интегральные канонические представления случайных функций и их приложение к определению оптимальных линейных систем // Автоматика и телемеханика. Т. 28, №1. 1957.

27. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985. –560 с.
28. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1966. –320 с.
29. Рябова-Орешкова А.П. Об устойчивости фильтра Калмана // Изв. АН СССР. Сер.тех.кибернетика. 1970. №5. С. 203-212.
30. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976. –496 с.
31. Смирнов М.Л., Кошляков Н.С., Глинер Э.Б. Основы дифференциальных уравнений математической физики. М.: Наука, 1962. –768 с.
32. Стратанович Р.Л. Применение теории процессов Маркова для оптимальной фильтрации сигналов // Радиотехника и электроника. 1960. Т. 5, №11. С. 1751-1763.
33. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. –286 с.
34. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1 - 3. М.: Наука, ГР-ФМЛ, 1966.
35. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1980. –576 с.
36. Anderson B.D. An Algebraic solution to Spectral factorization problem // IEEE Trans. Autom. Control. 1967. V. AC-12, №4. P. 410-414.
37. Bensoussan A.V. Optimization of sensors location in distributed filtering problem // Notes in Math., 1972. 294. P. 62-84.
38. Booton R.C. An optimization theory for time-varying linear systems with nonstationary statistical inputs // Proc. IRE. 1952. V. 40. P. 977-981.
39. Bryson A.E., Johansen D.E. Linear filtering for time - varying systems using measurements containing coloured noise // IEEE Trans. Automat. Contr.. 1965. 10, №1. P. 4-10.
40. Bucy R.C. Optimum finite time filters for a special non-stationary class of inputs // Internal. Report Nr. BBD-600, Jons Hopkins University, Applied Physics Lad., 1959.
41. Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems // Trans. ASME series D., J. Basic. Engg.. 1960. V. 82. P. 35-45.
42. O'Reilly J., Newmann M.M. Minimal-order observer-estimators for continuous time linear systems // Int. J. Control. 1975. 22, №4. P. 573-590.
43. Swerling P. First - order error propagation in a stage - wise smoothing procedure of satellite observations // J. Astronautical sciences. 1959. V. 6. P. 46-52.
44. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, with engineering applications. New-York: Wiley, 1949.
45. Yoshihawa T. On discrete - time Kalman filter in singular case and akiud of pseudo-inverse of a matrix // Int. J. Control. 1972. 15, №6. P. 1157-1163.

Предметный указатель

Научное издание

Колос Мария Вячеславовна
Колос Игорь Васильевич

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Под редакцией В.А. Морозова

Редактор Т.Е. Васильева

Изд. лиц. № 040414 от 18.04.97.
Подписано в печать 14.11.2000. Формат $60 \times 84/16$. Бумага офс. № 1.
Офсетная печать. Усл. печ.л. 9,2. Уч.–изд. л. 9,1.
Тираж 70 экз. Заказ № 23.

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета.
103009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7.
Ротапринт НИВЦ МГУ. 119899, Москва, Воробьевы горы.