ВВЕДЕНИЕ

Развитие общей теории некорректных задач началось более полувека тому назад. Этому способствовали потребности различных областей естествознания и техники. Это развитие исходит из основополагающих работ выдающихся русских-советских математиков А. Н. Тихонова [102, 103], М. М. Лаврентьева [46, 47], В. К. Иванова [35, 36], а также созданной ими математической школы. Оно определило пути развития теории и методов решения некорректных задач – одного из самого плодотворных направлений современной вычислительной математики. В данной монографии изучаются вопросы, связанные с методом регуляризации сдвигом, и их приложения в задачах L-псевдообращения, сингулярных интегральных уравнениях Гильберта нейтрального типа и нахождения периодических решений систем линейных дифференциальных уравнений.

В первой главе исследуются теоретические основы метода регуляризации сдвигом. В § 1 приведены основные понятия и свойства циркулянтных матриц, матрицы перестановок и быстрого преобразования Фурье. Энциклопедичный материал по теплицевым, ганкелевым, и, в частности, циркулянтным матрицам, имеется в работах В. В. Воеводина и Е. Е. Тыртышникова [21, 22, 54, 107]. В § 2 определено понятие перциркулянтной матрицы [75] и изучены ее свойства. Доказано непосредственное использование метода быстрого преобразования Фурье для решения систем с перциркулянтными матрицами. Предложен алгоритм, позволяющий решать перциркулянтные системы с затратой $O\left(N\log_2 N\right)$ арифметических операций, N – порядок системы, которая совпадает с аналогичной затратой для циркулянтных систем. В § 3 рассматриваются системы с матрицами нейтрального типа – состоящими из линейных комбинаций циркулянтных и перциркулянтных матриц. Предложенный алгоритм решения систем нейтрального типа использует указанное количество арифметических операций.

В § 4 определяется регуляризация сдвигом в конечномерном случае, то есть для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Ax = f\,, \tag{0.1}$$

где A – квадратная матрица порядка N с комплексными элементами. Так как матрица A может являться и вырожденной, то случай прямоугольной матрицы сводится к эквивалентному квадратному случаю. Для этого достаточно окаймлять прямоугольную матрицу нулевыми строками или столбцами до получения квадратной матрицы. Регуляризацией сдвигом данной системы является СЛАУ

$$(A+\lambda B)x = f\ , \tag{0.2}$$

зависящая от комплексного параметра λ, где B – квадратная матрица порядка N с комплексными элементами. Требования, которым должна удовлетворять матрица B, выражаются в виде свойств, которыми должна обладать параметрическая СЛАУ (0.2): 1) для всех $f \in \mathbb{C}^N$ и достаточно малых $|\lambda|>0$ имеет единственное решение $x_\lambda = x_\lambda(f)$; 2) для всех $f \in R(A)$ решение x_λ сходится при $\lambda \to 0$ к некоторому решению СЛАУ (0.1). Если матрица A обратимая, то СЛАУ (0.2) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (0.1). В качестве матрицы B можно брать любую матрицу, порядок которой совпадает с порядком A. Если матрица A необратимая, то матрица B должна удовлетворять определенным условиям, которые приводятся в теоремах 4.1 – 4.3.

Заметим, если в (0.2) вместо четверки (A, B, λ, f) положить $\left(A^*A, E, \alpha, A^*f\right)$, где A^* – комплексно-сопряженная матрица для матрицы A, E – единичная матрица, $\alpha>0$, то получается регуляризация А. Н. Тихонова [104, 105]; при $\left(A^*A, L^*L, \alpha, A^*f\right)$ получается СЛАУ, решение которой сходится к L- псевдорешению [60, 61, 63]; при (A, E, α, f), где $A=A^* \geq 0$, $\alpha>0$, получается регуляризация М.М.Лаврентьева [48, 49, 50], а случай с произвольной матрицей A рассмотрена В. Н. Фадеевой в [108]; при $(A, E, i\alpha, f)$, где $A=A^* \geq 0$, $\alpha>0$, i - мнимая единица, получается регуляризация А.Б.Бакушинского

[7 – 11]; при $B = \sum_{m=1}^{k} g_m^* e_m$, где $e_m, g_m^*, m = \overline{1,k}$ – ортонормированные базисы в $\ker A$ и $\ker A^*$ соответственно, получится СЛАУ для нахождения приближенных значений точек ветвления нелинейных уравнений, изученных Н. А. Сидоровым и В. А. Треногиным [98 – 100, 106] и численного решения сингулярных интегральных уравнений теории упругости и аэродинамики, рассмотренных Н. Г. Афендиковой, С. М. Белоцерковским и И. К. Лифановым [3 – 5, 13, 14, 52 – 55].

В § 5 рассматривается регуляризация сдвигом, когда $B = E$ – единичная матрица

$$(A + \lambda E)x = f. \tag{0.3}$$

Регуляризующее семейство СЛАУ (0.3) получается из регуляризации: 1) В. Н. Фадеевой [108], если вместо вещественности матрицы A, правой части f и параметра регуляризации λ предполагать их комплексности; 2) М. М. Лаврентьева [48] и регуляризации А. Б. Бакушинского [8], если в них отказаться от требования симметричности (в общем случае, от требования самосопряженности) и положительной определенности матрицы A. Доказан признак, утверждающий, что семейство (0.3) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (0.1) тогда и только тогда, когда алгебраическая кратность нулевого собственного значения матрицы A совпадает с ее геометрической кратностью. Отсюда, в частности, следует, что (0.3) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (0.1), если матрица A является циркулянтной.

В § 6 приводится необходимое и достаточное условие сходимости решения регуляризации сдвигом (0.2) к нормальному решению СЛАУ (0.1) при $\lambda \to 0$. Этим устанавливается признак, когда предельное значение регуляризованного решения при $\lambda \to 0$ не зависит от матрицы B.

В § 7 рассматривается непараметрическая регуляризация сдвигом

$$(A + B)x = f, \tag{0.4}$$

Такая регуляризация имеет важное значение, так как наличие параметра регуляризации накладывает определенные трудности, связанные с его выбором.

В § 8 получен признак, по которому можно установить существование циклического базиса [25]. Эта задача связана с понятием кратного определителя Вандермонда (термин «кратный определитель Вандермонда не является общепринятым; он используется авторами с целью простоты изложения материала). Кратный определитель Вандермонда используется при построении интерполяционного многочлена Эрмита [15, с. 163]. В § 9 с помощью циклического базиса доказано, что для произвольной квадратной матрицы A порядка N с различными собственными значениями и произвольного набора из N чисел существует одноранговая матрица C такая, что собственными значениями матрицы $A+C$ является данный набор чисел.

В § 10 определена регуляризация сдвигом в бесконечномерном случае, то есть для решения общих операторных уравнений (0.1). Регуляризация в бесконечномерном случае существенно отличается от конечномерного случая. Во-первых, образы $R(A)$ и $R\left(A^*\right)$ в конечномерном пространстве – замкнутые, а в бесконечномерном пространстве – не всегда; во-вторых, сходимость решения $x_\lambda\left(f\right)$ уравнения (0.2) в конечномерном пространстве при $\lambda \to 0$ является равномерной на любом ограниченном множестве $R_0 \subset R(A)$, тогда как сходимость в бесконечномерном пространстве может являться равномерной или неравномерной, сильной или слабой; в-третьих, в конечномерном пространстве для любой матрицы A существует такая матрица B, что семейство (0.2) является регуляризацией сдвигом ОУ (0.1), а в бесконечномерном пространстве не для всякого оператора A существует оператор B, для которого семейство (0.2) является регуляризацией сдвигом ОУ (0.1) и т.д. Приводятся 13 эквивалентных условий, при которых семейство (0.2) является регуляризацией сдвигом ОУ (0.1). Доказан признак существования оператора B, гарантирующий регуляризуемость сдвигом ОУ (0.1).

В § 11 введено понятие порождающей четверки и рангового оператора – аналогичное понятию подматрицы данной матрицы, определитель которой является максимальным минором данной матрицы. Доказан критерий регуляризуемости сдвигом, связанный с введенными понятиями.

В § 12 приводятся оптимальные оценки скорости сходимости метода регуляризации сдвигом, когда исходные данные заданы приближенно.

Во второй главе исследуются прямые и двойственные, стационарные и вариационные задачи L-псевдообращения.

В § 1 приводятся формулировки стационарной задачи $(S;\, f,\, g)$ и вариационной задачи $(V;\, f,\, g)$ L-псевдообращения. Получены явные представления решения а) стационарной задачи $(S;\, f,\, g)$ как при выполнении основного условия, так и при его невыполнения; б) вариационной задачи $(V;\, f,\, g)$ при выполнении основного условия. Доказана оценка скорости сходимости решений вариационной задачи $(V;\, f,\, g)$ к решению стационарной задачи $(S;\, f,\, g)$ при $\alpha \to 0$. Показано, что из условия взаимной дополнительности операторов A и L вытекает справедливость равенства $\ker A \bigcap \ker L = \{0\}$ и в конечномерных, и в бесконечномерных пространствах, а обратное утверждение – только в конечномерном случае. Решения вариационной задачи $(V;\, f,\, g)$ представлены с помощью операторного ряда, для которой указан точный круг его сходимости.

В § 2 определены двойственные задачи L-псевдообращения $(S^*;\, f,\, g)$ и $(V^*;\, f,\, g)$. Приведены критерии их однозначной разрешимости, установлена связь между решениями прямых и двойственных задач и их эквивалентности в некоторых случаях.

В §§ 3 – 4 рассмотрены задачи L-псевдообращения и регуляризация А. Н. Тихонова, когда вместо точных данных известны их приближенные значения:

$$\left\|\tilde{A}-A\right\| \le \mu, \quad \left\|\tilde{L}-L\right\| \le \mu, \quad \left\|\tilde{f}-f\right\| \le \varepsilon \|f\|, \quad \|\tilde{g}-g\| \le \varepsilon \|g\|,$$

где $\mu > 0$, $\varepsilon > 0$ – произвольные, достаточно малые величины. Доказаны оптимальные оценки сходимости решения вариационных задач с приближенными данными – $\tilde{x}_\alpha\left(\tilde{A},\, \tilde{L},\, \tilde{f},\, \tilde{g}\right)$ к решению стационарной задачи с точными данными – $x_0(A, L, f, g)$, если стационарная задача – совместная. Полученная оценка распространена и для несовместного случая.

Из близких по содержанию отметим работы Б. А. Алиева [2], В. И. Мелешко [56, 57], Р. А. Шафиева [110 – 112] и др.

Третья глава содержит исследование разрешимости, в частности, однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа и сходимости решений их дискретных уравнений к решениям исходных. В § 1 приводятся сингулярные и регулярные интегральные операторы, рассматриваемые в работе. В §§ 2 – 4 используются понятия частичных сумм Фурье и Фейера, приведен признак аппроксимируемости гельдеровых функций тригонометрическими полиномами и инвариантность срезок ряда Фурье функции данного класса Гёльдера. В §§ 5 – 6 явно вычислены образы рядов Фурье при действии сингулярных интегральных операторов Гильберта и с их помощью установлены связи между исходными интегральными уравнениями и бесконечными системами линейных алгебраических уравнений. §§ 7 – 8 содержат формулировки и доказательства критерия разрешимости для сингулярных интегральных уравнений и условия их однозначной разрешимости для всех возможных значений коэффициентов регулярной части. В § 9 приведены дискретные аналоги уравнений Гильберта I и II рода и установлено, что они аппроксимируют данные интегральные уравнения. Если уравнение Гильберта II рода включало и уравнение I рода, то дискретные аналоги этих уравнений отличаются существенно. В §§ 10 – 11 доказаны теоремы сходимости решений дискретных уравнений I и II рода к решениям соответствующих интегральных уравнений.

В завершающей главе 4 рассмотрен вопрос приложения метода регуляризации сдвигом для нахождения периодических решений систем линейных дифференциальных уравнений и в регулярном, и в резонансном случаях.

Данная монография рекомендуется студентам математикам, а также студентам технических специальностей, занимающихся теоретическими вопросами и их приложениями, аспирантам, научным работникам и преподавателям математики.

Автор выражает искреннюю признательность за внимание и поддержку доктору физико-математических наук, профессору Череповецкого государственного университета Владимиру Васильевичу Мухину и доктору физико-математических наук, Сергею Игоревичу Пискареву, ведущему научному сотруднику НИВЦ Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Работа выполнена в соответствии с проектом № 10–01–00297–а.

ГЛАВА 1

1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЦИРКУЛЯНТНЫМИ МАТРИЦАМИ

1.1. Теплицевы матрицы. Квадратная матрица порядка N называется **теплицевой**, если на каждой из диагоналей, параллельных главной, расположены одинаковые элементы. Элементами теплицевой матрицы являются комплексные числа, в частности, и вещественные. Теплицева матрица порядка N имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{N-3} & a_{N-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \dots & a_{N-4} & a_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N+2} & a_{-N+3} & a_{-N+4} & \dots & a_0 & a_1 \\ a_{-N+1} & a_{-N+2} & a_{-N+3} & \dots & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix}.$$

В следующем утверждении приводится признак теплицевости матрицы. Для глубокого изучения этого параграфа рекомендуем [21, 23, 52].

Теорема 1.1. ***Для того, чтобы квадратная матрица*** $A = \left[a_{mn} \right]_{N \times N}$ ***являлась теплицевой, необходимо и достаточно выполнение равенства***

$$a_{m'n'} = a_{m''n''} \tag{1.1}$$

для всех $1 \le m', n', m'', n'' \le N$ ***таких, что***

$$m' - n' = m'' - n''. \tag{1.2}$$

Доказательство этой теоремы следует из того, что, если для пар индексов (m', n') и (m'', n'') выполняется равенство (1.2), то элементы $a_{m'n'}$ и $a_{m''n''}$ принадлежат одной диагонали, параллельной главной.

1.2. Циркулянтная матрица. Квадратная матрица $A=\left[a_{mn}\right]_{N\times N}$ называется **циркулянтной**, если равенство (1.1) имеет место при выполнении условия

$$m'-n'\equiv m''-n''\,(\operatorname{mod} N)\,. \tag{1.3}$$

Циркулянтная матрица порядка N имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{N-3} & a_{N-2} \\ a_{N-2} & a_{N-1} & a_0 & \dots & a_{N-4} & a_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & a_0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что каждая строка циркулянтной матрицы, начиная со второй, получается из предыдущей путем ее сдвига вправо на одну позицию с последующим дополнением последнего вытесненного элемента на первое место.

1.3. Матрица перестановок. Простейшим примером циркулянтной матрицы порядка N является так называемая **матрица перестановок**

$$Q=\left[\begin{array}{c:ccc} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]. \tag{1.4}$$

Если через E_n обозначить единичную матрицу порядка $n:\ \ 1\le n\le\ N$, то матрицу перестановок можно записать в блочном виде

$$Q=\left[\begin{array}{c:c} 0 & E_{N-1} \\ \hdashline E_1 & 0 \end{array}\right]. \tag{1.5}$$

Для степеней матрицы перестановок справедливо равенство

$$Q^k = \left[\begin{array}{c:c} 0 & E_{N-k} \\ \hdashline E_k & 0 \end{array}\right], \tag{1.6}$$

причем

$$Q^N = E\,, \tag{1.7}$$

где $E = E_N$ – единичная матрица порядка N. Например, для случая $N = 4$ имеем

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E\,.$$

Справедливость равенств (1.6) и (1.7) проверяется непосредственно.

Так как $Q^{N-1} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 \\ E_{N-1} & 0 \end{bmatrix} = Q^{\mathrm{T}}$, где «Т» – операция матричного транспонирования, то справедливы равенства

$$Q^{\mathrm{T}} Q = E\,, \qquad Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1}\,. \tag{1.8}$$

1.4. Разложение циркулянтных матриц. Множество всех циркулянтных матриц одного порядка образует линейное пространство с обычными операциями сложения двух матриц и умножения матрицы на число.

Лемма 1.1. ***Сумма*** $C^{(1)} + C^{(2)}$ ***циркулянтных матриц*** $C^{(1)}$ ***и*** $C^{(2)}$ ***порядка*** N ***является циркулянтной матрицей порядка*** N **.**

Доказательство. Пусть $C^{(1)}=\left[c_{mn}^{(1)}\right]$ и $C^{(2)}=\left[c_{mn}^{(2)}\right]$ – циркулянтные матрицы. Тогда $c_{m'n'}^{(1)}=c_{m''n''}^{(1)}$ и $c_{m'n'}^{(2)}=c_{m''n''}^{(2)}$, если

$$m'-n'\equiv m''-n''(\operatorname{mod}N),\quad 1\le m',n',m'',n''\le N \tag{1.9}$$

Положим $c_{mn}=c_{mn}^{(1)}+c_{mn}^{(2)}$. Тогда при выполнении условия (1.9) имеем

$$c_{m'n'}=c_{m'n'}^{(1)}+c_{m'n'}^{(2)}=c_{m''n''}^{(1)}+c_{m''n''}^{(2)}=c_{m''n''}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.2. ***Произведение λC циркулянтной матрицы C порядка N на комплексное число λ является циркулянтной матрицей порядка N.***

Доказательство леммы очевидно.

Важную роль в доказательстве справедливости различных свойств циркулянтных матриц играет следующее утверждение.

Теорема 1.2. ***Для того, чтобы $\left[c_0\ c_1\ \ldots\ c_{N-1}\right]$ являлась первой строкой циркулянтной матрицы C, необходимо и достаточно выполнение равенства***

$$C=c_0E+c_1Q+\ldots+c_{N-1}Q^{N-1}=\sum_{k=0}^{N-1}c_kQ^k\ . \tag{1.10}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть C – циркулянтная матрица с первой строкой $\left[c_0\ c_1\ \ldots\ c_{N-1}\right]$. Тогда

$$C=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-2} & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{N-3} & c_{N-2} \\ c_{N-2} & c_{N-1} & c_0 & \cdots & c_{N-4} & c_{N-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{N-1} & c_0 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\dots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{N-1} \\ c_{N-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_{N-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{N-1} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= c_0 E + c_1 Q + c_2 Q^2 + \dots + c_{N-2} Q^{N-2} + c_{N-1} Q^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k Q^k \, .$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Так как все степени матрицы перестановок

$$Q^0 = E, \;\; Q, \;\; Q^2, \; \dots, \;\; Q^{N-1}$$

являются циркулянтными, то для завершения доказательства достаточно применить леммы 1.1 и 1.2. Достаточность доказана.

Теорема доказана.

1.5. Критерий циркулянтности матрицы. С помощью матрицы перестановок можно сформулировать простой признак циркулянтности матрицы.

Теорема 1.3. ***Квадратная матрица A порядка N является циркулянтной тогда и только тогда, когда она коммутирует с матрицей перестановок Q, то есть***

$$AQ = QA. \tag{1.11}$$

Доказательство. Необходимость. Если матрица A является циркулянтной, то для нее справедливо представление (1.10). Так как для любого натурального k справедливо равенство $Q^kQ = QQ^k$, то

$$AQ = \sum_{k=0}^{N-1} c_k Q^k \cdot Q = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \left(Q^k Q\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \left(QQ^k\right) = Q\sum_{k=0}^{N-1} c_k Q^k = QA.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $A = \left[a_{mn}\right]$ – произвольная квадратная матрица, удовлетворяющая равенству (1.11). Докажем, что матрица A является циркулянтной.

Запишем равенство (1.11) в виде

$$A = QAQ^{\mathrm{T}}. \tag{1.12}$$

Представим матрицу A в блочном виде, выделив первую строку и первый столбец:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

Тогда, в силу (1.5) И (1.8), будем иметь

$$QAQ^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{c|c} A_{22} & A_{21} \\ \hline A_{12} & a_{11} \end{array}\right], \tag{1.13}$$

где $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & \dots & a_{1N} \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{N1} \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}$.

Если на пересечении m-ой строки и n-го столбца в левой части равенства (1.12) находится элемент a_{mn}, то в правой части будет находиться элемент:

$$
\begin{array}{lll}
a_{m+1,n+1} & \text{при} & m<N,\quad n<N\ ; \\
a_{m+1,1} & \text{при} & m<N,\quad n=N\ ; \\
a_{1,n+1} & \text{при} & m=N,\quad n<N\ ; \\
a_{1,1} & \text{при} & m=N,\quad n=N\ .
\end{array}
$$

Матричное равенство (1.12) с учетом этих соотношений поэлементно можно записать одним равенством

$$a_{m,n}=a_{m+1,n+1[\operatorname{mod}N]}, \tag{1.14}$$

где $[\operatorname{mod}N]$ – обозначение наименьшего положительного вычета по модулю N. Для индексов из равенства (1.14) выполняется равенство (1.3), которое эквивалентно циркулянтности матрицы A.

Теорема доказана.

1.6. Свойства циркулянтных матриц. Циркулянтные матрицы обладают некоторыми свойствами, характерными этим матрицам.

Свойство 1.1. ***Произведение двух циркулянтных матриц является циркулянтной матрицей.***

Доказательство. Пусть $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ являются циркулянтными матрицами. В силу теоремы 1.3 имеют место равенства $C^{(1)}Q=QC^{(1)}$, $C^{(2)}Q=QC^{(2)}$. Принимая эти равенства во внимание, получаем

$$\left(C^{(1)}C^{(2)}\right)Q=C^{(1)}\left(C^{(2)}Q\right)=C^{(1)}\left(QC^{(2)}\right)=$$

$$=\left(C^{(1)}Q\right)C^{(2)}=\left(QC^{(1)}\right)C^{(2)}=Q\left(C^{(1)}C^{(2)}\right).$$

Отсюда по теореме 1.3 вытекает, что матрица $C^{(1)}C^{(2)}$ является циркулянтной.

Свойство 1.2. ***Если циркулянтная матрица невырожденная, то обратная к ней является циркулянтной.***

Доказательство. Пусть C является невырожденной циркулянтной матрицей. Умножая равенство $CQ = QC$ слева и справа на матрицу C^{-1}, получим

$$C^{-1}(CQ)C^{-1} = C^{-1}(QC)C^{-1} \quad \Rightarrow \quad QC^{-1} = C^{-1}Q.$$

Отсюда в силу теоремы 1.3 получаем циркулянтность обратной матрицы C^{-1}.

Свойство 1.3. ***Пусть*** $C^{(1)}$ ***и*** $C^{(2)}$ ***– циркулянтные матрицы одного и того же порядка. Тогда***

$$C^{(1)}C^{(2)} = C^{(2)}C^{(1)}. \tag{1.15}$$

Доказательство. Согласно теореме 1.2

$$C^{(1)} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(1)} Q^k, \qquad C^{(2)} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(2)} Q^k,$$

где $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$, $k = \overline{1,\ N-1}$ – элементы, составляющие первые строки матриц $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$, соответственно. Тогда

$$C^{(1)}C^{(2)} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{\substack{1 \le m,\, n \le N \\ m+n \equiv k (\operatorname{mod} N)}} c_m^{(1)} c_n^{(2)} \right) Q^k,$$

$$C^{(2)}C^{(1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{\substack{1 \le m,\, n \le N \\ m+n \equiv k (\operatorname{mod} N)}} c_m^{(2)} c_n^{(1)} \right) Q^k.$$

Отсюда в силу очевидного равенства

$$\sum_{\substack{1 \le m,\, n \le N \\ m+n \equiv k (\operatorname{mod} N)}} c_m^{(1)} c_n^{(2)} = \sum_{\substack{1 \le m,\, n \le N \\ m+n \equiv k (\operatorname{mod} N)}} c_m^{(2)} c_n^{(1)}$$

получаем справедливость (1.15).

1.7. Свойства корней N -ой степени из единицы. Отметим некоторые свойства корней N -ой степени из единицы [45, с. 127 – 129]:

$$w_m = e^{-i\frac{2\pi}{N}m}, \qquad m = \overline{0,\ N-1}. \tag{1.16}$$

Свойство 1.4. ***Для любого*** m: $m = \overline{0,\ N-1}$ ***справедливо равенство***

$$w_m^N = 1, \qquad m = \overline{0,\ N-1}. \tag{1.17}$$

Действительно,

$$w_m^N = \left(e^{-i\frac{2\pi}{N}m} \right)^N = \left(e^{-i2\pi} \right)^m = 1^m = 1, \qquad m = \overline{0,\ N-1}.$$

Свойство 1.5. ***Для любых*** k, m: $k, m = \overline{0,\ N-1}$ ***справедливы равенства***

$$w_m^k = w_k^m = w_1^{km}.$$

Действительно,

$$w_m^k = \left(e^{-i\frac{2\pi}{N}m} \right)^k = e^{-i\frac{2\pi}{N}km},$$

$$w_k^m = \left(e^{-i\frac{2\pi}{N}k} \right)^m = e^{-i\frac{2\pi}{N}km},$$

$$w_1^{km} = \left(e^{-i\frac{2\pi}{N}} \right)^{km} = e^{-i\frac{2\pi}{N}km}.$$

Свойство 1.6. ***Для любого*** m: $m = \overline{0,\ N-1}$ ***справедливо равенство***

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_m^k = \begin{cases} N, & \text{если} \quad m = 0, \\ 0, & \text{если} \quad m \neq 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

Действительно, если $m = 0$, то $w_0 = 1$ и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_0^k = \sum_{k=0}^{N-1} 1^k = N;$$

если $1 \leq m \leq N-1$, то в силу (1.17) $w_m^N = 1,\quad w_m \neq 1$ и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_m^k = \frac{1 - w_m^N}{1 - w_m} = \frac{1-1}{1-w_m} = 0.$$

Равенство (1.18) доказано.

1.8. Матрица Фурье. Для установления дальнейших свойств циркулянтных матриц вводим следующее понятие. Квадратная матрица N -го порядка

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} w_0^0 & w_0^1 & w_0^2 & \dots & w_0^{N-1} \\ w_1^0 & w_1^1 & w_1^2 & \dots & w_1^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{N-1}^0 & w_{N-1}^1 & w_{N-1}^2 & \dots & w_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix}, \tag{1.19}$$

где числа w_m, $m = \overline{0,\ N-1}$ определены в (1.16), называется **матрицей Фурье (матрицей дискретного преобразования Фурье)**.

Замечание 1.1. Матрица Фурье, определенная нами равенством (1.19) отличается от аналогичной матрицы, приведенной в работах [21, 23]. В них в записи матрицы Фурье отсутствует нормирующий множитель $1/\sqrt{N}$.

Докажем одно важное свойство матрицы Фурье.

Теорема 1.4. ***Матрица Фурье* (1.19) *является унитарной:***

$$F^* = F^{-1}, \tag{1.20}$$

где $$F^* = \overline{F}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \overline{w}_0^0 & \overline{w}_1^0 & \dots & \overline{w}_{N-1}^0 \\ \overline{w}_0^1 & \overline{w}_1^1 & \dots & \overline{w}_{N-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{w}_0^{N-1} & \overline{w}_1^{N-1} & \dots & \overline{w}_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix}$$

– комплексно-сопряженная матрица к матрице F **.**

Доказательство. Положим

$$S = \left[s_{m\,n} \right] = F^* F \,. \tag{1.21}$$

Принимая во внимание свойства 1.4 – 1.6, будем иметь

$$s_{m\,n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{w}_k^m w_k^n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{w}_1^{k\,m} w_1^{k\,n} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_1^{-k\,m} w_1^{k\,n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_1^{k(n-m)} =$$

$$= \frac{1}{N} \begin{cases} N, & \text{если} \quad m = n, \\ 0, & \text{если} \quad m \neq n, \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m = n, \\ 0, & \text{если} \quad m \neq n. \end{cases}$$

Таким образом, доказано, что матрица (1.21) является единичной: $S = E$. Полученное равенство устанавливает справедливость (1.20). Теорема доказана.

1.9. Собственные значения и собственные векторы матрицы перестановок. Собственные значения и собственные векторы матрицы перестановок (1.4) связаны с корнями N -ой степени из единицы (1.16). Действительно, непосредственным вычислением находим характеристический многочлен матрицы перестановок

$$\det(Q - \lambda E) = (-1)^N \left(\lambda^N - 1 \right), \tag{1.22}$$

где N – порядок матрицы Q. Отсюда следует, что собственными значениями этой матрицы являются числа

$$\lambda_m = w_m, \qquad m = \overline{0,\, N-1}. \tag{1.23}$$

Собственными векторами, отвечающими этим собственным значениям, являются векторы:

$$e_m = \begin{bmatrix} w_m^0 \\ w_m^1 \\ \vdots \\ w_m^{N-2} \\ w_m^{N-1} \end{bmatrix}, \qquad m = \overline{0,\, N-1}. \tag{1.24}$$

Действительно, пусть числа λ_m и векторы e_m определены равенствами (1.23) и (1.24). Тогда для $m = \overline{0,\, N-1}$, имеем

$$Qe_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_m^0 \\ w_m^1 \\ \vdots \\ w_m^{N-2} \\ w_m^{N-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} w_m^1 \\ w_m^2 \\ \vdots \\ w_m^{N-1} \\ w_m^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_m^1 \\ w_m^2 \\ \vdots \\ w_m^{N-1} \\ w_m^N \end{bmatrix} = w_m \begin{bmatrix} w_m^0 \\ w_m^1 \\ \vdots \\ w_m^{N-2} \\ w_m^{N-1} \end{bmatrix} = \lambda_m e_m .$$

Таким образом, нами доказано утверждение.

Теорема 1.5. ***Собственными значениями и собственными векторами матрицы перестановок являются числа*** λ_m ***и векторы*** e_m***, определенные в*** **(1.23)** ***и*** **(1.24),** ***соответственно.***

Корни N-ой степени из единицы расположены на единичной окружности с центром в начале координат. Они делят эту окружность на равные части, причем точка пересечения окружности с вещественной осью (ось абсцисс) является одной из точек деления независимо от значений N. Вышесказанное указывает на то, что собственные значения являются различными. Следовательно, жордановой формой [1, 12] матрицы перестановок является диагональная матрица. Матрица, которая приводит матрицу перестановок к жордановой форме, является матрицей Фурье. Для краткости записи вводим обозначение, используемое в дальнейшем:

$$\operatorname{diag}\left(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_N\right)=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_N \end{bmatrix}. \tag{1.25}$$

Справедлива следующая

Теорема 1.6. ***Пусть*** Q ***и*** F ***– матрицы перестановок и Фурье порядка*** N***, соответственно. Тогда справедливо равенство***

$$F^*QF=\operatorname{diag}\left(w_0,\ w_1,\ \dots,\ w_{N-1}\right), \tag{1.26}$$

где w_m, $m=\overline{0,\ N-1}$ ***являются корнями*** N ***-ой степени из единицы*** **(1.16).**

Доказательство. Так как

$$F^*Q=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix} \overline{w}_{N-1}^0 & \overline{w}_0^0 & \overline{w}_1^0 & \dots & \overline{w}_{N-2}^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{w}_{N-1}^m & \overline{w}_0^m & \overline{w}_1^m & \dots & \overline{w}_{N-2}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{w}_{N-1}^{N-1} & \overline{w}_0^{N-1} & \overline{w}_1^{N-1} & \dots & \overline{w}_{N-2}^{N-1} \end{bmatrix}=$$

$$=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\bar{w}_0},\ \frac{1}{\bar{w}_1},\ \dots\ ,\ \frac{1}{\bar{w}_{N-1}}\right)\cdot F^* =$$

$$=\operatorname{diag}\left(w_0,\ w_1,\ \dots\ ,\ w_{N-1}\right)\cdot F^*,$$

то

$$F^*QF=\operatorname{diag}\left(w_0,\ w_1,\ \dots\ ,\ w_{N-1}\right)\cdot F^*F=$$

$$=\operatorname{diag}\left(w_0,\ w_1,\ \dots\ ,\ w_{N-1}\right)\cdot E=\operatorname{diag}\left(w_0,\ w_1,\ \dots\ ,\ w_{N-1}\right).$$

Теорема доказана.

Следствие 1.1. ***Для любого*** $k:\ k=0,\dots,N-1$ ***справедливо равенство***

$$F^*Q^kF=\operatorname{diag}\left(w_0^k,\ w_1^k,\ \dots\ ,\ w_{N-1}^k\right).$$

1.10. Собственные значения циркулянтной матрицы. Одним из уникальных свойств циркулянтных матриц является то, что их собственные значения являются либо простыми, либо полупростыми. Более того, все циркулянтные матрицы подобны диагональным матрицам и приводятся к диагональной форме одной матрицей – матрицей Фурье.

Теорема 1.7. ***Пусть*** $c^{\mathrm{T}}=\left(c_0,\ c_1,\ \dots\ ,\ c_{N-1}\right)$ ***– первая строка циркулянтной матрицы*** C ***. Тогда:***

1) ***собственные значения матрицы*** C

$$\lambda_m=\varphi\left(w_m\right),\qquad m=\overline{0,\ N-1}, \tag{1.27}$$

где

$$\varphi(w)=\sum_{k=0}^{N-1}c_kw^k\ ; \tag{1.28}$$

2) ***справедливы равенства***

$$F^*CF=\operatorname{diag}\left(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \dots,\ \lambda_{N-1}\right), \tag{1.29}$$

$$Fc = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{N-1}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{1.30}$$

Доказательство. Согласно теореме 1.2 справедливо разложение

$$C = \sum_{k=0}^{N-1} c_k Q^k .$$

В силу следствия 1.1

$$F^* C F = F^*\left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k Q^k\right) F = \sum_{k=0}^{N-1} c_k F^* Q^k F =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \operatorname{diag}\left(w_0^k,\ w_1^k,\ \ldots,\ w_{N-1}^k\right) =$$

$$= \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k w_0^k,\ \sum_{k=0}^{N-1} c_k w_1^k,\ \ldots,\ \sum_{k=0}^{N-1} c_k w_{N-1}^k\right) =$$

$$= \operatorname{diag}\left(\varphi(w_0),\ \varphi(w_1),\ \ldots,\ \varphi(w_{N-1})\right),$$

где многочлен $\varphi(w)$ определен в (1.28). Равенства (1.27) и (1.29) доказаны. Равенство (1.30) состоит из умножения матрицы на вектор.

Теорема доказана.

1.11. Быстрое решение циркулянтных систем. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Cx = f , \tag{1.31}$$

где C – циркулянтная матрица порядка N, $f \in \mathbb{C}^N$ – заданный, а $x \in \mathbb{C}^N$ – искомый вектор.

Быстрый алгоритм решения системы (1.31) связан с заменой этой системы на две системы

$$F^* C F y = F^* f \tag{1.32}$$

и

$$x = Fy . \tag{1.33}$$

В левой части системы (1.32) содержится двойное произведение F^*CF. Однако нет необходимости его выполнять. В силу теоремы 1.7 матрица F^*CF является диагональной. Поэтому требуется вычислить только значения многочлена

$$\varphi(w) = c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \ldots + c_{N-1} w^{N-1}, \qquad (1.34)$$

где коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{N-1}$ – первая строка циркулянтной матрицы C.

Если матрица C – невырожденная, то все числа $\varphi(w_m)$, $m = \overline{0, N-1}$ являются ненулевыми и решение системы (1.32) находится по формуле

$$y_m = \frac{\left[F^* f\right]_m}{\varphi(w_m)}, \quad m = \overline{0, N-1}, \qquad (1.35)$$

где y_m и $\left[F^* f\right]_m$ являются m-ми координатами векторов y и $F^* f$, соответственно.

Координаты x_m искомого вектора x – решения системы (1.33) вычисляются как значения многочлена

$$\varphi_1(w) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(y_0 + y_1 w + y_2 w^2 + \ldots + y_{N-1} w^{N-1}\right) \qquad (1.36)$$

при $w = w_m$, $m = \overline{0, N-1}$.

Таким образом, по предложенному алгоритму следует вычислить значения многочленов $\varphi(w)$, $\varphi_1(w)$ при $w = w_m$, $m = \overline{0, N-1}$ и один раз произвести серию делений (1.35). Если для выполнения делений (1.35) требуется N операций деления, то непосредственное вычисление значений многочленов (1.34) и (1.36) при $w = w_m$, $m = \overline{0, N-1}$ требует использования N^2 (по порядку) операций умножения. Однако применение алгоритма дискретного преобразования Фурье (ДПФ) позволяет этот порядок понизить до $N\log_2 N$ операций умножения.

2. РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПЕРЦИРКУЛЯНТНЫМИ МАТРИЦАМИ

2.1. Ганкелевы матрицы. Квадратная матрица порядка N называется **ганкелевой** [25, с. 301 – 302], если на каждой из диагоналей, параллельных побочной диагонали матрицы, расположены одинаковые элементы. Элементами ганкелевой матрицы являются комплексные числа, в частности, и вещественные. Любая ганкелева матрица порядка N имеет вид

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{N-2} & b_{N-1} \\ b_1 & & \iddots & \iddots & b_N \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ b_{N-2} & \iddots & \iddots & & b_{2N-2} \\ b_{N-1} & b_N & \dots & b_{2N-2} & b_{2N-1} \end{bmatrix}.$$

В следующем утверждении приводится признак ганкелевости матрицы.

Теорема 2.1. ***Для того, чтобы квадратная матрица*** $B=\left[b_{mn}\right]_{N\times N}$ ***являлась ганкелевой, необходимо и достаточно выполнение равенства***

$$b_{m'n'}=b_{m''n''} \tag{2.1}$$

для всех $1\le m', n', m'', n''\le N$ ***таких, что***

$$m'+n'=m''+n''. \tag{2.2}$$

Доказательство этой теоремы следует из того, что, если для пар индексов (m', n') и (m'', n'') выполняется равенство (2.2), то элементы

$a_{m'n'}$ и $a_{m''n''}$ принадлежат одной диагонали, параллельной побочной диагонали матрицы.

2.2. Перциркулянтная матрица. Квадратная матрица $B = \left[b_{mn} \right]_{N \times N}$ называется **перциркулянтной**, если равенство (2.1) имеет место при выполнении условия

$$m' + n' \equiv m'' + n'' \left(\operatorname{mod} N \right).$$

Замечание. Термин «перциркулянтная матрица» не является общепризнанным. Впервые он был использован в работе [75] и введен по аналогии с термином «персимметрическая матрица».

Перциркулянтная матрица порядка N имеет вид

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_{N-2} & p_{N-1} \\ p_1 & & \iddots & \iddots & p_0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ p_{N-2} & \iddots & \iddots & & p_{N-3} \\ p_{N-1} & p_0 & \cdots & p_{N-3} & p_{N-2} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что каждая строка перциркулянтной матрицы, начиная со второй, получается из предыдущей путем ее сдвига влево на одну позицию с последующим дополнением первого вытесненного элемента на последнее место.

2.3. Матрица отражения. Простейшим примером перциркулянтной матрицы порядка N является так называемая **матрица отражения**

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Если переставить все столбцы (строки) матрицы отражения в обратном порядке, то получится единичная матрица порядка N.

Отметим некоторые свойства матрицы отражения. Для любого натурального числа N справедливы равенства:

$$R^2 = E\,, \tag{2.4}$$

$$R^{\mathrm{T}} = R\,, \tag{2.5}$$

$$R^{-1} = R\,. \tag{2.6}$$

Справедливость равенств (2.4)-(2.6) проверяется непосредственно.

Произведение матрицы отражения R на произвольную квадратную матрицу $B = \left[b_{mn} \right]_{N\times N}$ слева дает матрицу, которая получается из матрицы B перестановкой всех ее строк в обратном порядке

$$RB = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & \cdots & b_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{N1} & \cdots & b_{NN} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{11} & \cdots & b_{1N} \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

а справа дает матрицу, которая получается из матрицы B перестановкой всех ее столбцов в обратном порядке

$$BR = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & \cdots & b_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1N} & \cdots & b_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{NN} & \cdots & b_{N1} \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

2.4. Критерий перциркулянтности матрицы. С помощью матрицы отражения можно сформулировать простой признак перциркулянтности матрицы. Из определения перциркулянтной матрицы, равенств (2.7) и (2.8) получаем следующее утверждение.

Теорема 2.2. ***Квадратная матрица*** P ***порядка*** N ***является перциркулянтной тогда и только тогда, когда любая из матриц*** RP ***или*** PR ***является циркулянтной.***

Заметим, что матрицы RP и PR являются или не являются циркулянтными одновременно.

К теореме 2.2 можно добавить следующее утверждение:

Теорема 2.3. ***Квадратная матрица C порядка N является циркулянтной тогда и только тогда, когда любая из матриц RC или CR является перциркулянтной.***

Теоремы 2.2 и 2.3 показывают, что умножение на матрицу отражения есть взаимно однозначное соответствие между множествами циркулянтных и перциркулянтных матриц одного и того же порядка.

2.5. Свойства перциркулянтных матриц. Перечислим некоторые свойства перциркулянтных матриц.

Свойство 2.1. ***Сумма $P^{(1)}+P^{(2)}$ перциркулянтных матриц $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ порядка N является перциркулянтной матрицей порядка N.***

Доказательство. В силу теоремы 2.2 каждая из матриц $RP^{(1)}$ и $RP^{(2)}$ является циркулянтной. Тогда их сумма

$$RP^{(1)}+RP^{(2)}=R\left(P^{(1)}+P^{(2)}\right)$$

является циркулянтной матрицей. Отсюда и из теоремы 2.3 вытекает, что матрица $P^{(1)}+P^{(2)}$ является перциркулянтной. Что и требовалось доказать.

Свойство 2.2. ***Разность $P^{(1)}-P^{(2)}$ перциркулянтных матриц $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ порядка N является перциркулянтной матрицей порядка N.***

Свойство 2.3. ***Произведение λP перциркулянтной матрицы P порядка N и комплексного числа λ является перциркулянтной матрицей порядка N.***

Эти свойства доказываются аналогично свойству 2.1.

Свойство 2.4. ***Произведение двух перциркулянтных матриц является циркулянтной матрицей.***

Доказательство. Пусть $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ – перциркулянтные матрицы. В силу теоремы 2.2 каждая из матриц $P^{(1)}R$ и $RP^{(2)}$ является циркулянтной. Так как произведение двух циркулянтных матриц является циркулянтной матрицей (свойство 1.1), то матрица $P^{(1)}R \cdot RP^{(2)}$ – циркулянтная. Отсюда в силу равенства (2.4) получаем, что матрица

$$P^{(1)}R \cdot RP^{(2)} = P^{(1)}R^2P^{(2)} = P^{(1)}EP^{(2)} = P^{(1)}P^{(2)}$$

является циркулянтной. Что и требовалось доказать.

Свойство 2.5. ***Пусть*** P ***– перциркулянтная и*** C ***– циркулянтная матрицы. Тогда каждое из произведений*** PC ***и*** CP ***является перциркулянтной матрицей.***

Доказательство. В силу теоремы 2.2 матрица RP является циркулянтной. Тогда произведение двух циркулянтных матриц $RP \cdot C$ является циркулянтной матрицей. В силу теоремы 2.3 матрица

$$R \cdot (RP \cdot C) = R^2PC = EPC = PC$$

является перциркулянтной.

Так как PR – циркулянтная матрица, то $C \cdot PR$ также циркулянтная матрица. Тогда матрица

$$(C \cdot PR) \cdot R = CP \cdot R^2 = CPE = CP$$

является перциркулянтной. Что и требовалось доказать.

Свойство 2.6. ***Если перциркулянтная матрица невырожденная, то обратная является перциркулянтной.***

Доказательство. Пусть P – невырожденная перциркулянтная матрица. Тогда матрица RP является циркулянтной. В силу свойства 1.2 обратная матрица $(RP)^{-1}$ является циркулянтной. Отсюда и так как

$$(RP)^{-1} = P^{-1}R^{-1} = P^{-1}R,$$

то в силу теоремы 2.2 матрица P^{-1} является перциркулянтной. Что и требовалось доказать.

2.6. Преобразование Фурье матрицы отражения. Дискретное преобразование Фурье над матрицей отражения является важным моментом разработки быстрого алгоритма решения систем с перциркулянтными матрицами. Введем обозначение:

$$\mathrm{pd}\left(\mu_0,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_{N-1}\right)=\left[\begin{array}{c:ccc} \mu_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & & \mu_1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 0 & \mu_{N-1} & & 0 \end{array}\right]. \tag{2.9}$$

Теорема 2.4. ***Пусть*** R ***– матрица отражения*** **(2.3)** ***и*** F ***– матрица Фурье*** **(1.18)** ***порядка*** N ***. Тогда справедливо равенство***

$$F^{*}RF = pd\left(w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_{N-1}\right), \tag{2.10}$$

где

$$w_k = e^{-i\frac{2\pi}{N}k}, \qquad k=\overline{0,\ N-1}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Положив $F^{*}RF=\left[s_{mn}\right]$, будем иметь

$$s_{mn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\overline{w}_k^{m}w_{N-1-k}^{n}=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}w_1^{-km}w_1^{n(N-1-k)}=\frac{1}{N}w_1^{-n}\sum_{k=0}^{N-1}w_1^{-k(m+n)}=$$

$$=\begin{cases} w_1^{m}, & \text{если} \quad m+n=0(\operatorname{mod}N), \\ 0, & \text{если} \quad m+n\neq 0(\operatorname{mod}N), \end{cases}=$$

$$=\begin{cases} w_m, & \text{если} \quad m+n=0(\operatorname{mod}N), \\ 0, & \text{если} \quad m+n\neq 0(\operatorname{mod}N), \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

2.7. Преобразование Фурье перциркулянтной матрицы. Для разработки быстрых алгоритмов решения СЛАУ с перциркулянтными матрицами требуется выполнение дискретного преобразования Фурье над такими матрицами. Результат такого преобразования сформулирован в следующем утверждении.

Теорема 2.5. ***Если*** $\left(p_0,\ p_1,\ \dots\ ,\ p_{N-1}\right)$ ***– первая строка перциркулянтной матрицы*** P***, то справедливо равенство***

$$F^*PF = \mathrm{pd}\left(w_0\psi\left(w_0\right),\, w_1\psi\left(w_1\right),\dots,\, w_{N-1}\psi\left(w_{N-1}\right)\right), \qquad (2.12)$$

где

$$\psi(w) = \sum_{k=0}^{N-1} p_{N-1-k} w^k\ , \qquad (2.13)$$

а матрица $\mathrm{pd}(\dots)$ ***– определена в*** **(2.9).**

Доказательство. В силу равенства (2.4)

$$F^*PF = F^*PR^2F = F^*(PR)F \cdot F^*RF\ . \qquad (2.14)$$

Матрица PR является циркулянтной с первой строкой $\left(p_{N-1},\ p_{N-2},\ \dots\ ,\ p_1,\ p_0\right)$. По теореме 1.7

$$F^*(PR)F = \mathrm{diag}\left(\psi\left(w_0\right),\ \psi\left(w_1\right),\ \dots,\ \psi\left(w_{N-1}\right)\right), \qquad (2.15)$$

где многочлен $\psi(w)$ определен в (2.13). Подставляя (2.10) и (2.15) в (2.14), получаем (2.12).

Теорема доказана.

2.8. Быстрое решение перциркулянтных систем. Рассмотрим СЛАУ

$$Px = f\ , \qquad (2.16)$$

где P – перциркулянтная матрица порядка N, $f \in \mathbb{C}^N$ – заданный, а $x \in \mathbb{C}^N$ – искомый векторы.

Быстрый алгоритм решения системы (2.16) связан с заменой этой системы на две системы

$$F^*PFy = F^*f \tag{2.17}$$

и

$$x = Fy\,. \tag{2.18}$$

В левой части системы (2.17) содержится двойное произведение F^*PF . Однако нет необходимости его выполнять. В силу теоремы 2.5 матрица F^*PF является $\mathrm{pd}(\ldots)$-матрицей вида (2.9). Поэтому требуется только вычислить значения многочлена

$$\psi(w) = p_{N-1} + p_{N-2}w + p_{N-3}w^2 + \ldots + p_1 w^{N-2} + p_0 w^{N-1}, \tag{2.19}$$

где коэффициенты $p_0,\ p_1,\ \ldots\ ,\ p_{N-3},\ p_{N-2},\ p_{N-1}$ составляют первую строку перциркулянтной матрицы P .

Если матрица P – невырожденная, то все числа $w_m\psi(w_m)$, $m = \overline{0,\ N-1}$ являются ненулевыми и решение системы (2.17) находится по формулам

$$y_0 = \frac{\left[F^*f\right]_0}{w_0\psi(w_0)};\quad y_m = \frac{\left[F^*f\right]_{N-m}}{w_m\psi(w_m)},\ \ m = \overline{1,\ N-1}, \tag{2.20}$$

где y_m и $\left[F^*f\right]_m$ являются m-ми координатами векторов y и F^*f , соответственно.

Координаты x_m искомого вектора x – решения системы (2.18) вычисляются как значения многочлена

$$\psi_1(w) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(y_0 + y_1 w + y_2 w^2 + \ldots + y_{N-1}w^{N-1}\right) \tag{2.21}$$

при $w = w_m$, $m = \overline{0,\ N-1}$ – корнях N -ой степени из единицы (2.11).

Таким образом, по предложенному алгоритму требуется вычисление значения многочленов $\varphi(w)$ и $\varphi_1(w)$ при $w = w_m$, $m = \overline{0, N-1}$, и один раз произвести серию делений (2.20). Если для выполнения делений (2.20) требуется N операций деления, то непосредственное вычисление значений многочленов (2.19) и (2.21) при $w = w_m$, $m = \overline{0, N-1}$ требует использования N^2 (по порядку) операций умножения. Однако применение алгоритма дискретного преобразования Фурье позволяет этот порядок понизить до $N \log_2 N$ операций умножения.

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

3.1. Обоснование преобразования перциркулянтной матрицы методом быстрого преобразования Фурье. Как было отмечено выше (теорема 2.2), если P – перциркулянтная матрица, то матрица PR является циркулянтной. Поэтому решение СЛАУ $Px = f$ с перциркулянтной матрицей P сводится к решению СЛАУ $Cy = g$ с циркулянтной матрицей C. При этом циркулянтная матрица C получается из перциркулянтной матрицы P путем перестановки ее столбцов в обратном порядке: $C = PR$, где R – матрица отражения (3.3). Аналогичной перестановкой координат получается вектор g из заданного вектора f: $g = Rf$. Таким образом, если проблема состоит только из решения перциркулянтной системы, то не было бы необходимости в разработке собственного метода решения перциркулянтных систем, который разработан и приведен в предыдущем пункте. Было бы достаточно использовать метод, разработанный в пункте 1, для циркулянтной системы.

Рассмотрим СЛАУ $Ax = f$, где матрица A состоит из суммы циркулянтной матрицы C и перциркулянтной матрицы P: $A = C + P$.

Переставляя столбцы матрицы P в обратном порядке превратим ее в циркулянтную матрицу. В то же время это действие превращает циркулянтную матрицу C в перциркулянтную. Поэтому приведенное выше замечание не позволяет разработать быстрое решение СЛАУ $Cx + Px = f$, исходя только из дискретного преобразования Фурье циркулянтной матрицы. Все это указывает на важность непосредственного преобразования перциркулянтной матрицы методом ДПФ.

3.2. Преобразование Фурье матрицы нейтрального типа. Квадратную матрицу назовем **матрицей нейтрального типа**, если она есть сумма циркулянтной и перциркулянтной матриц. Если C – циркулянтная. а P – перциркулянтная матрица, то матрица $A = C + P$ – матрица нейтрального типа. Если A_1 и A_2 – две матрицы нейтрального типа, то их сумма $A_1 + A_2$, разность $A_1 - A_2$ и произведение $A_1 \cdot A_2$ также являются матрицами нейтрального типа.

Замечание. Термин «матрица нейтрального типа» не является общепризнанным. Он введен нами по аналогии с термином «сингулярное интегральное уравнение Гильберта нейтрального типа».

Рассмотрим циркулянтную и перциркулянтную матрицы C и P с первыми строками

$$\left(c_0, c_1, \dots, c_{N-1}\right) \quad \text{и} \quad \left(p_0, p_1, \dots, p_{N-1}\right), \tag{3.1}$$

соответственно. Положим:

$$\varphi(w) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w^k, \quad \lambda_m = \varphi\left(w_m\right), \quad m = \overline{0, N-1}, \tag{3.2}$$

$$\psi(w) = w \sum_{k=0}^{n-1} p_{N-1-k} w^k, \quad \mu_m = \psi\left(w_m\right), \; m = \overline{0, N-1}. \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. ***Пусть C и P – циркулянтная и перциркулянтная матрицы, с первыми строками* (3.1)*, соответственно. Тогда справедливо равенство***

$$F^*(C+P)F = \mathrm{diag}\left(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\right) + \mathrm{pd}\left(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}\right),$$

***где λ_m и μ_m определены в* (3.2) *и* (3.3).**

Доказательство утверждения теоремы следует из равенств (1.28) и (2.12).

Отметим структуру матрицы $F^*(C+P)F$ в зависимости от четности и нечетности порядка этих матриц.

Если $N = 2M+1$ – нечетное число, то

$$F^*(C+P)F =$$

$$= \left[\begin{array}{c|cccccc}
\lambda_0+\mu_0 & & & & & & \\
\hline
 & \lambda_1 & & & & & \mu_1 \\
 & & \ddots & & & \iddots & \\
 & & & \lambda_M & \mu_M & & \\
 & & & \mu_{M+1} & \lambda_{M+1} & & \\
 & & \iddots & & & \ddots & \\
 & \mu_{2M} & & & & & \lambda_{2M}
\end{array}\right],$$

если $N = 2M$ – четное число, то

$$F^*(C+P)F =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccccccc}
\lambda_0+\mu_0 & & & & & & & \\
\hline
 & \lambda_1 & & & & & & \mu_1 \\
 & & \ddots & & & & \iddots & \\
 & & & \lambda_{M-1} & & \mu_{M-1} & & \\
 & & & & \lambda_M+\mu_M & & & \\
 & & & \mu_{M+1} & & \lambda_{M+1} & & \\
 & & \iddots & & & & \ddots & \\
 & \mu_{2M-1} & & & & & & \lambda_{2M-1}
\end{array}\right].$$

В обеих матрицах ненулевые элементы расположены на двух диагоналях, которые обозначены многоточием, а все остальные элементы равны нулю.

3.3. Быстрое решение нейтральных систем. Алгоритм быстрого решения СЛАУ

$$Ax = b, \tag{3.4}$$

где $A = C + P$ – матрица нейтрального типа порядка N, основана на утверждении теоремы 2.1. Для этого заменим СЛАУ (3.4) на две системы

$$F^*(C+P)Fy = F^*b \tag{3.5}$$

и

$$x = Fy. \tag{3.6}$$

Система (3.5) распадается на отдельные системы второго порядка и одно или два уравнения с одним неизвестным. Это зависит от четности и нечетности числа N.

Если $N = 2M + 1$ – то есть нечетно, то система (3.5) распадается на одно уравнение с одним неизвестным:

$$(\lambda_0 + \mu_0) y_0 = [F^* b]_0$$

и M систем второго порядка:

$$\begin{cases} \lambda_k y_k + \mu_k y_{N-k} = [F^* b]_k, \\ \lambda_{N-k} y_k + \mu_{N-k} y_{N-k} = [F^* b]_{N-k}, \end{cases} \qquad k = \overline{1, M};$$

если же $N = 2M$ – то есть четно, то система (3.5) распадается на два уравнения с одним неизвестным:

$$(\lambda_0 + \mu_0) y_0 = [F^* b]_0,$$

$$(\lambda_M + \mu_M) y_M = [F^* b]_M$$

и на $M - 1$ систем второго порядка

$$\begin{cases} \lambda_k y_k + \mu_k y_{N-k} = [F^* b]_k, \\ \lambda_{N-k} y_k + \mu_{N-k} y_{N-k} = [F^* b]_{N-k}, \end{cases} \qquad k = \overline{1, M-1}.$$

Здесь использованы обозначения:

$$y = \left(y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$F^* b = \left(\left[F^* b\right]_0, \left[F^* b\right]_1, \dots, \left[F^* b\right]_{N-1}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Следовательно, независимо от четности или нечетности N для решения системы (3.5) будет использовано $\sim N \log_2 N$ операций умножения. Нахождение искомой неизвестной x из системы (3.6) использует такое же количество умножений (по порядку).

Таким образом, для решения СЛАУ (3.4) методом быстрого преобразования Фурье будет использовано $\sim N \log_2 N$ операций умножения.

4. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СДВИГОМ ВЫРОЖДЕННЫХ СЛАУ

4.1. Определение метода регуляризации сдвигом. Выше были рассмотрены невырожденные СЛАУ. Прежде чем рассматривать вырожденные СЛАУ, введем понятие регуляризации сдвигом.

Рассмотрим СЛАУ

$$Ax = f, \tag{4.1}$$

где A – произвольная квадратная матрица порядка N, $f \in \mathbb{C}^N$ – заданный, $x \in \mathbb{C}^N$ – искомый векторы, $\mathbb{C}^N$ есть N-мерное комплексное пространство. Наряду с СЛАУ (4.1) будем рассматривать семейство СЛАУ

$$(A + \lambda B)x = f, \tag{4.2}$$

где B – некоторая квадратная матрица порядка N, а $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексный параметр.

Будем говорить, что семейство СЛАУ (4.2) является **регуляризацией сдвигом** СЛАУ (4.1), если, во-первых, СЛАУ (4.2) для всех $f \in \mathbb{C}^N$

имеет единственное решение x_λ при достаточно малых $|\lambda|>0$ и, во-вторых, решение x_λ сходится при $\lambda \to 0$ к некоторому решению СЛАУ (4.1), если $f \in R(A)$.

Известно, что если матрица A обратима, то и матрица $A+\lambda B$ обратима для любой матрицы B при достаточно малых $|\lambda| \geq 0$. Если x_0 – решение СЛАУ (4.1), то справедлива оценка

$$\left\| x_\lambda - x_0 \right\| = O(\lambda). \tag{4.3}$$

Таким образом, если A является обратимой матрицей, то СЛАУ (4.2) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (4.1) для любой квадратной матрицы B порядка N.

Если же матрица A необратима, то, во-первых, СЛАУ (4.1) не при всех $f \in \mathbb{C}^n$ является разрешимой и, во-вторых, даже в случае разрешимости СЛАУ (4.1) и однозначной разрешимости СЛАУ (4.2) может не иметь место оценка (4.3). Поэтому представляет интерес выделение класса пар (A, B) матриц A и B, для которых семейство СЛАУ (4.2) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (4.1).

Заметим, если в (4.2) вместо четверки (A, B, λ, f) положить $\left(A^*A, E, \alpha, A^*f\right)$, где A^* – комплексно-сопряженная матрица для матрицы A, E – единичная матрица, $\alpha>0$, то получается регуляризация А. Н. Тихонова [104, 105], при $\left(A^*A, L^*L, \alpha, A^*f\right)$ получается СЛАУ, решение которой сходится к L- псевдорешению [60, 61, 63], при (A, E, α, f), где $A=A^* \geq 0$, $\alpha>0$, получается регуляризация М.М.Лаврентьева [48 – 50], а случай с произвольной матрицей A рассмотрен В. Н. Фадеевой в [108]; при $(A, E, i\alpha, f)$, где $A=A^* \geq 0$, $\alpha>0$, i - мнимая единица, получается регуляризация А.Б.Бакушинского [7 – 11]); при $B=\sum_{m=1}^{k} g_m^* e_m$, где $e_m, g_m^*, m=\overline{1,k}$ – ортонормированные базисы в $\ker A$ и $\ker A^*$ соответственно, получится СЛАУ для нахождения приближенных значений точек ветвления нелинейных уравнений, изученных Н. А. Сидоровым и В. А. Треногиным [98 – 100, 106] и численного решения сингулярных интегральных уравнений теории упругости и аэродинамики, рассмотренных Н. Г. Афендиковой, С. М. Белоцерковским и И. К. Лифановым [3 – 5, 13, 14, 52 – 55].

4.2. Обозначения и основные результаты. Ниже используем следующие обозначения: A^+ – псевдообратная матрица для матрицы A [12, 22, 25]; $Q = E - A^+A$ – ортогональный проектор на $\ker A$ – ядро матрицы A; $P = E - AA^+$ – ортогональный проектор на $\ker A^*$; $F = PBQ$; $T = \left(F^+B - E\right)A^+$; $\Lambda_0 = \left\{z \in \mathbb{C}:\ 0 < \left|z\right| < \rho_0\right\}$, ρ_0 – некоторое достаточно малое положительное число; $\Delta(\lambda) = \det(A + \lambda B)$.

Основными результатами данного пункта являются следующие утверждения.

Теорема 4.1. ***Для того чтобы семейство СЛАУ* (4.2) *являлось регуляризацией сдвигом СЛАУ* (4.1), *необходимо и достаточно выполнение условия:***

(А) ***существует*** $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ***такое, что*** $\Delta\left(\lambda_0\right) \neq 0$ ***и имеет место равенство***

$$R(A) \cap R(BQ) = \{0\}. \tag{4.4}$$

Доказательство теоремы 4.1 приводится в п. 4.4.

Наряду с условием (А) рассмотрим следующие условия:

(Б) имеет место равенство

$$F^+F = Q; \tag{4.5}$$

(В) имеет место равенство

$$FF^+ = P; \tag{4.6}$$

(Г) справедливо разложение в матричный ряд

$$(A+\lambda B)^{-1} = \lambda^{-1}F^{+} + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{m}(TB)^{m} T\left(BF^{+} - E\right), \tag{4.7}$$

где $\lambda \in C$, $0 < |\lambda| < \rho^{-1}$, $\rho = \rho(TB)$ – спектральный радиус матрицы-оператора TB;

(Д) имеет место оценка

$$\left\|(A+\lambda B)^{-1}\right\| = O\left(|\lambda|^{-1}\right), \quad \lambda \in \Lambda_0; \tag{4.8}$$

(Е) имеет место оценка

$$\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1}\right\| \le \text{const}, \quad \lambda \in \Lambda_0; \tag{4.9}$$

(Ж) имеет место оценка

$$\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1} B\right\| \le \text{const}, \quad \lambda \in \Lambda_0; \tag{4.10}$$

(З) имеет место оценка

$$\left\|(A+\lambda B)^{-1} A\right\| \le \text{const}, \quad \lambda \in \Lambda_0; \quad 4.11)$$

(И) имеет место равенство

$$R(A) + R(BQ) = \mathbb{C}^{n}; \tag{4.12}$$

(К) имеет место неравенство

$$\Delta^{(k)}(0) \ne 0, \tag{4.13}$$

где $k = n - r$, а $r = \operatorname{rank} A$ – ранг матрицы A.

Связь сформулированных условий (Б)-(К) с условием (А), приведенным в теореме 4.1, устанавливается в следующем утверждении.

Теорема 4.2. ***Каждое из условий* (А)-(К) *является необходимым и достаточным для любого из остальных.***

Доказательство теоремы 4.2 приведено в п. 4.3.

Из теоремы 4.2 следует, что в формулировке теоремы 4.1 условие (А) можно заменить любым из условий (Б)-(К).

К перечисленным условиям (А)-(К) можно добавить еще одно. Для этого представим матрицы A и B в блочном виде

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \tag{4.14}$$

где A_{11} и B_{11} – квадратные матрицы порядка r, а $r=\operatorname{rank} A$.

Теорема 4.3. ***Пусть матрицы*** A, B ***представлены в блочном виде,*** A_{11} ***– квадратная матрица порядка*** r, ***где*** $r=\operatorname{rank} A$, ***причем*** $\det A_{11} \neq 0$. ***Тогда СЛАУ* (4.2) *является регуляризацией сдвигом СЛАУ* (4.1) *тогда и только тогда, когда выполнено неравенство***

$$\det\left(B_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{12}-B_{21}A_{11}^{-1}A_{12}+\right.$$

$$\left.+A_{21}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{12}\right)\neq 0. \tag{4.15}$$

Доказательство теоремы 4.3 приведено в п. 4.4.

4.3. Доказательство теоремы 4.2. В начале каждого пункта, если есть в этом необходимость, приводятся необходимые определения и доказываются соответствующие вспомогательные утверждения.

4.3.1. Доказательство эквивалентности (А) $\Leftrightarrow$ (Б). Пусть $\Pi:\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ является матрицей-оператором и $\mathbb{C}_0 \subset \mathbb{C}^N$ – некоторое подпространство. Матрица-оператор Π называется **проектором** на подпространство $\mathbb{C}_0$, если:

1) $\Pi x \in \mathbb{C}_0$ для любого $x \in \mathbb{C}^N$; 2) $\Pi x = x$ для любого $x \in \mathbb{C}_0$.

Через $\mathbb{C}_0^{\perp}$ обозначим ортогональное дополнение к подпространству $\mathbb{C}_0$. Проектор Π называется **ортогональным**, если $\Pi x = 0$ для любого $x \in \mathbb{C}_0^{\perp}$.

Лемма 4.1. ***Пусть*** $\Pi_1, \Pi_2 : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ ***– ортогональные проекторы на подпространство*** $\mathbb{C}_0$***. Для того чтобы имело место равенство*** $\Pi_1 = \Pi_2$***, необходимо и достаточно выполнение условия*** $\ker \Pi_1 = \ker \Pi_2$***, где***

$$\ker \Pi_k = \left\{ x \in \mathbb{C}^N : \Pi_k x = 0 \right\}, \quad k = 1,\ 2.$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность.

Пусть $\ker \Pi_1 = \ker \Pi_2 \equiv \mathbb{C}_0$. Каждый элемент $x \in \mathbb{C}^N$ однозначно представим в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \mathbb{C}_0$, $x_2 \in \mathbb{C}_0^{\perp}$. Так как ортогональный проектор на ортогональном дополнении к своему ядру действует тождественно, то справедливы равенства

$$\Pi_1 x = \Pi_1 x_1 = x_1 \quad \text{и} \quad \Pi_2 x = \Pi_2 x_1 = x_1 .$$

Таким образом, $\Pi_1 x = \Pi_2 x$ для любого $x \in \mathbb{C}^N$, то есть $\Pi_1 = \Pi_2$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. ***Пусть*** $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$ ***– два подпространства пространства*** $\mathbb{C}^N$ ***и выполнены равенства***

$$\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_2 = \{0\}, \quad \dim \mathbb{C}_1 + \dim \mathbb{C}_2 = N. \tag{4.16}$$

Тогда имеют место равенства

$$\mathbb{C}_1^{\perp} \cap \mathbb{C}_2^{\perp} = \{0\}, \tag{4.17}$$

$$\mathbb{C}_1^{\perp} \oplus \mathbb{C}_2^{\perp} = \mathbb{C}^N. \tag{4.18}$$

Доказательство. Из (4.16) вытекает равенство

$$\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2 = \mathbb{C}^N. \tag{4.19}$$

Если $z \in \mathbb{C}_1^{\perp} \cap \mathbb{C}_2^{\perp}$, то $z \in \left(\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2\right)^{\perp}$. Из (4.19) получаем $\left(\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2\right)^{\perp} = \{0\}$. Отсюда следует, что $z = 0$. Равенство (4.17) доказано. В свою очередь, из (4.17) и равенства

$$\dim \mathbb{C}_k^{\perp} = N - \dim \mathbb{C}_k, \qquad k = 1,\ 2$$

следует соотношение (4.19). Лемма доказана.

Доказательство импликации (А) $\Rightarrow$ (Б). В силу леммы 4.1 для установления справедливости равенства (Б) достаточно показать, что $\ker Q = \ker F^{+}F$. Для доказательства этого равенства достаточно показать справедливость включения $\ker F^{+}F \subset \ker Q$, так как обратное включение очевидно. Действительно, пусть $z \in \ker F^{+}F$. Тогда $Fz = \ = PBQz = 0$, то есть $Qz \in \ker PB = R(A)$. Из этого включения и равенства (4.4) получаем, что $BQz = 0$. Так как $AQz = 0$, то $(A + \lambda B)Qz = 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Из $\Delta\left(\lambda_0\right) = \det\left(A + \lambda_0 B\right) \neq 0$ (условия (А)) следует, что $Qz = 0$, то есть $z \in \ker Q$. Импликация (А) $\Rightarrow$ (Б) доказана.

Доказательство импликации (Б) $\Rightarrow$ (А). Вначале докажем справедливость равенства (4.4).

Пусть $y \in R(BQ) \cap R(A)$. Тогда существует $z \in \mathbb{C}^N$ такое, что $y = BQz \in R(A) = \ker P$. Поэтому $Py = PBQz = 0$. Из равенства (4.5) и леммы 4.1 вытекает, что $Qz = 0$. Тогда $y = BQz = 0$ и, следовательно, $R(BQ) \cap R(A) = \{0\}$. Равенство (4.4) доказано.

Покажем существование $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ такого, что $\Delta\left(\lambda_0\right) \neq 0$. Предположим противное. Пусть для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ определитель

$$\Delta(\lambda) = \det(A + \lambda B) = 0.$$

Тогда однородное уравнение $(A + \lambda B)x = 0$ имеет нетривиальное решение x_λ. Пусть $(A + \lambda B)x_\lambda = 0$ и $\left\|x_\lambda\right\| = 1$ для всех $|\lambda| \neq 1$. Так как пространство конечномерное, то существует ненулевая последовательность $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$ такая, что $x_{\lambda_k} \to x_0$ при $k \to \infty$, $\|x_0\| = 1$. Переходя в равенстве

$$\left(A + \lambda_k B\right) x_{\lambda_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{4.20}$$

к пределу при $k \to \infty$, получим $Ax_0 = 0$ и, следовательно, $x_0 \in \ker A$. Так как $PA = 0$, то из равенства (4.20) получаем

$$P\left(A + \lambda_k B\right) x_{\lambda_k} = \lambda_k PBx_{\lambda_k} = 0 .$$

Так как $\lambda_k \neq 0$, то из полученного неравенства будем иметь $PBx_{\lambda_k} = 0$. Переходя к пределу в этом равенстве при $k \to \infty$, получим $PBx_0 = 0$. Отсюда и так как $Qx_0 = x_0$, вытекают равенства $0 = PBx_0 = PBQx_0 = Fx_0$ и, следовательно, $F^+Fx_0 = 0$.

Отсюда и из (4.5) получаем: $F^+Fx_0 = Qx_0 = x_0 = 0$. Полученное равенство противоречит нормированности x_0: $\|x_0\| = 1$. Импликация (Б) $\Rightarrow$ (А).

Эквиваленция (А) $\Leftrightarrow$ (Б) доказана.

4.3.2. Доказательство эквивалентности (Б) $\Leftrightarrow$ (В).

Доказательство импликации (Б) $\Rightarrow$ (В). Из леммы 4.1 и равенства (4.5) следует, что $\ker Q = \ker F$. Так как Q и F – квадратные матрицы, то отсюда следует, что

$$\dim\ker Q = \dim\ker F = \dim\ker F^* .$$

С другой стороны, $\dim\ker Q = \dim\ker P$, поэтому имеем

$$\dim\ker P = \dim\ker QB^*P .$$

Отсюда, так как $\ker P \subset \ker QB^*P = \ker F^*$, следует справедливость равенства $\ker P = \ker F^*$. Из этого соотношения и леммы 4.1 следует справедливость равенства (4.6). Импликация (Б) $\Rightarrow$ (В) доказана.

Доказательство импликации (В) $\Rightarrow$ (Б). Из леммы 4.1 и равенства (4.6) следует, что $\ker P = \ker F^*$. Так как P и F^* – квадратные матрицы, то получаем равенство

$$\dim\ker P = \dim\ker F .$$

С другой стороны, $\dim\ker P = \dim\ker Q$, поэтому имеем

$$\dim\ker Q = \dim\ker PBQ .$$

Отсюда, в силу включения $\ker Q \subset \ker PBQ$, следует справедливость равенства $\ker Q = \ker F$. Из этого соотношения и леммы 4.1 получаем справедливость равенства (4.5). Импликация (В) $\Rightarrow$ (Б) доказана.

Эквивалентность (Б) $\Leftrightarrow$ (В) доказана.

4.3.3. Доказательство эквиваленции (В) $\Leftrightarrow$ (Г). В этом пункте будем использовать следующее утверждение.

Лемма 4.3. ***Пусть выполнено условие* (В). *Тогда справедливы равенства:***

$$AF^+ = 0 , \tag{4.23}$$

$$AT = -AA^+ . \tag{4.24}$$

$$AT\left(BF^+ - E\right) + BF^+ = E , \tag{4.25}$$

$$PBT = 0 . \tag{4.26}$$

Доказательство. Так как $AQ = 0$, $F^+ = F^*\left(FF^*\right)^+$ и

$$F^* = \left(PBQ\right)^* = Q^*B^*P^* = QB^*P ,$$

то
$$AF^+ = AF^*\left(FF^*\right)^+ = AQB^*P\left(FF^*\right)^+ = 0 .$$

Равенство (4.23) доказано. Из доказанного равенства имеем:

$$AT = A\left(F^+B - E\right)A^+ = AF^+BA^+ - AA^+ = -AA^+ .$$

Равенство (4.24) доказано. Отсюда и из (4.23) получаем:

$$AT\left(BF^{+}-E\right)+BF^{+}=-AA^{+}\left(BF^{+}-E\right)+BF=$$

$$=\left(E-AA^{+}\right)BF^{+}+AA^{+}=PBQF^{+}+AA^{+}=FF^{+}-Q+E=E\,.$$

Равенство (4.25) доказано. Из равенства (4.6) имеем

$$PBT=PB\left(F^{+}B-E\right)A^{+}=PBF^{+}BA^{+}-PBA^{+}=$$

$$=PBQF^{+}BA^{+}-PBA^{+}=\left(FF^{+}-P\right)BA^{+}=0\,.$$

Равенство (4.26) доказано. Лемма доказана.

Доказательство импликации (В) $\Rightarrow$ (Г). Нетрудно видеть, что

$$(A+\lambda B)\left(\lambda^{-1}F^{+}+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{m}(TB)^{m}T\left(BF^{+}-E\right)\right)=$$

$$=\lambda^{-1}AF^{+}+\left(AT\left(BF^{+}-E\right)+BF^{+}\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m}(AT+E)(BT)^{m}\left(BF^{+}-E\right). \tag{4.27}$$

Отсюда, в силу леммы 4.3,

$$(A+\lambda B)\left(\lambda^{-1}F^{+}+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{m}(TB)^{m}T\left(BF^{+}-E\right)\right)=E\,. \tag{4.28}$$

Полученное равенство равносильно равенству (4.7). Импликация (В) $\Rightarrow$ (Г) доказана.

Доказательство импликации (Г) $\Rightarrow$ (В). Пусть имеет место разложение (4.7), которое равносильно равенству (4.28). Левые части равенств (4.27) и (4.28) состоят из одного и того же выражения. Следовательно, у них равны и правые части. Это равносильно равенствам коэффициентов при одинаковых степенях λ. Отсюда, в частности, сравнивая свободные члены, получаем справедливость равенства

$$AT\left(BF^{+}-E\right)+BF^{+}=E\,. \tag{4.29}$$

Преобразуем левую часть этого равенства. В силу (4.24), имеем

$$AT\left(BF^{+}-E\right)+BF^{+}=-AA^{+}\left(BF^{+}-E\right)+BF^{+}=$$

$$=-AA^{+}BF^{+}+AA^{+}+BF^{+}=\left(E-AA^{+}\right)BF^{*}\left(FF^{*}\right)^{+}+AA^{+}=$$

$$=PBQB^{*}P\left(FF^{*}\right)^{+}+AA^{+}=PBQ^{2}B^{*}P\left(FF^{*}\right)^{+}+AA^{+}=$$

$$=FF^{*}\left(FF^{*}\right)^{+}+AA^{+}=FF^{+}+AA^{+}=E\,.$$

Так как $P=E-AA^{+}$, то из полученного равенства следует равенство (4.6). Импликация (Г) $\Rightarrow$ (В) доказана.

Эквиваленция (В) $\Leftrightarrow$ (Г) доказана.

4.3.4. Доказательство эквивалентности условий (Д), (Е), (Ж) и (З). Доказательство равносильности каждого из условий (Д)-(З) с любыми из условий (А)-(Г) проведем по следующей схеме:

1) (Д) $\Leftrightarrow$ (Е);

2) (Ж) $\Leftrightarrow$ (З);

3) (Г) $\Rightarrow$ (Е);

4) (Е) $\Rightarrow$ (Ж);

5) (З) $\Rightarrow$ (А).

Во всех перечисленных условиях присутствует обратная матрица $\left(A+\lambda B\right)^{-1}$. Если матрица A – вырожденная, то обратная матрица $\left(A+\lambda B\right)^{-1}$ является неограниченной при $|\lambda|\to 0$. В условии (Е) утверждается, что семейство матриц $\left\{\lambda\left(A+\lambda B\right)^{-1}\right\}$ является равномерно ограниченным при достаточно малых ненулевых $|\lambda|$. Отсюда следует, что при рассматриваемых значениях параметра λ обратная матрица $(A+\lambda B)^{-1} \sim \lambda^{-1}$.

Вводим обозначение: $\Phi_{mn}(\lambda)$ – алгебраическое дополнение элемента $a_{mn}+\lambda b_{mn}$ матрицы $A+\lambda B$. Тогда обратная матрица записывается в виде

$$(A+\lambda B)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\Phi_{11}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} & \cdots & \dfrac{\Phi_{N1}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\Phi_{1N}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} & \cdots & \dfrac{\Phi_{NN}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \end{bmatrix}.$$

Пусть $\Phi_{mn}(\lambda)/\Delta(\lambda) \sim \lambda^{-s_{mn}}$, тогда $(A+\lambda B)^{-1} \sim \lambda^{-s}$, где $s = \max\limits_{1\le m,\, n\le N} s_{mn}$. Если матрица A является вырожденной, то $s \ge 1$. Поэтому условие $(A+\lambda B)^{-1} \sim \lambda^{-1}$ выполняется не всегда. Ответ на вопрос: когда имеет место это условие? – приводится в следующих утверждениях.

Лемма 4.4. ***Пусть*** A, B ***– произвольные квадратные матрицы порядка*** N ***и*** $k = N - r$***, где*** $r = \operatorname{rank} A$***. Тогда***

$$\Delta(0) = \Delta'(0) = \ldots = \Delta^{(k-1)}(0) = 0. \tag{4.30}$$

Доказательство. Через $\Delta(\lambda; j_1,\ldots, j_m)$, $m = \overline{1,k}$ обозначим определитель порядка N, получающийся из определителя $\Delta(\lambda)$ путем замены его j_s-го столбца $a_{ij_s} + \lambda b_{ij_s}$ на столбец b_{ij_s} $\left(i = \overline{1, n},\, s = \overline{1, m}\right)$.

Нетрудно заметить, что для производных определителя $\Delta(\lambda)$ справедливо равенство

$$\Delta^{(m)}(\lambda) = m! \sum_{1\le j_1<\ldots<j_m\le n} \Delta(\lambda; j_1,\ldots, j_m). \tag{4.31}$$

Доказательство равенств (4.30) проводим индукцией по r. Так как матрица A вырожденная, то $r < n$.

Пусть $r = N-1$. Тогда $k=1$ и (4.30) будет состоять из одного равенства $\Delta(0)=0$, справедливость которого очевидна: $\Delta(0)=\det A=0$.

Пусть теперь $r = N-2$. Тогда $k=2$ и (4.30) примет вид $\Delta(0)=\Delta'(0)=0$. Выполнение первого равенства очевидно. Докажем второе равенство. Из (4.31) получим

$$\Delta'(0)=\sum_{1\le j\le n}\Delta(0;j). \tag{4.32}$$

Здесь $\Delta(0;j)$ – определитель N-го порядка, получающийся из определителя матрицы A заменой его j-го столбца на j-й столбец матрицы B $\left(j=\overline{1,N}\right)$. Разложим определитель $\Delta(0;j)$ по элементам j-го столбца:

$$\Delta(0;j)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}A_{ij},$$

где A_{ij} – миноры $(N-1)$-го порядка определителя матрицы A, соответствующие элементам a_{ij}, а b_{ij} – соответствующие этим элементам элементы матрицы B $\left(i,\ j=\overline{1,N}\right)$. Так как $r=N-2$, то все миноры $(N-1)$-го порядка матрицы A равны нулю; $A_{ij}=0$ для всех $i,\ j=\overline{1,N}$. Отсюда и из (4.32) следует справедливость второго равенства.

Пусть, наконец, $r=r_0<N-2$. Тогда $k>2$ и все миноры порядка выше r матрицы A равны нулю. Покажем, что

$$\Delta^{(m)}(0)=0,\qquad m=\overline{1,k-1}. \tag{4.33}$$

Из (4.31) будем иметь

$$\Delta^{(m)}(0)=m!\sum_{1\le j_1<\ldots<j_m\le n}\Delta\left(0;j_1,\ldots,j_m\right).$$

Докажем, что $\Delta\left(0; j_1,\ldots, j_m\right)=0$ для всех $m=\overline{1, k-1}$ и $1\le j_1<\ldots<j_m\le N$. Справедливость этого равенства при $m=\overline{0, k-2}$ вытекает из предыдущего шага индукции. Докажем равенство

$$\Delta^{(k-1)}(0)=(k-1)!\sum_{1\le j_1<\ldots<j_{k-1}\le N}\Delta\left(0; j_1,\ldots, j_{k-1}\right)=0 .$$

Произведем разложение каждого из определителей $\Delta\left(0; j_1,\ldots, j_{k-1}\right)$. Вначале разложим эти определители по элементам j_1-го столбца, то есть по первому столбцу, состоящему из столбца матрицы B. В результате получим сумму определителей $(N-1)$-го порядка, содержащих по $k-2$ столбца матрицы B. Затем произведем разложение каждого из этих определителей по элементам столбца j_2, то есть опять по первому столбцу, состоящему из столбца матрицы B. В результате получим сумму определителей $(N-2)$-го порядка, содержащих по $k-3$ столбца матрицы B. Этот процесс будем продолжать до тех пор, пока не будут исчерпаны все столбцы матрицы B, входящие в $\Delta^{(k-1)}(0)$. Тогда $\Delta^{(k-1)}(0)$ будет состоять из суммы определителей $(r+1)$-го порядка, которые являются минорами матрицы A. Но все миноры $(r+1)$-го порядка матрицы A равны нулю, так как $\operatorname{rank} A=r$. Равенство (4.33) доказано.

Лемма доказана.

Обозначим через $\Phi_{ij}(\lambda)$ алгебраическое дополнение к элементу $a_{ij}+\lambda b_{ij}$ матрицы $A+\lambda B$.

Лемма 4.5. ***Пусть*** $r=\operatorname{rank} A$ ***и*** $k=N-r$. ***Тогда***

$$\Phi_{ij}(0)=\Phi'_{ij}(0)=\ldots=\Phi_{ij}^{(k-2)}(0)=0,\quad i, j=\overline{1, N}. \tag{4.34}$$

Доказательство. Заметим, что при $k=0$ и $k=1$ соотношение (4.34) не содержит ни одного условия. Поэтому доказательство леммы следует проводить при $k\ge 2$. Это соответствует условию $r\le n-1$.

Пусть $k \geq 2$. Докажем равенство $\Phi_{ij}(0) = 0$. Заметим, что $\Phi_{ij}(0)$ является минором $(N-1)$-го порядка матрицы A. Так как $r = N - k$, то все миноры порядка $N-k+1, \ldots, N$ равны нулю.

Докажем равенство $\Phi'_{ij}(0) = 0$. Аналогично равенству (4.31) имеем

$$\Phi'_{ij}(\lambda) = \sum_{1 \leq l \neq j \leq N} \left[\Phi_{ij}(\lambda)\right]_l,$$

где $\left[\Phi_{ij}(\lambda)\right]_l$ получается из определителя $\Delta(\lambda)$ путем зачеркивания i-й строки, j-го столбца и заменой l-го столбца $a_{ij} + \lambda b_{ij}$ на столбец b_{ij}. Каждый из определителей $\left[\Phi_{ij}(0)\right]_l$ разложим по элементам столбца, состоящего из b_{ij}. Получим сумму определителей $(N-2)$-го порядка, являющихся минорами определителя матрицы A. Но все они равны нулю. Следовательно, $\Phi'_{ij}(0) = 0$.

Дальнейшее доказательство повторяет рассуждение, приведенное в доказательстве леммы 4.4.

Лемма доказана.

Замечание. Естественно, что равенства (4.30) влекут за собой выполнение равенств (4.34) и без предположения, что $k = N - r, \quad r = \operatorname{rank} A$. Однако если k не связано с рангом r: $k = N - r$, то равенства (4.34) могут не следовать из равенств (4.30). Например, для матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

имеем:

$$r = \operatorname{rank} A = 2, \quad k = n - r = 2, \quad \Delta(\lambda) = \lambda^4.$$

Следовательно,

$$\Delta(0) = \Delta'(0) = \Delta''(0) = \Delta'''(0) = 0.$$

Однако не для всех $i, j = \overline{1,4}$ выполняется равенство $\Phi''_{ij}(0) = 0$. Например, для $i = j = 1$ имеем

$$\Phi_{11}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 1+3\lambda & 1+2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^3 + \lambda^2$$

и очевидно $\Phi_{11}(0) = 0$, $\Phi'_{11}(0) = 0$, но $\Phi''_{11}(0) \neq 0$.

Таким образом, требование: $k = N - r$, где $r = \operatorname{rank} A$ в условии леммы 4.5, является необходимым.

4.3.4.1. Доказательство эквивалентности (Д) $\Leftrightarrow$ (Е). Равносильность условий (Д) и (Е) следует из равенства

$$\left\| \lambda (A + \lambda B)^{-1} \right\| = |\lambda|^{-1} \left\| (A + \lambda B)^{-1} \right\|, \quad \lambda \in \Lambda_0 .$$

4.3.4.2. Доказательство эквиваленции (Ж) $\Leftrightarrow$ (З). Переходя к нормам в тождестве

$$\lambda (A + \lambda B)^{-1} B = E - (A + \lambda B)^{-1} A, \quad \lambda \in \Lambda_0 ,$$

получим

$$\left\| \lambda (A + \lambda B)^{-1} B \right\| \leq \|E\| + \left\| (A + \lambda B)^{-1} A \right\|, \quad \lambda \in \Lambda_0 .$$

Отсюда следует справедливость импликации (Ж) $\Rightarrow$ (З), а из неравенства

$$\left\| (A + \lambda B)^{-1} A \right\| \leq \|E\| + \left\| \lambda (A + \lambda B)^{-1} B \right\|, \quad \lambda \in \Lambda_0$$

– импликации (З) $\Rightarrow$ (Ж).

4.3.4.3. Доказательство импликации (Г) $\Rightarrow$ (Е). Если параметр $\lambda \in \mathbb{C}$ изменяется в промежутке $0 < |\lambda| < \rho^{-1}$, где $\rho = \rho(TB)$ – спектральный радиус матрицы-оператора TB, то матричный ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (TB)^m T \left(BF^+ - E \right)$$

сходится. Тогда из представления (4.7) будем иметь

$$\left\|(A+\lambda B)^{-1}\right\|\leq|\lambda|^{-1}\left\|F^{+}\right\|+\left\|\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{m}(TB)^{m}T\left(BF^{+}-E\right)\right\|=O\left(|\lambda|^{-1}\right).$$

Импликация (Г) $\Rightarrow$ (Е) доказана.

4.3.4.4. Доказательство импликации (Е) $\Rightarrow$ (Ж). Так как

$$\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1}B\right\|\leq\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1}\right\|\|B\|,$$

то из неравенства (4.9) следует справедливость оценки (4.10).

Импликация (Е) $\Rightarrow$ (Ж) доказана.

4.3.4.5 Доказательство импликации (З) $\Rightarrow$ (А). Пусть имеет место условие (З). Покажем выполнение условия (А). В качестве искомого параметра λ_0 можно брать любой элемент $\lambda\in\Lambda_0$. Покажем справедливость равенства (4.4). Пусть $w\in R(A)\bigcap R(BQ)$. Тогда существуют элементы $x\perp\ker A$ и $y\in\ker A$ такие, что $Ax=w$ и $BQy=w$. Полагая $z_\lambda=\lambda x-y$ и учитывая равенства $Qx=0$, $Ay=0$, будем иметь $(A+\lambda BQ)z_\lambda=0$ для любого $\lambda\in\mathbb{C}$. Отсюда получим представление

$$(A+\lambda B)z_\lambda=(A+\lambda BQ)z_\lambda-\lambda B(Q-E)z_\lambda. \tag{4.35}$$

Так как

$$(Q-E)z_\lambda=\left(E-A^{+}A-E\right)z_\lambda=-A^{+}A(\lambda x-y)=-\lambda x,$$

то, обращая равенство (4.35), будем иметь

$$z_\lambda=-\lambda(A+\lambda B)^{-1}B(Q-E)z_\lambda=\lambda^{2}(A+\lambda B)^{-1}Bx.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\lambda\to 0$ и учитывая условия (Ж), получим $z_\lambda\to 0$. Так как $z_\lambda=\lambda x-y$, то из полученного предельного соотношения имеем $y=0$. Таким образом, $w=BQy=0$. Справедливость равенства (4.4) установлена. Импликация (З) $\Rightarrow$ (А) доказана.

4.3.5. Доказательство эквиваленции (А) $\Leftrightarrow$ (И). Положим $r=\operatorname{rank} A$. Тогда $\dim R(A)=r$, $\dim\ker A=N-r$, $\dim R(Q)=N-r$.

Доказательство импликации (А) $\Rightarrow$ (И). Так как имеет место равенство (4.4), то для доказательства равенства (4.12) достаточно установить справедливость соотношения

$$\dim R(A)+\dim R(BQ)=N\ .$$

Покажем, что $\dim R(BQ)=N-r$. Предположим противное. Пусть $\dim R(BQ)<N-r$. Тогда существует ненулевой элемент $z\in R(Q)=\ker A$, удовлетворяющий равенству $Bz=0$ и, следовательно, $(A+\lambda_0 B)z=0$, где λ_0 – число, участвующее в условии (А). Так как однородное уравнение имеет нетривиальное решение, то определитель системы равен нулю: $\det(A+\lambda_0 B)=0$. Но это противоречит первой части условия (А). Полученное противоречие завершает доказательство импликации (А) $\Rightarrow$ (И).

Доказательство импликации (И) $\Rightarrow$ (А). Пусть имеет место равенство (4.12). Так как $\dim R(Q)=N-r$, то

$$\dim R(BQ)\le N-r\ . \tag{4.36}$$

Из равенства (4.12) вытекает, что

$$\dim R(A)+\dim R(BQ)\ge N\ .$$

Тогда

$$\dim R(BQ)\ge N-\dim R(A)=N-r\ .$$

Из этого неравенства и (4.36) следует равенство (4.4).

Докажем теперь существование параметра $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ такого, что $\det\left(A+\lambda_0 B\right) \neq 0$. Предположим противное. Пусть $\det(A+\lambda B)=0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда для любой последовательности $\lambda_k \to 0 \ (k \to \infty)$ существует последовательность нормированных элементов $x_k \in \mathbb{C}^N$ таких, что

$$\left(A+\lambda_k B\right) x_k = 0, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Представив элемент x_k в виде $x_k = y_k + z_k$, где $y_k \in \ker A$, $z_k \perp \ker A$, получим $Az_k + \lambda_k B y_k + \lambda_k B z_k = 0, \qquad k = 1, 2, \dots$. Так как y_k и z_k – ограниченные последовательности, то из полученного равенства будем иметь

$$Az_k = -\lambda_k B y_k - \lambda_k B z_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty .$$

Отсюда и из условия ортогональности $z_k \perp \ker A$ вытекает предельное соотношение

$$z_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

и ограниченность последовательности z_k / λ_k. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что

$$\frac{z_k}{\lambda_k} \to w_0, \qquad y_k \to y_0, \qquad k \to \infty ,$$

причем

$$w_0 \perp \ker A, \qquad y_0 \in \ker A, \qquad \left\| y_0 \right\| = 1 .$$

Векторы w_0 и y_0 удовлетворяют равенству $Aw_0 + By_0 = 0$. Отсюда следует, что $(A+BQ)\left(w_0 + y_0\right) = Aw_0 + By_0 = 0$, то есть

$$w_0 + y_0 \in \ker(A+BQ) . \tag{4.37}$$

Покажем, что

$$\ker(A+BQ)=\{0\}. \tag{4.38}$$

Пусть $y\in\ker A$ и $z\perp\ker A$ – произвольные элементы. Тогда, полагая $x=y+z$, будем иметь $(A+BQ)x=Az+BQy$. Отсюда и из (4.12) следует равенство $R(A+BQ)=\mathbb{C}^N$, которое устанавливает справедливость (4.38).

Из равенств (4.38) и (4.37) получаем, что $w_0+y_0=0$. Отсюда и из условия ортогональности $w_0\perp y_0$ вытекают равенства $w_0=0$ и $y_0=0$. Это противоречит нормированности элемента y_0: $\|y_0\|=1$. Полученное противоречие означает существование $\lambda_0\in\mathbb{C}$ такого, что $\det(A+\lambda_0B)\neq 0$. Импликация (И) $\Rightarrow$ (А) доказана.

Эквиваленция (И) $\Leftrightarrow$ (А) доказана.

4.3.6. Доказательство эквиваленции (Е) $\Leftrightarrow$ (К). Для проведения этого доказательства понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 4.6. ***Пусть*** F ***и*** G_λ, $\lambda\in\Lambda_0$ ***являются квадратными матрицами одного порядка и семейство*** $\{G_\lambda\}$ ***равномерно ограничено:*** $\|G_\lambda\|\leq M_1=\mathrm{const}$ ***при*** $\lambda\in\Lambda_0$. ***Тогда для равномерной ограниченности семейства*** $\left\{(F+\lambda G_\lambda)^{-1}\right\}$ ***необходимо и достаточно выполнение неравенства*** $\det F\neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть при $\lambda\in\Lambda_0$ семейство матриц $\left\{(F+\lambda G_\lambda)^{-1}\right\}$ является равномерно ограниченным: $\left\|(F+\lambda G_\lambda)^{-1}\right\|\leq M_2=\mathrm{const}$. Покажем справедливость неравенства $\det F\neq 0$. Предположим противное. Пусть $\det F=0$. Тогда найдется нормированный элемент $x_0 \in \mathbb{C}^N$, $\|x_0\| = 1$, такой, что $Fx_0 = 0$. Для этого элемента справедливо представление

$$x_0 = \left(F + \lambda G_\lambda\right)^{-1}\left(F + \lambda G_\lambda\right)x_0 = \left(F + \lambda G_\lambda\right)^{-1}\lambda G_\lambda x_0, \quad \lambda \in \Lambda_0.$$

Переходя к нормам в этом равенстве, получим

$$1 = \|x_0\| \le |\lambda| \left\|\left(F + \lambda G_\lambda\right)^{-1}\right\| \|G_\lambda\| \le |\lambda| M_1 M_2 \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0.$$

Полученное противоречие устанавливает справедливость неравенства $\det F \ne 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\det F \ne 0$. Покажем равномерную ограниченность семейства $\left\{\left(F + \lambda G_\lambda\right)^{-1}\right\}$. Если выполнено условие $|\lambda| \le \left(M_2 \|F^{-1}\|\right)^{-1}$, то $\|\lambda G_\lambda F^{-1}\| < 1$ и поэтому справедливо разложение в матричный ряд

$$\left(F + \lambda G_\lambda\right)^{-1} = F^{-1}\left(E + \lambda G_\lambda F^{-1}\right)^{-1} = F^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}(-\lambda)^m\left(G_\lambda F^{-1}\right)^m.$$

Переходя к нормам в этом равенстве при $|\lambda| \le \left(2M_2 \|F^{-1}\|\right)^{-1}$, будем иметь

$$\left\|\left(F + \lambda G_\lambda\right)^{-1}\right\| \le \|F^{-1}\| \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda|^m M_2^m \|F^{-1}\|^m \le \|F^{-1}\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 2\|F^{-1}\|.$$

Достаточность доказана. Лемма доказана.

Легко доказывается следующая лемма (сравни [29], стр. 255).

Лемма 4.7. ***Пусть*** $K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$ ***и*** K_{11} ***квадратные матрицы, причем*** $\det K_{11} \ne 0$. ***Тогда для выполнения условия*** $\det K \ne 0$ ***необ-***

ходимо и достаточно выполнение неравенства $\det\left(K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}-K_{22}\right)\neq 0$. ***Причем, если*** K ***– обратимая матрица, то***

$$K^{-1}=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix},$$

где $Y_{11}=K_{11}^{-1}-K_{11}^{-1}K_{12}Y_0K_{21}K_{11}^{-1}$, $Y_{12}=K_{11}^{-1}K_{12}Y_0$,

$$Y_{21}=Y_0K_{21}K_{11}^{-1},\quad Y_{22}=-Y_0,\quad Y_0=\left(K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}-K_{22}\right)^{-1}.$$

Доказательство. Положим

$$L=\begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ K_{21} & E \end{bmatrix} \qquad \left(\det L=\det K_{11}\neq 0\right).$$

Из представления

$$K=L\begin{bmatrix} E & K_{11}^{-1}K_{12} \\ 0 & K_{22}-K_{21}K_{11}^{-1}K_{12} \end{bmatrix}$$

имеем:

$$\det K=\det K_{11}\det\left(K_{22}-K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}\right).$$

Отсюда и из условия $\det K_{11}\neq 0$ следует справедливость первой части утверждения леммы.

Проверка правильности нахождения обратной матрицы проводится непосредственным вычислением. Лемма доказана.

Лемма 4.8. ***Пусть матрица*** A ***представлена в блочном виде, где*** A_{11} ***– квадратная матрица порядка*** r***, причем*** $\det A_{11}\neq 0$. ***Для того чтобы имело место равенство*** $r=\operatorname{rank} A$, ***необходимо и достаточно выполнение равенства*** $A_{22}=A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

Доказательство справедливости этой леммы следует из равенства

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & A_{11}^{-1} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}.$$

Лемма 4.9. ***Пусть матрицы*** A ***и*** B ***представлены в блочном виде*** **(4.14)** ***, где*** A_{11} ***и*** B_{11} ***– квадратные матрицы порядка*** r ***,*** $r=\operatorname{rank} A$***, причем*** $\det A_{11}\neq 0$***. Тода для равномерной ограниченности семейства матриц*** $\left\{\lambda\left(A+\lambda B\right)^{-1}\right\}$ ***при*** $0<|\lambda|<\lambda_0$ ***необходимо и достаточно выполнение неравенства*** **(4.15).**

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство $\left\{\lambda\left(A+\lambda B\right)^{-1}\right\}$ является равномерно ограниченным:

$$\left\|\lambda\left(A+\lambda B\right)^{-1}\right\|\leq M_1=\mathrm{const},\quad 0<|\lambda|<\lambda_0 .$$

Представим матрицу $A+\lambda B$ в блочном виде

$$A+\lambda B=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

где $$C_{ij}\equiv C_{ij}(\lambda)=A_{ij}+\lambda B_{ij},\quad i,\ j=1,\,2 .$$

Обратную матрицу $\left(A+\lambda B\right)^{-1}$, в силу леммы 4.7, при достаточно малых $|\lambda|>0$ можно записать в виде

$$\left(A+\lambda B\right)^{-1}=\begin{bmatrix} D_{11}(\lambda) & D_{12}(\lambda) \\ D_{21}(\lambda) & D_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{4.39}$$

где $$D_{11}(\lambda)=C_{11}^{-1}-C_{11}^{-1}C_{12}\left(C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}-C_{22}\right)^{-1}C_{21}C_{11}^{-1},$$

$$D_{12}(\lambda)=C_{11}^{-1}C_{12}\left(C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}-C_{22}\right)^{-1},$$

$$D_{21}(\lambda)=\left(C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}-C_{22}\right)^{-1}C_{21}C_{11}^{-1},$$

$$D_{22}(\lambda)=-\left(C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}-C_{22}\right)^{-1}.$$

Из равенства (4.39) вытекает равномерная ограниченность семейства матриц $\left\{\lambda D_{ij}(\lambda)\right\}, \quad i,\ j=1,2$.

Заметим справедливость представления

$$\lambda D_{22}(\lambda)=\left[F+\lambda G(\lambda)\right]^{-1},$$

где $$F=A_{21}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{12}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{12}-B_{21}A_{11}^{-1}A_{12}+B_{22},$$

$$G(\lambda)=-A_{21}\left(A_{11}+\lambda B_{11}\right)^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{12}+$$

$$+A_{21}\left(A_{11}+\lambda B_{11}\right)^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}B_{12}+$$

$$+B_{21}\left(A_{11}+\lambda B_{11}\right)^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{12}-B_{21}\left(A_{11}+\lambda B_{11}\right)^{-1}B_{12}.$$

Поэтому из леммы 4.6 следует неравенство (4.15). Необходимость доказана.

Достаточность. Из условий $\det A_{11}\neq 0$ и (4.15), в силу леммы 4.6, вытекает равномерная ограниченность семейств $\left\{\lambda D_{11}(\lambda)\right\}$ и $\left\{\lambda D_{22}(\lambda)\right\}$. Равномерная ограниченность семейств $\left\{\lambda D_{12}(\lambda)\right\}$ и $\left\{\lambda D_{21}(\lambda)\right\}$ вытекает из оценок:

$$\left\|\lambda D_{12}(\lambda)\right\|=\left\|C_{11}^{-1}C_{12}\lambda D_{22}(\lambda)\right\|\leq\left\|C_{11}^{-1}\right\|\left\|C_{12}\right\|\left\|\lambda D_{22}(\lambda)\right\|,$$

$$\left\|\lambda D_{21}(\lambda)\right\|=\left\|\lambda D_{22}(\lambda)C_{21}C_{11}^{-1}\right\|\leq\left\|\lambda D_{22}(\lambda)\right\|\left\|C_{21}\right\|\left\|C_{11}^{-1}\right\|.$$

Остается отметить, что равномерная ограниченность семейства $\left\{\lambda\left(A+\lambda B\right)^{-1}\right\}$ эквивалентна равномерной ограниченности семейств $\left\{\lambda D_{i\,j}\left(\lambda\right)\right\}$, $i,\ j=1,\,2$. Достаточность доказана.

Лемма доказана.

Доказательство импликации (E) $\Rightarrow$ (K). Пусть матрицы A и B представлены в блочном виде (4.14). Положим

$$A_0=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & E \end{bmatrix}.$$

Представив матрицу $A+\lambda B$ в виде

$$A+\lambda B=A_0\begin{bmatrix} E+\lambda A_{11}^{-1}B_{11} & A_{11}^{-1}A_{12}+\lambda A_{11}^{-1}B_{12} \\ \lambda\left(B_{21}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{11}\right) & \lambda\left(B_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{12}\right) \end{bmatrix},$$

будем иметь

$$\Delta(\lambda)=\det\left(A+\lambda B\right)=$$

$$=\det A_0\cdot\det\begin{bmatrix} E+\lambda A_{11}^{-1}B_{11} & A_{11}^{-1}A_{12}+\lambda A_{11}^{-1}B_{12} \\ \lambda\left(B_{21}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{11}\right) & \lambda\left(B_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{12}\right) \end{bmatrix}=$$

$$=\lambda^k\det A_{11}\cdot\det\begin{bmatrix} E+\lambda A_{11}^{-1}B_{11} & A_{11}^{-1}A_{12}+\lambda A_{11}^{-1}B_{12} \\ B_{21}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{11} & B_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{12} \end{bmatrix}.$$

Здесь $k=N-r$. Отсюда для производной k-го порядка при $\lambda=0$ получим

$$\Delta^k(0)=k!\lambda^k\det A_{11}\det\begin{bmatrix} E & A_{11}^{-1}A_{12} \\ B_{21}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{11} & B_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{12} \end{bmatrix}.$$

Так как

$$\begin{bmatrix} E & A_{11}^{-1}A_{12} \\ B_{21}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{11} & B_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ B_{21}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{11} & E \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} E & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & B_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{12}-B_{21}A_{11}^{-1}A_{12}+A_{21}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix},$$

то окончательно имеем:

$$\Delta^k(0) = k!\lambda^k \det A_{11} \times$$

$$\times \det\left(B_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{12}-B_{21}A_{11}^{-1}A_{12}+A_{21}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{12}\right). \qquad (4.41)$$

Так как семейство $\left\{\lambda\left(A+\lambda B\right)^{-1}\right\}$ равномерно ограничено, то по лемме 4.9 выполняется неравенство (4.15). Отсюда и из (4.40) вытекает справедливость неравенства (4.13).

Импликация (Е) $\Rightarrow$ (К) доказана.

Доказательство импликации (К) $\Rightarrow$ (Е). Пусть имеет место неравенство (4.13). Из (4.40) получаем справедливость неравенства (4.15), а по лемме 4.9 следует равномерная ограниченность семейства $\left\{\lambda\left(A+\lambda B\right)^{-1}\right\}$. Импликация (К) $\Rightarrow$ (Е) доказана.

Теорема 4.2 доказана.

4.4. Доказательство теоремы 4.1. Необходимость. Пусть СЛАУ (4.2) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (4.1). Тогда, во-первых, при всех достаточно малых $|\lambda|>0$ СЛАУ (4.2) имеет единственное решение x_λ. Следовательно, для этих значений λ матрица $A+\lambda B$ СЛАУ (4.2) является обратимой. Во-вторых, при этих значениях λ решение x_λ – равномерно ограничено. Поэтому равномерно ограничено и семейство $\left\{\left(A+\lambda B\right)^{-1} f\right\}$. Так как $f \in R(A)$ – произвольный элемент, то при рассматриваемых значениях λ ограниченным является семейство матриц $\left\{(A+\lambda B)^{-1} A\right\}$.

Таким образом доказано, что если СЛАУ (4.2) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (4.1), то имеет место условие (Е). Отсюда и из теоремы 4.2 следует справедливость условия (А). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть имеет место условие (А). Тогда по теореме 4.2 справедливо любое из условий (Б)-(К), в частности, имеет место условие (Г). Из разложения (4.7) получаем

$$(A+\lambda B)^{-1} f = \lambda^{-1} F^{+} f + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{m} (TB)^{m} T\left(BF^{+} - E\right) f .$$

Так как $f \in R(A)$, то $Pf = 0$ и, следовательно,

$$F^{+} f = \left(F^{*} F\right)^{+} F^{*} f = \left(F^{*} F\right)^{+} Q B^{*} P f = 0 .$$

Поэтому при достаточно малых $|\lambda| > 0$ вектор

$$x_{\lambda} \equiv (A+\lambda B)^{-1} f = -\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{m} (TB)^{m} Tf$$

является единственным и ограниченным решением СЛАУ (4.2). Более того, имеет место предельное соотношение $x_{\lambda} \to x_{0}$ при $\lambda \to \infty$. При этом

$$x_{0} = -Tf = A^{+} f - F^{+} B A^{+} f$$

является решением СЛАУ (4.1).

Таким образом доказано, что СЛАУ (4.2) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (4.1). Достаточность доказана.

Теорема 4.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.3. Необходимость. Пусть СЛАУ (4.2) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (4.1). Тогда в силу теоремы 4.1 имеет место условие (Е), а в силу леммы 4.9 – неравенство (4.15). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть имеет место неравенство (4.15). Тогда в силу леммы (4.9) семейство $\left\{\lambda\left(A+\lambda B\right)^{-1}\right\}$ является ограниченным при достаточно малых $|\lambda|>0$. Отсюда следует выполнение условия (Е), а из теоремы 4.2 – выполнение условия (А). Тогда из теоремы 4.1 вытекает, что СЛАУ (4.2) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (4.1). Достаточность доказана.

Теорема 4.3 доказана.

5. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ М. М. ЛАВРЕНТЬЕВА

В настоящем пункте изучается вопрос регуляризации совместной СЛАУ

$$Ax=f \tag{5.1}$$

семейством СЛАУ

$$\left(A+\lambda E\right)x=f\ , \tag{5.2}$$

где A – произвольная вырожденная квадратная матрица, E – единичная матрица порядка N, $f\in\mathbb{C}^N$ – заданный, $x\in\mathbb{C}^N$ – искомый векторы, $\lambda\in\mathbb{C}$ – параметр регуляризации.

Регуляризующее семейство СЛАУ (5.2) получается из регуляризации: 1) В. Н. Фадеевой [108], если вместо вещественности матрицы A, правой части f и параметра регуляризации λ предполагать их комплексности, 2) М. М. Лаврентьева [48] и регуляризации А. Б. Бакушинского [8], если в них отказаться от требования симметричности (в общем случае, от требования самосопряженности) и положительной определенности матрицы A.

Нашей основной целью является выявление наиболее широкого класса матриц A, для которых СЛАУ (5.2) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (5.1), и изучение аналогичной проблемы, когда вместо матрицы A задана циркулянтная матрица C.

Кратность корня $\lambda=\lambda_0$ характеристического уравнения $\det\left(A-\lambda E\right)=0$ называется **алгебраической кратностью** собственного значения $\lambda = \lambda_0$. Размерность подпространства, состоящего из собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda = \lambda_0$, называется **геометрической кратностью** собственного значения $\lambda = \lambda_0$. Собственное значение $\lambda = \lambda_0$ называется **простым**, если его алгебраическая кратность равна 1. Собственное значение $\lambda = \lambda_0$ называется **полупростым**, если равны его алгебраическая и геометрическая кратности и больше 1.

Теорема 5.1. ***Для того чтобы СЛАУ* (5.2) *являлась регуляризацией сдвигом СЛАУ* (5.1), *необходима и достаточна полупростота нулевого собственного значения матрицы* A.**

Доказательство теоремы 5.1. Достаточность. Пусть алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения $\lambda = 0$ матрицы A равны и равны k.

Через U обозначим матрицу, приводящую A к жордановой форме $J(A)$. Пусть

$$J(A) = U^{-1}AU = \left[\begin{array}{c|c} J_0 & 0 \\ \hline 0 & J_1 \end{array}\right],$$

где J_0 – нулевая матрица порядка k, а J_1 – объединение блоков, соответствующих ненулевым собственным значениям матрицы A.

Представим СЛАУ (5.1) в виде

$$U^{-1}AUy = g, \tag{5.4}$$

где $y = U^{-1}x$, $g = U^{-1}f$. Тогда из совместности СЛАУ (5.1) вытекает, что первые k координат вектора g равны нулю, то есть $g = \left(g_0, g_1\right)^{\mathrm{T}}$, где $g_0 = 0$ – нулевой вектор размерности k, а g_1 – некоторый вектор размерности $N-k$. Представим аналогичным образом и вектор y: $y = \left(y_0, y_1\right)^{\mathrm{T}}$, где y_0 – искомый вектор размерности k, а y_1 – искомый вектор размерности $N-k$. В блочном виде СЛАУ (5.4) записывается в виде

$$\begin{cases} E_k y_0 = 0, \\ J_1 y_1 = g_1. \end{cases} \tag{5.5}$$

Запишем СЛАУ (5.2) в виде:

$$\left(U^{-1}AU + \lambda E\right) y = g \; . \tag{5.6}$$

В блочном виде эту систему можно записать следующим образом

$$\begin{cases} \lambda E_k y_0 = 0, \\ \left(J_1 + \lambda E_{N-k}\right) y_1 = g_1. \end{cases} \tag{5.7}$$

Матрица J_1 – диагональная с ненулевыми диагональными элементами $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_N$. При

$$0 < |\lambda| < \min\left\{|\lambda_{k+1}|, \dots, |\lambda_N|\right\} \tag{5.8}$$

СЛАУ (5.7) имеет единственное решение $y_\lambda = \left(y_{0,\lambda}, y_{1,\lambda}\right)^{\mathrm{T}}$, причем $y_{0,\lambda} = 0$ для всех возможных значений λ, а $y_{1,\lambda} \to y_{1,0}$ при $\lambda \to 0$, причем предельное значение $y_{1,0}$ является решением второго уравнения СЛАУ (5.5).

Таким образом, СЛАУ (5.6) для всех λ, удовлетворяющих условию (5.8), имеет единственное решение y_λ, сходящееся при $\lambda \to 0$. Тогда вектор $x_\lambda = U y_\lambda$ – единственное решение СЛАУ (5.2). Это доказывает, что СЛАУ (5.2) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (5.1). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть СЛАУ (5.2) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (5.1). Докажем, что нулевое собственное значение матрицы A является полупростым. Предположим противное. Пусть алгебраическая и геометрическая кратности нулевого собственного значения матрицы A не равны. Тогда существует жорданов блок этой матрицы вида

$$J_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

где порядок этого блока равен $k \geq 2$. Соответствующий блок матрицы $A + \lambda E$ имеет вид

$$J_* + \lambda E = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Через Δ обозначим определитель матрицы $J_* + \lambda E$, а через Δ_{1k} – алгебраическое дополнение элемента, расположенного в k-ой строке и первом столбце этой матрицы. Так как

$$\Delta = \lambda^k, \qquad \Delta_{1k} = (-1)^{k+1},$$

то элементом первой строки и k-го столбца обратной матрицы $\left(J_* + \lambda E\right)^{-1}$ является $\Delta_{1k} / \Delta = (-1)^{k+1} / \lambda^k$. Следовательно, семейство матриц $\left\{\lambda\left(J_* + \lambda E\right)^{-1}\right\}$ не является равномерно ограниченным. Поэтому, в силу теорем 4.1 и 4.2, СЛАУ (5.2) не является регуляризацией сдвигом СЛАУ (5.1). Полученное противоречие доказывает полупростоту нулевого собственного значения матрицы A. Необходимость доказана.

Теорема 5.1 доказана.

Пусть C – произвольная циркулянтная матрица порядка N. Рассмотрим совместную СЛАУ

$$Cx = f \tag{5.9}$$

и семейство

$$\left(C + \lambda E\right)x = f. \tag{5.10}$$

Следствие 5.1. ***СЛАУ*** **(5.10)** ***является регуляризацией сдвигом СЛАУ*** **(5.9).**

Справедливость этого утверждения следует из того, что все собственные значения циркулянтной матрицы являются полупростыми.

Наряду с СЛАУ (5.10) рассмотрим семейство СЛАУ

$$\left(C+\lambda C_0\right)x = f\,, \tag{5.11}$$

где C_0 – циркулянтная матрица порядка N.

Теорема 5.2. ***Для того чтобы СЛАУ*** **(5.11)** ***являлась регуляризацией сдвигом СЛАУ*** **(5.9),** ***необходима и достаточна невырожденность матрицы*** C_0**.**

Доказательство. Необходимость. Пусть СЛАУ (5.11) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (5.9). Матрица Фурье F является матрицей, приводящей матрицы C и C_0 к диагональному виду. Пусть

$$F^*CF = \operatorname{diag}\left(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}\right),$$

$$F^*C_0F = \operatorname{diag}\left(\lambda_{0,0}, \lambda_{0,1}, \dots, \lambda_{0,N-1}\right),$$

где λ_m и $\lambda_{0,m}$, $m=\overline{0,\, N-1}$ – некоторые комплексные числа.

Запишем СЛАУ (5.9) и (5.10) в виде

$$\begin{cases} F^*CFy = F^*f, \\ x = Fy, \end{cases} \tag{5.12}$$

и

$$\begin{cases} \left(F^*CF+\lambda F^*C_0F\right)y = F^*f, \\ x = Fy. \end{cases} \tag{5.13}$$

Заметим, что в первой из СЛАУ (5.12) в тех уравнениях, в которых $\lambda_m = 0$, соответствующие правые части также равны нулю. Это следует из совместности СЛАУ (5.9). Поэтому соответствующие этим индексам координаты вектора y остаются свободными. Из СЛАУ (5.13) для этих координат вектора y получатся нулевые значения. Для остальных ненулевых λ_m соответствующие координаты вектора y определяются однозначно из СЛАУ (5.12) и СЛАУ (5.13).

Достаточность. Доказательство достаточности получается из доказательства необходимости, если идти от конца к началу.

Теорема 5.2 доказана.

6. СХОДИМОСТЬ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СДВИГОМ РЕШЕНИЙ К НОРМАЛЬНОМУ РЕШЕНИЮ

Метод регуляризации сдвигом, рассмотренный в § 4, является достаточно общим. Условия, приведенные в теоремах 4.1 – 4.3, выполняются для широкого класса матриц A и B. Если известны некоторые дополнительные свойства матриц A и B, то можно получить более конкретные примеры. В частности, приводится необходимое и достаточное условие сходимости решения СЛАУ $(A+\lambda B)x=f$ к нормальному решению $x_0=A^+f$ СЛАУ $Ax=f$ при $\lambda\to 0$, то есть предельное значение регуляризованного решения при $\lambda\to 0$ не зависит от матрицы B.

Теорема 6.1. ***Пусть для матриц A и B выполняются равенства***

$$R(B)=\ker A^*, \tag{6.1}$$

$$\ker B=R\left(A^*\right). \tag{6.2}$$

Тогда для всех ненулевых $\lambda\in\mathbb{C}$ матрица $A+\lambda B$ является обратимой и имеет место равенство

$$(A+\lambda B)^{-1}=\lambda^{-1}B^+ + A^+. \tag{6.3}$$

Доказательство. Из равенства (6.1) получаем, что $A^*B=B^*A=0$. Поэтому имеем $A^+B=B^+A=0$ и, следовательно,

$$\left(\lambda^{-1}B^{+}+A^{+}\right)\left(A+\lambda B\right)=\lambda^{-1}B^{+}A+A^{+}A+B^{+}B+\lambda A^{+}B=$$

$$=A^{+}A+B^{+}B\,. \tag{6.4}$$

Из равенства (6.2) следует, что

$$\left(\ker B\right)^{\perp}=\ker A, \tag{6.5}$$

где $\left(\ker B\right)^{\perp}$ – ортогональное дополнение к подпространству $\ker B$.

Матрица $B^{+}B$ является ортогональным проектором на $\left(\ker B\right)^{\perp}$, а матрица $E-A^{+}A$ – на $\ker A$. Поэтому из равенства (6.5) получаем равенство этих матриц $B^{+}B=E-A^{+}A$, то есть $A^{+}A+B^{+}B=E$. Отсюда и из (6.4) вытекает справедливость равенства (6.3).

Теорема доказана.

Следствие 6.1. ***Пусть выполнены условия теоремы*** **6.1.** ***Тогда СЛАУ*** **(4.2)** ***является регуляризацией сдвигом СЛАУ*** **(4.1)** ***и для всех*** $\lambda\neq 0$ ***справедливо равенство***

$$x_{\lambda}\equiv x_{0}, \tag{6.6}$$

где $x_{\lambda}=\left(A+\lambda B\right)^{-1}f$ ***– решение СЛАУ*** **(4.2),** $x_{0}=A^{+}f$ ***– нормальное решение СЛАУ*** **(4.1).**

Заметим, что для получения решения СЛАУ (4.1) из решений СЛАУ (4.2), вообще говоря, необходим предельный переход при $\lambda\to 0$. Если выполнены условия теоремы 6.1, то такой переход к пределу необязателен, так как в этом случае решения СЛАУ (4.2) тождественно совпадают с нормальным решением СЛАУ (4.1) для всех $\lambda\neq 0$.

Равенства (6.1) и (6.2) являются достаточными условиями для тождественного совпадения регуляризованных сдвигом решений СЛАУ (4.2) с нормальным решением СЛАУ (4.1). Естественен вопрос о том, когда регуляризованные сдвигом решения СЛАУ (4.2) сходятся к нормальному решению СЛАУ (4.1). Ответ на поставленный вопрос приводится в следующем утверждении.

Теорема 6.2. ***Для того чтобы регуляризованные сдвигом решения СЛАУ* (4.2) *сходились к нормальному решению СЛАУ* (4.1), *необходимо и достаточно выполнение равенства***

$$F^{+}B = Q. \tag{6.7}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть СЛАУ (4.2) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (4.1). Тогда в силу теорем 4.1 и 4.2 имеет место матричное разложение (4.7). Отсюда при $\lambda \to 0$ получим

$$x_\lambda = \left(A + \lambda B\right)^{-1} f \to x_0 - F^{+}BA^{+}f\ , \tag{6.8}$$

где $x_0 = A^{+}f$ – нормальное решение СЛАУ (4.1). По условию теоремы $x_\lambda \to x_0$ при $\lambda \to 0$. Поэтому $F^{+}BA^{+}f = 0$. Так как $f \in R(A)$ – произвольный элемент, то из последнего равенства получим $F^{+}BA^{+}A = 0$. Преобразуем полученное равенство

$$0 = F^{+}BA^{+}A = F^{+}B\Big(E - \big(E - A^{+}A\big)\Big) = F^{+}B\left(E - Q\right) =$$

$$= F^{+}B - F^{+}BQ = F^{+}B - F^{+}PBQ = F^{+}B - F^{+}F = F^{+}B - Q\,.$$

Равенство (6.7) доказано. Необходимость доказана.

Достаточность. Регуляризованные сдвигом решения СЛАУ (4.2) сходятся к элементу $A^{+}f - F^{+}BA^{+}f$ при $\lambda \to 0$. Отсюда в силу равенства (6.7) получим $F^{+}BA^{+}f = QA^{+}f = 0$. Достаточность доказана.

Теорема доказана.

Если известны ортонормированные базисы в $\ker A$ и $\ker A^{*}$, то матрицу B можно конструировать по векторам этих базисов.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ и $g_1, g_2, \ldots, g_k$ образуют ортонормированные базисы в $\ker A$ и $\ker A^{*}$, соответственно. Положим

$$B = \sum_{m=1}^{k} g_m e_m^{*}\ , \tag{6.9}$$

где e_m^* – вектор-столбец, который получается из вектора-столбца $e_m, m=\overline{1,k}$ транспонированием и операцией комплексного сопряжения каждой его координаты. Из (6.9) следует равенство

$$Bx=\sum_{m=1}^{k}\left(x,e_m\right)g_m,$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^N$.

Справедлива

Теорема 6.3. ***Пусть матрица*** B ***определена равенством*** **(6.9).** ***Тогда для всех*** $\lambda\neq 0$ ***справедливо равенство***

$$(A+\lambda B)^{-1}=\lambda^{-1}\sum_{m=1}^{k}e_m g_m^*+A^+. \tag{6.10}$$

Доказательство. Справедливость следующей цепочки равенств проверяется непосредственно:

$$\left(\lambda^{-1}\sum_{m=1}^{k}e_m g_m^*+A^+\right)\left(A+\lambda\sum_{m=1}^{k}g_m e_m^*\right)=A^+A+$$

$$+\lambda A^+\sum_{m=1}^{k}g_m e_m^*+\lambda^{-1}\sum_{m=1}^{k}e_m g_m^* A+\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}e_m g_m^* g_n e_n^*=$$

$$=A^+A+\lambda\left(A^*A\right)^+\sum_{m=1}^{k}\left(A^*g_m\right)e_m^*+\lambda^{-1}\sum_{m=1}^{k}e_m\left(A^*g_m\right)^*+$$

$$+\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}e_m\left(g_m,g_n\right)e_n^*=A^+A+\sum_{m=1}^{k}e_m e_m^*. \tag{6.11}$$

Покажем, что

$$\sum_{m=1}^{k}e_m e_m^*=E-A^+A.$$

Пусть $z \in \ker A$. Тогда $z = \sum_{n=1}^{k} z_n e_n$, где z_n – коэффициенты разложения вектора z по базису $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Имеем

$$\sum_{m=1}^{k} e_m e_m^* z = \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{k} z_n \left(e_n, e_m\right) e_m = \sum_{m=1}^{k} z_m e_m = z .$$

Пусть теперь $z \in \left(\ker A\right)^{\perp} = R\left(A^*\right)$. Тогда существует вектор $y \in \mathbb{C}^N$ такой, что $z = A^* y$ и

$$\sum_{m=1}^{k} e_m e_m^* z = \sum_{m=1}^{k} \left(e_m, z\right) e_m = \sum_{m=1}^{k} \left(e_m, A^* y\right) e_m = \sum_{m=1}^{k} \left(A e_m, y\right) e_m = 0 .$$

Следовательно, сумма $\sum_{m=1}^{k} e_m e_m^*$ является ортогональным проектором на $\ker A$. Поэтому $\sum_{m=1}^{k} e_m e_m^* = E - A^+ A$. Из этого равенства и (6.11) следует справедливость равенства (6.10).

Теорема доказана.

7. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СДВИГОМ

7.1. Формулировка основных результатов. При практическом применении теории регуляризации в решении той или иной задачи, в частности, при решении СЛАУ, важным моментом является выбор параметра регуляризации. Как правило, этот выбор сопровождается большими трудностями. Рассмотрим вопрос регуляризации сдвигом СЛАУ, в которой не участвует параметр регуляризации. Это освободит от выбора параметра регуляризации. Для получения ответа на поставленный вопрос будем использовать результаты, полученные в предыдущем параграфе.

Теорема 7.1. ***Пусть*** B ***– произвольная матрица, удовлетворяющая условиям теоремы*** **6.1.** ***Тогда нормальное решение*** x_0 ***СЛАУ***

$$Ax = f, \qquad f \in R(A) \tag{7.1}$$

определяется равенством

$$x_0 = (A+B)^{-1} f \, . \tag{7.2}$$

Если известны ортонормированные базисы $e_1,\dots,e_k$ и $g_1,\dots,g_k$ в $\ker A$ и $\ker A^*$, соответственно, то можно сформулировать утверждения не только о нахождении нормального решения СЛАУ, а также для нахождения псевдорешения и, в частности, нормального псевдорешения, в случае несовместности СЛАУ.

Теорема 7.2. ***Пусть матрица*** B ***определена равенством*** **(6.9)** ***и*** $f \in R(A)$. ***Тогда нормальное решение*** x_0 ***СЛАУ*** **(7.1)** ***определяется равенством***

$$x_0 = \left(A + \sum_{m=1}^{k} g_m e_m^* \right)^{-1} f \, . \tag{7.3}$$

Теорема 7.3. ***Пусть матрица*** B ***определена равенством*** **(6.9).** ***Тогда нормальное псевдорешение*** x_0^+ ***СЛАУ***

$$Ax = f, \qquad f \in \mathbb{C}^N , \tag{7.4}$$

определяется равенством

$$x_0^+ = \left(A + \sum_{m=1}^{k} g_m e_m^* \right)^{-1} g \, , \tag{7.5}$$

где

$$g = f - \sum_{m=1}^{k} \left(f, e_m \right) g_m \, . \tag{7.6}$$

7.2. Доказательство теорем 7.1-7.3. Справедливость теоремы 7.1 получается из следствия 6.1 при $\lambda = 1$.

Доказательство теоремы 7.2. Так как $f \in R(A)$, то существует вектор $x_* \in \mathbb{C}^N$ такой, что $Ax_* = f$. Поэтому, при $\lambda = 1$ из (6.10), будем иметь

$$\left(A + \sum_{m=1}^{k} g_m e_m^*\right)^{-1} f = \left(A^+ + \sum_{m=1}^{k} e_m g_m^*\right) f =$$

$$= A^+ f + \sum_{m=1}^{k} (f, g_m) e_m = A^+ f + \sum_{m=1}^{k} (Ax_*, g_m) e_m =$$

$$= A^+ f + \sum_{m=1}^{k} (x_*, A^* g_m) e_m = A^+ f .$$

Теорема 7.2 доказана.

Доказательство теоремы 7.3. Представим правую часть $f \in \mathbb{C}^N$ в виде $f = f_1 + f_0$, где $f_1 \in R(A)$, $f_0 \in \ker A^*$. Тогда существует вектор $x_1 \in \mathbb{C}^N$ и числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ такие, что $Ax_1 = f_1$ и $f_0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i$. Поэтому

$$g = f - \sum_{m=1}^{k} (f, g_m) g_m = f_1 + f_0 - \sum_{m=1}^{k} (f_1 + f_0, g_m) g_m =$$

$$= f_1 + f_0 - \sum_{m=1}^{k} (Ax_1, g_m) g_m - \sum_{m=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i, g_m \right) g_m =$$

$$= f_1 + f_0 - \sum_{m=1}^{k} (x_1, A^* g_m) g_m - \sum_{m=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (g_i, g_m) g_m =$$

$$= f_1 + f_0 - \sum_{m=1}^{k} \alpha_m g_m = f_1 + f_0 - f_0 = f_1 \in R(A) .$$

Таким образом, $g \in R(A)$. Следовательно, нормальное псевдорешение СЛАУ (7.4) совпадает с нормальным решением СЛАУ $Ax = g$.

Теорема 7.3 доказана.

8. ЦИКЛИЧЕСКИЙ БАЗИС И КРАТНЫЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВАНДЕРМОНДА

8.1. Циклический базис. Пусть A – произвольная квадратная матрица порядка N, а $u \in \mathbb{C}^N$ – произвольный ненулевой вектор. Составим последовательность векторов

$$u,\ Au,\ A^2u,\ \ldots. \tag{8.1}$$

Так как рассматриваемое пространство конечномерное, то существует такое натуральное число $n : 1 \le n \le N$, что векторы

$$u,\ Au,\ \ldots\ A^{n-1}u \tag{8.2}$$

линейно независимы, а вектор $A^n u$ есть линейная комбинация векторов системы (8.2).

В этом пункте изучается задача, когда существует вектор $u \in \mathbb{C}^N$, чтобы в системе векторов (8.2) выполнялось равенство $n = N$. Другими словами: какими свойствами должна обладать матрица A, для которой существует вектор $u \in \mathbb{C}^N$, чтобы первые N векторов системы (8.1)

$$u,\ Au,\ \ldots\ A^{N-1}u \tag{8.3}$$

являлись линейно независимыми.

Если для данного вектора $u \in \mathbb{C}^N$ система (8.3) является линейно независимой, то систему векторов (8.3) назовем **циклическим базисом.**

Основным утверждением данного пункта является следующая теорема.

Теорема 8.1. ***Для того чтобы система векторов* (8.3) *для некоторого вектора* $u \in \mathbb{C}^N$ *образовала циклический базис, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая кратность каждого собственного значения матрицы* A *равнялась единице.***

Доказательство теоремы 8.1 приведено в пункте 8.4.

Через $B = J(A)$ обозначим жорданову форму матрицы A. Невырожденную матрицу, приводящую матрицу A к жордановой форме, обозначим Q:

$$QAQ^{-1} = B, \tag{8.4}$$

где

$$B = J(A) = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_m \end{bmatrix}_{N\times N}, \tag{8.5}$$

$$A_i = \left[\lambda_i\right] \text{ или } A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{k_i\times k_i}, \ i = 1,\ldots,m, \tag{8.6}$$

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = N. \tag{8.7}$$

Наряду с системой (8.2) рассмотрим систему векторов

$$v,\ Bv,\ \ldots\ B^{n-1}v, \tag{8.8}$$

где $v = Qu$.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 8.1. ***Пусть*** $u \in \mathbb{C}^N$ ***– заданный вектор. Для линейной независимости системы векторов* (8.2) *необходима и достаточна линейная независимость системы векторов* (8.8).**

Доказательство. Из невырожденности матрицы Q и цепочки равенств

$$\alpha_0 v + \alpha_1 Bv + \ldots + \alpha_{n-1} B^{n-1} v =$$

$$= \alpha_0 Qu + \alpha_1 QAQ^{-1} \cdot Qu + \ldots + \alpha_{n-1} \left(QAQ^{-1}\right)^{n-1} \cdot Qu =$$

$$= Q\left(\alpha_0 u + \alpha_1 Au + \ldots + \alpha_{n-1} A^{n-1} u\right)$$

следует справедливость данного утверждения.

Лемма 8.2. ***Пусть*** $u \in \mathbb{C}^N$ ***– заданный вектор. Для линейной независимости системы векторов*** **(8.2)** ***необходима и достаточна линейная независимость системы векторов***

$$u,\ \alpha_{10} u + Au,\ \alpha_{20} u + \alpha_{21} Au + A^2 u,\ \ldots,$$

$$\alpha_{n-1,0} u + \alpha_{n-1,1} Au + \ldots + \alpha_{n-1,n-2} A^{n-2} u + A^{n-1} u, \qquad (8.9)$$

где $\alpha_{i\,j} \in \mathbb{C}$, $0 \le j < i \le n-1$, ***– произвольные числа.***

Доказательство. Необходимость. Пусть система векторов (8.2) – линейно независимая. Докажем линейную независимость системы векторов (8.9), где $\alpha_{i\,j} \in \mathbb{C}$, $0 \le j < i \le n-1$ – произвольные числа.

Пусть линейная комбинация векторов этой системы равна нулю:

$$x_0 u + x_1\left(\alpha_{10} u + Au\right) + x_2\left(\alpha_{20} u + \alpha_{21} Au + A^2 u\right) + \ldots +$$

$$x_{n-1}\left(\alpha_{n-1,0} u + \alpha_{n-1,1} Au + \ldots + \alpha_{n-1,n-2} A^{n-2} u + A^{n-1} u\right). \qquad (8.10)$$

Запишем это равенство в виде

$$\left(x_0 + \alpha_{10} x_1 + \alpha_{20} x_2 + \ldots + \alpha_{n-1,0} x_{n-1}\right) u +$$

$$+\left(x_1 + \alpha_{21} x_2 + \alpha_{31} x_3 + \ldots + \alpha_{n-1,1} x_{n-1}\right) Au + \ldots +$$

$$+\left(x_{n-2} + \alpha_{n-1,n-2} x_{n-1}\right) A^{n-2} u + x_{n-1} A^{n-1} u = 0\ .$$

Отсюда и из линейной независимости системы векторов (8.2) получаем

$$\begin{cases} x_0 + \alpha_{10}x_1 + \alpha_{20}x_2 + \ldots + \alpha_{n-2,0}x_{n-2} + \alpha_{n-1,0}x_{n-1} = 0, \\ \qquad x_1 + \alpha_{21}x_2 + \ldots + \alpha_{n-2,1}x_{n-2} + \alpha_{n-1,1}x_{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_{n-2} + \alpha_{n-1,n-2}x_{n-1} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad x_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Полученная система имеет только тривиальное решение

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$$

независимо от значений $\alpha_{i\,j} \in \mathbb{C}$, $0 \le j < i \le n-1$.

Таким образом, равенство (8.10) имеет место только при нулевых значениях коэффициентов линейной комбинации. Следовательно, система векторов (8.9) – линейно независимая для любых значений $\alpha_{i\,j} \in \mathbb{C}$, $0 \le j < i \le n-1$. В частности, она является линейно независимой и при $\alpha_{ij} = 0$. Но при $\alpha_{ij} = 0$ система векторов (8.9) совпадает с (8.2). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть система векторов (8.9) является линейно независимой для любых значений $\alpha_{i\,j} \in \mathbb{C}$, $0 \le j < i \le n-1$. В частности, система (8.9) является линейно независимой и при $\alpha_{ij} = 0$, $0 \le j < i \le n-1$. Но при этих значениях α_{ij} система векторов (8.9) совпадает с системой (8.2). Поэтому система (8.2) – линейно независимая. Достаточность доказана.

Лемма доказана.

8.2. Кратный определитель Вандермонда. Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_N$ – произвольные числа. Определитель N-го порядка

$$W_N = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_N & \vdots & \lambda_N^{N-1} \\ 1 & \lambda_{N-1} & \vdots & \lambda_{N-1}^{N-1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & \lambda_1 & \vdots & \lambda_1^{N-1} \end{vmatrix} \qquad (8.11)$$

называется **определителем Вандермонда.** Для этого определителя справедливо рекуррентное соотношение

$$W_N = \prod_{1 \le i \le N-1} \left(\lambda_i - \lambda_N\right) \cdot W_{N-1}, \qquad (8.12)$$

и его значение вычисляется по формуле

$$W_N = \prod_{1 \le i < j \le N} \left(\lambda_i - \lambda_j\right). \qquad (8.13)$$

Из равенства (8.13) следует, что если числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ – попарно различные, то определитель Вандермонда (8.11) не равен нулю.

Для доказательства равенства (8.12) нужно умножить каждый столбец определителя Вандермонда (8.11), кроме последнего, на $-\lambda_N$ и прибавить к следующему столбцу, а затем разложить его по элементам первой строки. Имеем:

$$W_N = \begin{vmatrix} \lambda_{N-1} - \lambda_N & \left(\lambda_{N-1} - \lambda_N\right)\lambda_{N-1} & \vdots & \left(\lambda_{N-1} - \lambda_N\right)\lambda_{N-1}^{N-2} \\ \lambda_{N-2} - \lambda_N & \left(\lambda_{N-2} - \lambda_N\right)\lambda_{N-2} & \vdots & \left(\lambda_{N-2} - \lambda_N\right)\lambda_{N-2}^{N-2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \lambda_1 - \lambda_N & \left(\lambda_1 - \lambda_N\right)\lambda_1 & \vdots & \left(\lambda_1 - \lambda_N\right)\lambda_1^{N-2} \end{vmatrix}.$$

Отсюда получим справедливость равенства (8.12).

Через $w_N(\lambda, k)$, где $1 \le k \le N$, обозначим матрицу размера $k \times N$ с первой строкой $\left(1,\ \lambda,\ \lambda^2,\ \ldots,\ \lambda^{N-1}\right)$, все последующие строки получаются из предыдущих почленным дифференцированием. Тогда

$$w_N(\lambda, k) = \qquad (8.14)$$

$$
=\begin{bmatrix}
1 & \lambda & \dots & \lambda^{k-2} & \lambda^{k-1} & \dots & \lambda^{N-1} \\
0 & 1 & \dots & \frac{(k-2)!}{(k-3)!}\lambda^{k-3} & \frac{(k-1)!}{(k-2)!}\lambda^{k-2} & \dots & \frac{(N-1)!}{(N-2)!}\lambda^{N-2} \\
0 & 0 & \dots & \frac{(k-2)!}{(k-4)!}\lambda^{k-4} & \frac{(k-1)!}{(k-3)!}\lambda^{k-3} & \dots & \frac{(N-1)!}{(N-3)!}\lambda^{N-3} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \frac{(k-2)!}{0!} & \frac{(k-1)!}{1!}\lambda & \dots & \frac{(N-1)!}{(N-k+1)!}\lambda^{N-k+1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & \frac{(k-1)!}{0!} & \dots & \frac{(N-1)!}{(N-k)!}\lambda^{N-k}
\end{bmatrix}.
$$

Пусть $\lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{C}$, $k_1,\dots,k_m \in \mathbb{N}$ – произвольные числа, причем $k_1+\dots+k_m = N$, $1 \le m \le N$. Обозначим через $W_N\begin{pmatrix}\lambda_1,\dots,\lambda_m \\ k_1,\dots,k_m\end{pmatrix}$ определитель N-го порядка

$$
W_N\begin{pmatrix}\lambda_1,\dots,\lambda_m \\ k_1,\dots,k_m\end{pmatrix} = \det\begin{bmatrix} w_N(\lambda_m,k_m) \\ w_N(\lambda_{m-1},k_{m-1}) \\ \vdots \\ w_N(\lambda_1,k_1)\end{bmatrix}, \tag{8.15}
$$

который назовем **кратным определителем Вандермонда.** Например,

$$
W_7\begin{pmatrix}\lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \lambda_4 \\ 3, & 2, & 1, & 1\end{pmatrix} =
$$

$$=\begin{vmatrix}
1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \lambda_4^4 & \lambda_4^5 & \lambda_4^6 \\
1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \lambda_3^4 & \lambda_3^5 & \lambda_3^6 \\
1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^4 & \lambda_2^5 & \lambda_2^6 \\
0 & 1 & 2\lambda_2 & 3\lambda_2^2 & 4\lambda_2^3 & 5\lambda_2^4 & 6\lambda_2^5 \\
1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 & \lambda_1^5 & \lambda_1^6 \\
0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & 4\lambda_1^3 & 5\lambda_1^4 & 6\lambda_1^5 \\
0 & 0 & 2 & 6\lambda_1 & 12\lambda_1^2 & 20\lambda_1^3 & 30\lambda_1^4
\end{vmatrix}$$

является кратным определителем Вандермонда порядка 7.

Если $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 1$, то кратный определитель Вандермонда представляет классический определитель Вандермонда. Так же, как и сам определитель Вандермонда, кратный определитель Вандермонда не равен нулю, если $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ суть различные числа.

Для кратного определителя Вандермонда порядка N справедливы следующие рекуррентные соотношения:

1) если $k_2 = \ldots = k_m = 1$, то

$$W_N \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \\ k_1,\ 1,\ \ldots, 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\lambda_1 - \lambda_m\right)^{k_1} \prod_{i=1}^{m-1} \left(\lambda_i - \lambda_m\right) \cdot W_{N-1} \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1} \\ k_1,\ 1,\ \ldots, 1 \end{pmatrix}, \qquad (8.16)$$

2) если $k_m \le \min\left\{k_1, \ldots, k_{m-1}\right\}$, то

$$W_N \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \\ k_1, k_2,\ \ldots, k_m \end{pmatrix} =$$

$$= 0!1!\ldots\left(k_m - 1\right)! \cdot \prod_{i=1}^{m-1} \left(\lambda_i - \lambda_m\right)^{k_i k_m} W_{N-k_m} \begin{pmatrix} \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1} \\ k_1, \ldots, k_{m-1} \end{pmatrix}. \qquad (8.17)$$

Справедливость равенств (8.16) и (8.17) проверяется непосредственным вычислением.

Используя рекуррентные соотношения (8.16) и (8.17), можно получить формулу для вычисления значения кратного определителя Вандермонда.

Пусть $\lambda_i,\ i=\overline{1,\ m}$ – произвольные комплексные числа, $k_i, i=\overline{1,m}$ – произвольные натуральные числа, $N=k_1+\ldots+k_m$. Тогда имеет место формула

$$W_N\begin{pmatrix}\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\\ k_1,k_2,\ \ldots,k_m\end{pmatrix}=$$

$$=\prod_{i=1}^{m}0!1!\ldots(k_i-1)!\cdot\prod_{1\le i<j\le m}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)^{k_i k_j}. \tag{8.18}$$

Справедливость (8.18) устанавливается с помощью многократного применения рекуррентных соотношений (8.16) и (8.17).

8.3. Связь между циклическим базисом и кратным определителем Вандермонда. Цикличность базиса (8.3) означает существование вектора $u\in\mathbb{C}^N$ такого, что из равенства $\sum_{i=1}^{N-1}x_iA^iu=0$ следует, что $x_i=0$, $i=\overline{0,\ N-1}$. Отрицание этого предложения означает, что для любого вектора $u\in\mathbb{C}^N$ однородная СЛАУ $\sum_{i=1}^{N-1}x_iA^iu=0$ имеет нетривиальное решение. В силу леммы 8.1 линейная независимость системы векторов (8.3) для некоторого вектора $u\in\mathbb{C}^N$ эквивалентна линейной независимости системы векторов

$$v,\ Bv,\ B^2v,\ldots\ B^{N-1}v \tag{8.19}$$

для некоторого вектора $v\in\mathbb{C}^N$, где матрица B определена равенствами (8.4)-(8.7).

Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ – собственные значения матрицы A, а также и матрицы B. Через $k_1,\ldots,k_m$ обозначим алгебраические кратности этих собственных значений.

Приведем признак, устанавливающий связь между геометрическими кратностями собственных значений матрицы B и кратным определителем Вандермонда, определенным равенствами (8.15) и (8.14).

Теорема 8.2. ***Для того чтобы геометрическая кратность каждого собственного значения матрицы B равнялась единице, необходимо и достаточно, чтобы кратный определитель Вандермонда $W_N\begin{pmatrix}\lambda_1,\ldots,\lambda_m\\ k_1,\ldots,k_m\end{pmatrix}$ не равнялся нулю.***

Доказательству теоремы 8.2 предпошлем две леммы.

Лемма 8.3. ***Для того чтобы матричное уравнение***

$$x_0E + x_1C + x_2C^2 + \ldots + x_{m-1}C^{m-1} = 0, \tag{8.20}$$

где $C = \mathrm{diag}(c_1,\, c_2,\, \ldots,\, c_m)$, имело только нулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы числа $c_1, c_2, \ldots, c_m$ были попарно различными.

Доказательство. Запишем матричное уравнение (8.20) в развернутом виде

$$\begin{cases} x_0 + c_1x_1 + c_1^2x_2 + \ldots + c_1^{m-1}x_{m-1} = 0, \\ x_0 + c_2x_1 + c_2^2x_2 + \ldots + c_2^{m-1}x_{m-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_0 + c_mx_1 + c_m^2x_2 + \ldots + c_m^{m-1}x_{m-1} = 0. \end{cases} \tag{8.21}$$

Для того чтобы однородная СЛАУ (8.21) имела только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель СЛАУ (8.21) не равнялся нулю. Определителем СЛАУ (8.21) является определитель Вандермонда. Он не равен нулю тогда и только тогда, когда числа $c_1, c_2, \dots, c_m$ являются попарно различными. Лемма доказана.

Положим

$$D = \begin{bmatrix} d & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & d \end{bmatrix}_{m\times m}.$$

Лемма 8.4. ***Матричное уравнение***

$$x_0 E + x_1 D + x_2 D^2 + \dots + x_{m-1} D^{m-1} = 0 \tag{8.22}$$

имеет только нулевое решение.

Доказательство. Левая часть уравнения (8.22) является теплицевой верхней треугольной матрицей с первой строкой

$$\left(\frac{\varphi(d)}{0!},\ \frac{\varphi'(d)}{1!},\ \frac{\varphi''(d)}{2!},\ \dots,\ \frac{\varphi^{(m-1)}(d)}{(m-1)!} \right),$$

где
$$\varphi(d) = x_0 + x_1 d + x_2 d^2 + \dots + x_{m-1} d^{m-1}.$$

Поэтому поэлементная запись первой строки матричного уравнения (8.22) имеет вид

$$\begin{cases} x_0 + x_1 d + x_2 d^2 + \dots\dots\dots + x_{m-1} d^{m-1} = 0, \\ \quad x_1 + 2x_2 d + \dots\dots + (m-1) x_{m-1} d^{m-2} = 0, \\ \qquad x_2 + \dots + \frac{1}{2}(m-1)(m-1) x_{m-1} d^{m-3} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad x_{m-1} = 0. \end{cases} \tag{8.23}$$

Последовательно находя значения x_i, двигаясь снизу вверх, согласно (8.23) получим справедливость леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 8.2. Необходимость. Если геометрическая кратность каждого собственного значения матрицы B равна единице, то числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ являются попарно различными. Тогда, в силу формулы (8.18), кратный определитель Вандермонда не равен нулю. Необходимость доказана.

Достаточность. Если кратный определитель Вандермонда не равен нулю, то из равенства (8.18) следует, что числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ являются попарно различными. Отсюда и из лемм 8.3 и 8.4 следует, что ни одно из ненулевых собственных значений $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ не может быть единственным ненулевым диагональным элементом в своей строке более одного раза, так как в этом случае размерность собственного подпространства этого собственного значения будет больше единицы. Если это наблюдается для нулевого собственного значения, то размерность ядра матрицы B будет больше единицы. Тогда геометрическая кратность нулевого собственного значения будет больше единицы. Достаточность доказана.

Теорема 8.2 доказана.

8.4. Доказательство теоремы 8.1. Необходимость. Пусть система векторов (8.3) линейно независимая. Докажем простоту каждого собственного значения матрицы A.

Действительно, из линейной независимости системы векторов (8.3) и леммы 8.1 вытекает линейная независимость системы векторов (8.19) для некоторого вектора $v\in\mathbb{C}^N$. Отсюда следует, что линейная комбинация $\sum\limits_{i=0}^{N-1} x_i B^i v$ равна нулю только при $x_i=0,\ i=\overline{0,\,N-1}$. Будем смотреть на равенство $\sum\limits_{i=0}^{N-1} x_i B^i v=0$ как на однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $x_i,\ i=\overline{0,\,N-1}$. Из тривиальности решения однородной системы вытекает, что определитель этой системы (то есть кратный определитель Вандермонда $W_N\begin{pmatrix}\lambda_1,\ldots,\lambda_m\\ k_1,\ldots,k_m\end{pmatrix}$, составленный из собственных значений матрицы A) не равен нулю. Тогда из теоремы 8.2 следует, что геометрическая кратность каждого собственного значения матрицы B (а также и матрицы A) равна единице. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть геометрическая кратность каждого собственного значения матрицы A равна единице. Докажем существование вектора $u \in \mathbb{C}^N$, для которого система векторов (8.3) образует базис в $\mathbb{C}^N$.

Действительно, из теоремы 8.2, в силу простоты собственных значений матрицы A (а также и матрицы B), вытекает, что кратный определитель Вандермонда $W_N\begin{pmatrix} \lambda_1, \ldots, \lambda_m \\ k_1, \ldots, k_m \end{pmatrix}$, составленный из собственных значений матрицы A, не равен нулю: $W_N\begin{pmatrix} \lambda_1, \ldots, \lambda_m \\ k_1, \ldots, k_m \end{pmatrix} \neq 0$. Если предполагать линейную зависимость системы векторов (8.3) для любого вектора $u \in \mathbb{C}^N$, то и система векторов (8.19) – линейно зависимая. Тогда существует ненулевой набор x_i, $i = \overline{0, N-1}$ такой, что линейная комбинация $\sum_{i=0}^{N-1} x_i B^i v$ равна нулю: $\sum_{i=0}^{N-1} x_i B^i v = 0$. Следовательно, однородная система $\sum_{i=0}^{N-1} x_i B^i v = 0$ имеет нетривиальное решение. Отсюда получаем, что определитель этой системы (то есть кратный определитель Вандермонда $W_N\begin{pmatrix} \lambda_1, \ldots, \lambda_m \\ k_1, \ldots, k_m \end{pmatrix}$, составленный из собственных значений матрицы A) равен нулю. Выше было отмечено, что этот определитель не равен нулю. Полученное противоречие указывает на то, что существует вектор $u \in \mathbb{C}^N$, для которого система векторов (8.3) линейно независимая. Достаточность доказана.

Теорема 8.1 доказана.

Можно провести и конструктивное доказательство достаточности теоремы 8.1.

Пусть жорданова форма матрицы A определяется равенствами (8.4)-(8.7). Через u_{0i} обозначим вектор размерности k_i, определяемый равенством

$$u_{0i} = (0, \quad \ldots, \quad 0, \quad 1)^{\mathrm{T}}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{8.24}$$

Эти вектора удовлетворяют соотношениям:

$$\left(A_i - \lambda_i E_{k_i}\right)^r u_{0i} = e_{k_i - r}^{(k_i)} \quad \text{при} \quad 0 \le r \le k_i - 1, \tag{8.25}$$

$$\left(A_i - \lambda_i E_k\right)^r u_{0i} = 0 \quad \text{при} \quad r \ge k_i, \tag{8.26}$$

где E_{k_i} – единичная матрица порядка k_i, а

$$e_l^{(k_i)} = (0, \quad \ldots, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0)^{\mathrm{T}}$$

– вектор размерности k_i, у которого единственный ненулевой элемент находится на l-м месте.

Определим вектор $u_0 = \left(u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0m}\right)^{\mathrm{T}}$, где u_{0i} – вектор размерности k_i вида (8.24). Покажем, что система векторов

$$u_0, \quad Bu_0, \quad \ldots \quad B^{N-1}u_0 \tag{8.27}$$

линейно независимая. С этой целью рассмотрим равенство

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 B u_0 + \ldots + \alpha_1 B^{n-1} u_0 = 0. \tag{8.28}$$

В силу (2) его можно записать в виде

$$\begin{cases} \alpha_0 u_{01} + \alpha_1 A_1 u_{01} + \ldots + \alpha_{n-1} A_1^{n-1} u_{01} = 0, \\ \alpha_0 u_{02} + \alpha_1 A_2 u_{02} + \ldots + \alpha_{n-1} A_2^{n-1} u_{02} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_0 u_{0m} + \alpha_1 A_m u_{0m} + \ldots + \alpha_{n-1} A_m^{n-1} u_{0m} = 0. \end{cases} \tag{8.29}$$

Будем предполагать, что если матрица A имеет нулевое собственное значение, то таковым является λ_1: $\lambda_1 = 0$. С учетом этого $\lambda_i \neq 0$ при $2 \leq i \leq m$ и, следовательно, каждая из матриц A_i^p при $2 \leq i \leq m$ и всех $p = 1,\ 2, \ldots,$ является невырожденной, то есть

$$\det A_i^p \neq 0 \quad \text{при} \quad 2 \leq i \leq m, \quad p = 1,\ 2, \ldots, . \tag{8.30}$$

В силу леммы 2 система векторов

$$u_{01}, \quad A_1 u_{01}, \quad \ldots, \quad A_1^{k_1 - 1} u_{01} \tag{8.31}$$

является линейно независимой, если линейно независимой является система векторов

$$u_{01}, \quad \left(A_1 - \lambda_1 E_{k_1}\right) u_{01}, \quad \ldots, \quad \left(A_1 - \lambda_1 E_{k_1}\right)^{k_1 - 1} u_{01}. \tag{8.32}$$

В силу равенства (8.25) система векторов (8.32) является линейно независимой.

Таким образом, система векторов (8.31) является линейно независимой. С учетом равенств (8.25) и (8.26) первое из уравнений системы (8.29) примет вид

$$\alpha_0 e_{k_1}^{(k_1)} + \alpha_1 e_{k_1 - 1}^{(k_1)} + \ldots + \alpha_{k_1 - 1} e_1^{(k_1)} = 0. \tag{8.33}$$

Так как $e_1^{(k_1)}, \ldots, e_{k_1}^{(k_1)}$ - линейно независимая система векторов, то из равенства (8.33) вытекают равенства

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_{k_1 - 1} = 0. \tag{8.34}$$

Отсюда следует, что второе из равенств (8.29) можно записать в виде

$$\alpha_{k_1} A_2^{k_1} u_{02} + \alpha_{k_1 + 1} A_2^{k_1 + 1} u_{02} + \ldots + \alpha_{n-1} A_2^{n-1} u_{02} = 0. \tag{8.35}$$

Из неравенства (8.30) следует, что уравнение (8.35) эквивалентно уравнению

$$\alpha_{k_1} u_{02} + \alpha_{k_1 + 1} A_2 u_{02} + \ldots + \alpha_{n-1} A_2^{n - k_1 - 1} u_{02} = 0.$$

Повторив рассуждение, приведенное для первого из уравнений (8.29), получим:

$$\alpha_{k_1}=0, \quad \alpha_{k_1+1}=0, \quad \ldots, \quad \alpha_{k_1+k_2-1}=0 .$$

Продолжая это рассуждение, будем иметь:

$$\alpha_{k_1+k_2}=0, \quad \alpha_{k_1+k_2+1}=0, \quad \ldots, \quad \alpha_{k_1+k_2+\ldots+k_m-1}=0 .$$

Но $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$ (равенство (8.7)), поэтому равенство (8.28) имеет место только при условии

$$\alpha_0=0, \quad \alpha_1=0, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1}=0 .$$

Это означает линейную независимость системы векторов (8.27). Отсюда и из леммы 8.1 вытекает, что система векторов (8.1) при $u=Q^{-1}u_0$, является линейно независимой. Здесь Q – матрица, приводящая A к жордановой форме B (равенство (8.4)).

Теорема 8.1 доказана.

9. ОДНОРАНГОВЫЙ СДВИГ МАТРИЦЫ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ЗАДАННЫХ НАПЕРЕД СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Пусть в пространстве $\mathbb{C}^N$ задано линейное преобразование и некоторый базис $e_1,e_2,\ldots,e_N$. Матрицу данного линейного преобразования в данном базисе обозначим A. В этом пункте докажем следующее утверждение:

Теорема 9.1. ***Пусть геометрическая кратность каждого собственного значения матрицы*** A ***равна единице. Тогда для любого набора чисел*** $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N \in \mathbb{C}$ ***существует одноранговая матрица*** C ***такая, что заданные числа*** $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ являются ***собственными значениями матрицы*** $A+C$ **.**

Доказательство. Пусть геометрическая кратность каждого собственного значения матрицы A равна единице. Согласно теореме 8.1 существует вектор $u \in \mathbb{C}^N$ такой, что система векторов

$$u,\ Au,\ A^2u, \dots,\ A^{N-1}u \tag{9.1}$$

образует базис в $\mathbb{C}^N$. Разложим вектор $A^N u$ по базису (9.1)

$$A^N u = -a_N u - a_{N-1} Au - \dots - a_1 A^{N-1} u, \tag{9.2}$$

где $a_1, \dots, a_N$ – коэффициенты разложения. Тогда в базисе (9.1) данное линейное преобразование имеет матрицу

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & -a_N \\ \hline 1 & \dots & 0 & -a_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{array}\right]. \tag{9.3}$$

Если U – матрица перехода из базиса $e_1, e_2, \dots, e_N$ в базис (9.1), то, очевидно, связь между матрицами A и $\widetilde{A}$ устанавливается равенством $\widetilde{A} = UAU^{-1}$.

Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ – наперед заданные числа. Определим числа $c_1, c_2, \dots, c_N$, полагая

$$c_m = (-1)^m \sum \mu_{k_1} \mu_{k_2} \dots \mu_{k_m}, \qquad m = \overline{1, N}, \tag{9.4}$$

где суммирование производится по всем номерам

$$k_1, k_2, \dots, k_m:\ 1 \le k_1 < k_2 < \dots < k_m \le N.$$

Другими словами,

$$c_m = (-1)^m \omega_m(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N), \qquad m = \overline{1, N},$$

где $\omega_m(z_1, z_2, \dots, z_N)$ являются симметрическими многочленами степени m от переменных $z_1, z_2, \dots, z_N$.

Положим

$$\widetilde{C}=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & a_N-c_N \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{N-1}-c_{N-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_1-c_1 \end{array}\right], \tag{9.5}$$

где $a_1, a_2, \dots, a_N$ – коэффициенты разложения (9.2), числа $c_1, c_2, \dots, c_N$ – определены в (9.4). Заметим, что матрица $\widetilde{C}$ является одноранговой. Из матриц (9.3) и (9.5) образуем матрицу

$$\widetilde{A}+\widetilde{C}=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & -c_N \\ \hline 1 & \dots & 0 & -c_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -c_1 \end{array}\right]. \tag{9.6}$$

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться в том, что характеристическим уравнением матрицы $\widetilde{A}+\widetilde{C}$ является

$$\lambda^N+c_1\lambda^{N-1}+\dots+c_{N-1}\lambda+c_N=0. \tag{9.7}$$

Из определения чисел $c_1, c_2, \dots, c_N$ (формула (9.4)) и теоремы Виета [45] следует, что корнями уравнения (9.7) являются числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$.

Таким образом, собственными значениями матрицы $\widetilde{A}+\widetilde{C}$ являются заданные числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$.

Переходим к старому базису: $A=U^{-1}\widetilde{A}\,U$. Положим $C=U^{-1}\widetilde{C}\,U$. Из определения матрицы $\widetilde{C}$ вытекает, что матрица C – одноранговая. Так как матрица $A+C$ является подобной матрице $\widetilde{A}+\widetilde{C}$:

$$A+C=U^{-1}\left(\widetilde{A}+\widetilde{C}\right)U,$$

то числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ являются собственными значениями и матрицы $A+C$.

Теорема доказана.

10. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СДВИГОМ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

10.1. Определение регуляризации сдвигом операторных уравнений (ОУ). Пусть H – гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $A: H \to H$ и $B: H \to H$ – линейные ограниченные операторы. Обобщим результаты, полученные для систем линейных алгебраических уравнений (конечномерный случай) для операторных уравнений (бесконечномерный случай).

Рассмотрим операторное уравнение (ОУ)

$$Ax = f\,, \tag{10.1}$$

где $f \in H$ – заданный, а $x \in H$ – искомый элементы. Наряду с ОУ (10.1) рассмотрим семейство ОУ

$$(A + \lambda B)x = f\,, \tag{10.2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексный параметр.

Будем говорить, что семейство ОУ (10.2) является **регуляризацией сдвигом** ОУ (10.1), если:

а) для любого $f \in H$ ОУ (10.2) имеет единственное решение $x_\lambda = x_\lambda(f)$ при всех $\lambda \in \Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda| \le \rho_0\}$, где ρ_0 – некоторое достаточно малое положительное число;

б) для любого $f \in R(A)$ решение $x_\lambda = x_\lambda(f)$ ОУ (10.2) является сходящимся при $\lambda \to 0$: $x_\lambda \to x_0 = x_0(f)$, причем элемент x_0 является решением ОУ (10.1): $Ax_0 = f$.

Условие а) эквивалентно тому, что для любого $\lambda \in \Lambda_0$ оператор $A + \lambda B$ является ограниченно обратимым, то есть существует $M_\lambda > 0$ такое, что

$$\left\|(A + \lambda B)^{-1}\right\| \le M_\lambda, \qquad \lambda \in \Lambda_0\,. \tag{10.3}$$

Если оператор A ограниченно обратимый, то числа $M_\lambda \le M_0 = \text{const}$, если же у оператора A нет ограниченного обратного, то обязательно $M_\lambda \to \infty$ при $\lambda \to 0$.

Условие б) эквивалентно тому, что семейство операторов $(A+\lambda B)^{-1} A$, $\lambda \in \Lambda_0$ поточечно сходится к некоторому оператору $A_0 : H \to H$ при $\lambda \to 0$, причем этот оператор удовлетворяет равенству $AA_0 = A$.

Известно, если оператор A ограниченно обратимый, то для любого ограниченного оператора B существует число $\rho_0 = \rho_0(A, B) > 0$ такое, что для всех $0 < |\lambda| < \rho_0$ оператор $A + \lambda B$ является ограниченно обратимым. Если x_0 – решение ОУ (10.1), то справедлива оценка

$$\|x_\lambda - x_0\| = O(|\lambda|). \tag{10.4}$$

Таким образом, если оператор A – ограниченно обратимый, то семейство ОУ (10.2) является регуляризацией сдвигом ОУ (10.1) для любого ограниченного оператора B.

Если же оператор A – необратимый, то, во-первых, ОУ (10.1) не при всех $f \in H$ является разрешимым и, во-вторых, в случае разрешимости ОУ (10.1) и однозначной разрешимости СЛАУ (10.2), может не иметь место оценка (10.4). Поэтому представляет интерес выделение класса пар (A, B) операторов A и B, для которых семейство ОУ (10.2) является регуляризацией сдвигом ОУ (10.1).

10.2. Особенности бесконечномерных задач. Бесконечномерный случай существенно отличается от конечномерного многими факторами. Отметим некоторые из них.

1. В конечномерном случае образы $R(A)$ и $R(A^*)$ являются замкнутыми подпространствами для любого оператора A и, следовательно, и

пространство прообразов, и пространство образов представимы прямыми суммами

$$R\left(A^*\right)\oplus\ker A \quad \text{и} \quad R(A)\oplus\ker A^*;$$

в бесконечномерном случае образы $R(A)$ и $R\left(A^*\right)$ являются замкнутыми подпространствами тогда и только тогда, когда оператор A является нормально разрешимым, если же оператор A не является нормально разрешимым, то образы $R(A)$ и $R\left(A^*\right)$ не являются замкнутыми подпространствами и, следовательно, приведенными выше прямыми суммами невозможно представление пространства прообразов и пространство образов.

2. В конечномерном случае сходимость решения $x_\lambda(f)$ уравнения (10.2) при $\lambda\to 0$ является равномерной на любом ограниченном множестве $R_0\subset R(A)$, тогда как сходимость в бесконечномерном случае может являться равномерной или неравномерной, сильной или слабой.

3. В конечномерном случае для любого оператора A существует оператор B, что семейство ОУ (10.2) является регуляризацией сдвигом ОУ (10.1), а в бесконечномерном случае не для всякого оператора A существует оператор B с таким свойством. Например, рассмотрим в пространстве $H=l_2$ оператор A, определенный равенством

$$Ax=\left(0,\,x_1,\,x_2,\ldots\right), \quad \text{где} \quad x=\left(x_1,\,x_2,\ldots\right).$$

Для этого оператора не найдется ни одного ограниченного оператора $B:l_2\to l_2$, чтобы семейство ОУ (10.2) являлось однозначно разрешимым для любого $f\in l_2$. Действительно, с этой целью введем в пространстве образов векторную запись: если $y\in l_2$, $y=\left(y_1,\,y_2,\,y_3,\ldots\right)$, то будем писать $y=\left(y_1,\,y_*\right)$, где $y_*=\left(y_2,\,y_3,\ldots\right)$. В этих обозначениях действие оператора A можно записать в виде $Ax=(0,\,x)$. Пусть B – произвольный оператор. Тогда $Bx = (B_1 x, B_2 x)$, где $B_1 x$ – первая координата Bx, а $B_2 x$ – остальные. Семейство ОУ (10.2) можно записать в виде системы

$$\begin{cases} \lambda B_1 x = f_1, \\ (E + \lambda B_2) x = f_2. \end{cases}$$

Если $\lambda \in \Lambda_0$ удовлетворяет условию $|\lambda| \|B_2\| < 1$, то из второго уравнения системы находим $x = (E + \lambda B_2)^{-1} f_2$. Подставим найденное выражение для x в первое уравнение и получим соотношение между f_1 и f_2:

$$\lambda B_1 (E + \lambda B_2)^{-1} f_2 = f_1.$$

Полученное равенство должно выполняться тождественно для всех $f = (f_1, f_2) \in l_2$. Однако это не так, например, при $f = (1, 0, 0, 0, \ldots) \in l_2$, то есть когда $f_1 = 1,\ f_2 = (0, 0, 0, \ldots)$, указанное равенство не имеет место.

4. Даже когда для данного оператора A существует оператор B, для которого семейство ОУ (10.2) однозначно разрешимо для всех $f \in l_2$ и $\lambda \in \Lambda_0$, то, тем не менее, нет гарантии сходимости решений семейства ОУ (10.2) при $\lambda \to 0$ к некоторому решению ОУ (10.1), когда $f \in R(A)$. Например, рассмотрим ОУ

$$Ax = f_0, \qquad f_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \ldots \right) \in l_2,$$

где $Ax = (x_2, 0, x_4, 0, x_6, 0, \ldots)$. Нормальным решением данного ОУ является

$$x_0 = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \ldots \right) \in l_2.$$

В качестве оператора B возьмем единичный оператор. Тогда

$$(A + \lambda B) x = (\lambda x_1 + x_2, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_{2n-1} + x_{2n}, \lambda x_{2n}, \ldots).$$

Семейство ОУ $(A+\lambda B)x = f_0$ однозначно разрешимо для всех $\lambda \neq 0$:

$$x_\lambda(f_0) = (A+\lambda B)^{-1} f_0 =$$

$$= \left(\frac{f_1}{\lambda} - \frac{f_2}{\lambda^2}, \frac{f_2}{\lambda}, \dots, \frac{f_{2n-1}}{\lambda} - \frac{f_{2n}}{\lambda^2}, \frac{f_{2n}}{\lambda}, \dots \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\lambda}, 0, \frac{1}{4\lambda}, 0, \frac{1}{6\lambda}, 0, \dots, \frac{1}{2n\lambda}, 0, \dots \right).$$

Очевидно, что решение $x_\lambda(f_0)$ семейства ОУ (10.2) не является сходящимся при $\lambda \to 0$ и не имеет отношения ни к одному решению $x_0 + y$ ОУ (10.1), где y – произвольный элемент из $\ker A$.

10.3. Обозначения и основные результаты. Ниже используем обозначения: A^+ – псевдообратный оператор для оператора A [39, 104]; Q – ортогональный проектор на $\ker A$ – ядро оператора A; P – ортогональный проектор на $\ker A^*$ – ядро оператора A^*; $F = PBQ$; $F_0 = F|_{\ker A}$ – сужение оператора F на ядро оператора A; $T = (F^+B - E)A^+$; $T_0 = BF^+ - E$; $\Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |z| \le \rho_0\}$, где ρ_0 – некоторое достаточно малое положительное число.

Теорема 10.1. ***Следующие условия эквивалентны:***

(а1) ***семейство ОУ* (10.2) *является регуляризацией сдвигом ОУ* (10.1)*;***

(а2) ***имеет место оценка***

$$\left\| \lambda (A+\lambda B)^{-1} \right\| \le M = \mathrm{const}, \qquad \lambda \in \Lambda_0. \tag{10.5}$$

(а3) ***оператор*** A ***нормально разрешимый и оператор***

$$F_0 : \ker A \to \ker A^* \tag{10.6}$$

ограниченно обратимый;

(a4) ***имеет место оценка***

$$\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1}B\right\| \le M_1 = \text{const}, \qquad \lambda\in\Lambda_0; \tag{10.7}$$

(a5) ***имеет место оценка***

$$\left\|(A+\lambda B)^{-1}A\right\| \le M_2 = \text{const}, \qquad \lambda\in\Lambda_0; \tag{10.8}$$

(a6) ***имеет место оценка***

$$\left\|\lambda B(A+\lambda B)^{-1}\right\| \le M_3 = \text{const}, \qquad \lambda\in\Lambda_0; \tag{10.9}$$

(a7) ***имеет место оценка***

$$\left\|A(A+\lambda B)^{-1}\right\| \le M_4 = \text{const}, \qquad \lambda\in\Lambda_0; \tag{10.10}$$

(a8) ***оператор*** A^* ***нормально разрешимый и оператор***

$$F_0^* : \ker A^* \to \ker A \tag{10.11}$$

ограниченно обратимый;

(a9) ***операторы*** A ***и*** F ***нормально разрешимые и имеет место операторное равенство***

$$F^+F = Q, \qquad F = PBQ; \tag{10.12}$$

(a10) ***операторы*** A ***и*** F ***нормально разрешимые и имеет место операторное равенство***

$$FF^+ = P, \qquad F = PBQ; \tag{10.13}$$

(a11) ***операторы*** A ***и*** F ***нормально разрешимые и имеет место разложение в операторный ряд***

$$(A+\lambda B)^{-1} = \lambda^{-1}F^+ + \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m (TB)^m T\left(BF^+ - E\right), \tag{10.14}$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$***:*** $0<|\lambda|\le\rho_0<\rho^{-1}$, $\rho=\rho(TB)$ ***– спектральный радиус оператора*** $TB: H\to H$ ***;***

(a12) ***имеют место равенства***

$$\ker A \bigcap \ker B = \{0\}, \tag{10.15}$$

$$R(A) \oplus R(BQ) = H; \tag{10.16}$$

(a13) ***имеют место равенства***

$$\ker A^* \bigcap \ker B^* = \{0\}, \tag{10.17}$$

$$R\left(A^*\right) \oplus R\left(B^* P\right) = H. \tag{10.18}$$

Доказательство теоремы 10.1 приводится в пункте 10.5.

Наряду с операторными уравнениями (10.1) и (10.2) рассмотрим соответствующие им сопряженные уравнения

$$A^* y = g, \tag{10.19}$$

$$\left(A^* + \lambda B^*\right) y = g. \tag{10.20}$$

Естественным является вопрос о связи регуляризуемости сдвигом самого уравнения и его сопряжения. Из теоремы 10.1, в частности, вытекает следующее утверждение:

Теорема 10.2. ***Для того, чтобы семейство ОУ* (10.20) *являлось регуляризацией сдвигом ОУ* (10.19), *необходимо и достаточно, чтобы семейство ОУ* (10.2) *являлось регуляризацией сдвигом ОУ* (10.1).**

Доказательство теоремы 10.2 приводится в пункте 10.6.

Теорема 10.1 позволяет также установить связь между базисом ядра оператора A и базисом ядра сопряженного оператора A^*.

Теорема 10.3. ***Пусть семейство ОУ* (10.2) *является регуляризацией сдвигом ОУ* (10.1). *Тогда базис в ядре оператора* A *равномощен базису в ядре сопряженного оператора* A^*.**

Доказательство теоремы 10.3 приводится в пункте 10.6.

Следующее утверждение является, в некотором смысле, обращением теоремы 10.3 и признаком существования оператора B, для которого семейство ОУ (10.2) является регуляризацией сдвигом ОУ (10.1).

Теорема 10.4. ***Пусть оператор*** $A : H \to H$ ***нормально разрешимый и*** $\dim\ker A = \dim\ker A^*$, ***если*** $\ker A$ ***– конечномерное, ядра операторов*** A ***и*** A^* ***имеют равномощные базисы, если*** $\ker A$ ***– бесконечномерное. Тогда существует такой ограниченный оператор*** $B : H \to H$, ***что семейство ОУ* (10.2) *является регуляризацией сдвигом ОУ* (10.1).**

Доказательство теоремы 10.4 приводится в пункте 10.6.

10.4. Вспомогательные утверждения. В доказательстве сходимости регуляризованных сдвигом решений ОУ используем аналог утверждения о слабой компактности последовательности линейных функционалов на нормированном пространстве [43, с. 198], в случае гильбертова пространства.

Лемма 10.1. ***Последовательность линейных функционалов*** $\{\varphi_n\}$, ***определенных на гильбертовом пространстве*** H, ***слабо сходится к*** φ, ***если:***

1) ***эта последовательность ограничена. то есть***

$$\|\varphi_n\| \le C = \text{const}, \qquad n = 1,\ 2, \ldots;$$

2) ***соотношение*** $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ ***выполнено для всех*** x ***из множества*** X, ***линейная оболочка которого всюду плотно в*** H **.**

Доказательство. Из условия леммы вытекает, что если x_0 является линейной комбинацией элементов X, то

$$\varphi_k(x_0) \to \varphi(x_0), \qquad k \to \infty .$$

Пусть $x \in H$ – произвольный элемент. Покажем, что $\varphi_k(x) \to \varphi(x)$ при $k \to \infty$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент x_0, принадлежащий линейной оболочке X, удовлетворяющей условию $\|x_0 - x\| < \varepsilon$. Поэтому

$$|\varphi_k(x) - \varphi(x)| \le$$

$$|\varphi_k(x) - \varphi_k(x_0)| + |\varphi_k(x_0) - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_0) - \varphi(x)| \le$$

$$\le \|\varphi_k\| \|x - x_0\| + |\varphi_k(x_0) - \varphi(x_0)| + \|\varphi\| \|x_0 - x\| <$$

$$< C\varepsilon + |\varphi_k(x_0) - \varphi(x_0)| + C\varepsilon.$$

Но по условию $\varphi_k(x_0) \to \varphi(x_0)$ при $k \to \infty$. Следовательно, $|\varphi_k(x) - \varphi(x)| \to 0$ при $k \to \infty$ для всех $x \in H$.

Лемма 10.1 доказана.

Лемма 10.2. ***Пусть*** $\{y_n\}$ ***– ограниченная последовательность из гильбертова пространства*** H:

$$\|y_n\| \le C = \text{const}, \qquad n = 1,\ 2, \dots .$$

Тогда существует подпоследовательность $\{y_n^{(k)}\}$ ***данной последовательности, слабо сходящаяся к некоторому элементу*** $y^0 \in H$.

Доказательство. Обозначим через Y линейную оболочку множества $X = \{y_1, y_2, \dots\}$. Замыкание $\overline{Y}$ множества Y является замкнутым подпространством пространства H и, следовательно, сепарабельным гильбертовым пространством.

Определим линейный функционал φ_n, полагая

$$\varphi_n(x) = (y_n, x), \quad x \in H; \quad \|\varphi_n\| = \|y_n\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как $\|\varphi_n\| \le C$, то числовая последовательность

$$\varphi_1(y_1),\ \varphi_2(y_1),\ldots\varphi_n(y_1),\ldots$$

ограничена. Поэтому из последовательности функционалов $\{\varphi_n\}$ можно выбрать подпоследовательность

$$\varphi_1^{(1)},\ \varphi_2^{(1)},\ldots\varphi_n^{(1)},\ldots,$$

чтобы числовая последовательность

$$\varphi_1^{(1)}(y_1),\ \varphi_2^{(1)}(y_1),\ldots\varphi_n^{(1)}(y_1),\ldots$$

сходилась. Далее, из подпоследовательности $\{\varphi_n^{(1)}\}$ можно так выбрать подпоследовательность

$$\varphi_1^{(2)},\ \varphi_2^{(2)},\ldots\varphi_n^{(2)},\ldots,$$

чтобы сходилась последовательность

$$\varphi_1^{(2)}(y_2),\ \varphi_2^{(2)}(y_2),\ldots\varphi_n^{(2)}(y_2),\ldots.$$

Продолжая этот процесс, получим такую систему последовательностей

$$\varphi_1^{(1)},\ \varphi_2^{(1)},\ldots\varphi_n^{(1)},\ldots$$

$$\varphi_1^{(2)},\ \varphi_2^{(2)},\ldots\varphi_n^{(2)},\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(из которых каждая есть подпоследовательность предыдущей), что $\{\varphi_n^{(k)}\}$ сходится в точках $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$. Тогда, взяв «диагональную» подпоследовательность

$$\varphi_1^{(1)},\ \varphi_2^{(2)},\ldots\varphi_n^{(n)},\ldots,$$

получим такую последовательность линейных функционалов $\{\varphi_n^{(n)}\}$, что

$$\varphi_1^{(1)}\left(y_n\right),\ \varphi_2^{(2)}\left(y_n\right),\ldots$$

сходится для всех n. В силу леммы 1 последовательность $\left\{\varphi_n^{(n)}(x)\right\}$ сходится для любого $x\in\overline{Y}$:

$$\varphi_n^{(n)}(x)\ \to\ \varphi^{(0)}(x),\qquad x\in\overline{Y}.$$

Тогда существует единственный элемент $y^0\in\overline{Y}$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(n)}(x)=\left(y^0,\, x\right)\quad \text{для любого}\quad x\in\overline{Y}.$$

Пусть теперь $z\in H$ – произвольный элемент. Представив $z=x+x_0$, где $x\in\overline{Y}$, $x_0\perp\overline{Y}$ и учитывая, что $\left(y^0,x_0\right)=0$, будем иметь

$$\left(y^0,\, x\right)=\left(y^0,\, x\right)+\left(y^0,\, x_0\right)=\left(y^0,\, z\right).$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(n)}(z)=\left(y^0,\, z\right)\quad \text{для любого}\quad z\in H.$$

Лемма 10.2 доказана.

Лемма 10.3. ***Операторозначная функция***

$$F(\lambda)=(A+\lambda B)^{-1}$$

аналитическая на множестве $\Lambda_0=\left\{\lambda:0<|\lambda|\le\rho_0\right\}$***, где*** $\rho_0>0$ ***– некоторое достаточно малое число***.

Доказательство. Пусть λ и λ_0 принадлежат множеству Λ_0. Из тождества

$$F(\lambda)-F\left(\lambda_0\right)=\left(\lambda_0-\lambda\right)F\left(\lambda_0\right)BF(\lambda)$$

будем иметь

$$F(\lambda)=\left[E+\left(\lambda-\lambda_0\right)F\left(\lambda_0\right)B\right]^{-1}F\left(\lambda_0\right).$$

Если $\left|\lambda-\lambda_0\right|\left\|F\left(\lambda_0\right)B\right\|<1$, то оператор

$$\left[E+\left(\lambda-\lambda_0\right)F\left(\lambda_0\right)B\right]^{-1}$$

разлагается в ряд Неймана [43] по степеням $\left(\lambda-\lambda_0\right)$, который будем трактовать как разложение в степенной ряд функции $F\left(\lambda\right)$ в окрестности точки $\lambda=\lambda_0$.

Лемма 10.3 доказана.

10.5. Доказательство теоремы 10.1.

Доказательство импликации (a1) $\Rightarrow$ (a2). Пусть семейство ОУ (10.2) является регуляризацией сдвигом ОУ (10.1). Докажем существование постоянной $M>0$, для которой справедлива оценка (10.5). Действительно, из условия б) следует, что для каждого $x\in H$ найдется число $M_x>0$, удовлетворяющее оценке

$$\left\|\left(A+\lambda B\right)^{-1}Ax\right\|\le M_x,\qquad \lambda\in\Lambda_0. \tag{10.21}$$

Из оценки (10.21), согласно принципу равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза, [44, 97]), следует существование постоянной $M_1>0$, что

$$\left\|\left(A+\lambda B\right)^{-1}A\right\|\le M_1,\qquad \lambda\in\Lambda_0. \tag{10.22}$$

Переходя к нормам в тождестве

$$\lambda\left(A+\lambda B\right)^{-1}B=E-\left(A+\lambda B\right)^{-1}A,$$

получим

$$\left\|\lambda\left(A+\lambda B\right)^{-1}B\right\|\le M_1+1,\qquad \lambda\in\Lambda_0.$$

Пусть $\lambda_0 \in \Lambda_0$ – фиксированное число и $\left|\lambda_0\right| = \rho_0$. Положим $M_0 = \left\|\left(A + \lambda_0 B\right)^{-1}\right\|$. Очевидно, что $M_0 < \infty$. Переходя при $0 < |\lambda| \le \left|\lambda_0\right|$ к нормам в тождестве

$$\lambda\left(A + \lambda B\right)^{-1} =$$

$$= \left[\lambda \cdot \left(A + \lambda B\right)^{-1} A + \lambda_0 \cdot \lambda\left(A + \lambda B\right)^{-1} B\right]\left(A + \lambda_0 B\right)^{-1},$$

будем иметь

$$\left\|\lambda\left(A + \lambda B\right)^{-1}\right\| \le \left(|\lambda| M_1 + \left|\lambda_0\right|\left(M_1 + 1\right)\right) M_0 \le$$

$$\le \left|\lambda_0\right|\left(2M_1 + 1\right) M_0 \equiv M .$$

Импликация (a1) $\Rightarrow$ (a2) доказана.

Доказательство импликации (a2) $\Rightarrow$ (a3). Докажем нормальную разрешимость оператора A.

Рассмотрим в области Λ_0 аналитическую функцию со значением в банаховом пространстве операторов

$$F(\lambda) = \lambda\left(A + \lambda B\right)^{-1}, \qquad \lambda \in \Lambda_0 . \tag{10.23}$$

Обозначим через γ_0 и γ_1 – окружности с центрами в точке 0 и радиусов r_0 и r_1 $\left(0 < r_0 < r_1 < \rho_0\right)$, соответственно. Пусть параметр λ принадлежит круговому кольцу $r_0 < |\lambda| < r_1$. Согласно формуле Коши для многосвязных области, справедливо представление

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) - F_0(\lambda), \qquad \lambda \in \Lambda_0 , \tag{10.24}$$

где

$$F_1(\lambda) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{F(z)}{z - \lambda} dz, \quad F_0(\lambda) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_0} \frac{F(z)}{z - \lambda} dz .$$

Рассмотрим интеграл $F_0(\lambda)$. Произведя замену $z = r_0 e^{i\varphi}$, получим

$$F_0(\lambda) = \frac{1}{i2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F\left(r_0 e^{i\varphi}\right)}{r_0 e^{i\varphi} - \lambda} i r_0 e^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{r_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F\left(r_0 e^{i\varphi}\right)}{r_0 e^{i\varphi} - \lambda} e^{i\varphi} d\varphi. \tag{10.25}$$

Так как $\left|r_0 e^{i\varphi} - \lambda\right| \geq |\lambda| - r_0 > 0$, то, переходя к нормам в (10.25), будем иметь

$$\left\|F_0(\lambda)\right\| \leq \frac{r_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left\|F\left(r_0 e^{i\varphi}\right)\right\|}{\left|r_0 e^{i\varphi} - \lambda\right|} \left|e^{i\varphi}\right| d\varphi \leq$$

$$\leq \frac{r_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{|\lambda| - r_0} d\varphi = \frac{r_0}{2\pi} \cdot \frac{2\pi M}{|\lambda| - r_0} = \frac{r_0 M}{|\lambda| - r_0}. \tag{10.26}$$

Полученное неравенство справедливо для всех $r_0 : 0 < r_0 < |\lambda|$. Поэтому, переходя к пределу в (10.26) при $r_0 \to 0$, получим

$$\left\|F_0(\lambda)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad r_0 \to 0. \tag{10.27}$$

Таким образом, из (10.24) и (10.27) вытекает равенство

$$F(\lambda) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{F(z)}{z - \lambda} dz, \qquad 0 < |\lambda| < r_1.$$

Отметим, что подынтегральная функция имеет непрерывное продолжение в точке $\lambda = 0$. Поэтому, переходя к пределу под знаком интеграла при $\lambda \to 0$, будем иметь

$$C_{-1} \equiv \lim_{\lambda \to 0} F(\lambda) = \frac{1}{i2\pi} \lim_{\lambda \to 0} \int_{\gamma_1} \frac{F(z)}{z - \lambda} dz = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{F(z)}{z} dz =$$

$$= \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{z(A + zB)^{-1}}{z} dz = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_1} (A + zB)^{-1} dz,$$

то есть

$$C_{-1} = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_1} (A + zB)^{-1} dz . \tag{10.28}$$

Полученное равенство позволяет доопределить функцию $F(\lambda)$ по непрерывности в точке $\lambda = 0$, полагая $F(0) = C_{-1}$. Из равенства (10.28) следует существование предела

$$C_{-1} f = \lim_{\lambda \to 0} \lambda (A + \lambda B)^{-1} f = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_1} (A + zB)^{-1} f dz$$

для всех $f \in H$.

Пусть $f \in R(A)$. Тогда из неравенства (10.22) вытекает предельное соотношение

$$C_{-1} f = \lim_{\lambda \to 0} \lambda (A + \lambda B)^{-1} f = 0 . \tag{10.29}$$

Действительно, из включения $f \in R(A)$ вытекает существование элемента $x_0 \in H : \ Ax_0 = f$. Отсюда и из (10.22) получим

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\| \lambda (A + \lambda B)^{-1} f \right\| = \lim_{\lambda \to 0} |\lambda| \left\| (A + \lambda B)^{-1} A \right\| \left\| x_0 \right\| = 0 .$$

Докажем теперь более сильное утверждение. Предельное соотношение (10.29) справедливо и в том случае, когда $f \in \overline{R(A)}$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ – произвольная величина. Тогда:

1) существует элемент $f_\varepsilon \in R(A)$, удовлетворяющий условию

$$\left\| f_\varepsilon - f \right\| < \frac{\varepsilon}{2M} ;$$

2) существует $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех $\lambda : 0 < |\lambda| < \delta_\varepsilon$ выполняется условие

$$\left\| \lambda (A + \lambda B)^{-1} f_\varepsilon \right\| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

справедливость которого следует из (10.29).

Из этих условий, имеем

$$\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1} f\right\| \le \left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1}\right\| \left\| f - f_\varepsilon\right\| +$$

$$+\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1} f_\varepsilon\right\| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Таким образом, при $0 < |\lambda| < \min\left\{\left|\lambda_0\right|, \delta_\varepsilon\right\}$ справедливо неравенство $\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1} f\right\| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ – произвольная величина, то отсюда получаем справедливость (10.29) и при $f \in \overline{R(A)}$.

Докажем, наконец, существование предела решения $x_\lambda = (A+\lambda B)^{-1} f$, $f \in \overline{R(A)}$ семейства ОУ (10.2) при $\lambda \to 0$.

С этой целью для каждого $f \in H$ рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) = \frac{F(\lambda) f - F(0) f}{\lambda - 0}, \qquad \lambda \in \Lambda_0 ,$$

где функция $F(\lambda)$ определена в (10.23), а $F(0) = C_{-1}$ – в (10.28). Функция $\varphi(\lambda)$ является аналитической в Λ_0 [33, с. 274] и имеет предел при $\lambda \to 0$ для каждого $f \in H$. Поэтому справедлива оценка $\|\varphi(\lambda)\| \le M_f$. В силу принципа равномерной ограниченности [44] существует постоянная $M_0 > 0$ такая, что $\|\varphi(\lambda)\| \le M_0 \|f\|$.

Пусть теперь $f \in \overline{R(A)}$. Тогда $F(0) f = 0$ и поэтому

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda(A+\lambda B)^{-1} f}{\lambda} = x_\lambda, \qquad \lambda \in \Lambda_0 .$$

Таким образом, имеем

$$\|x_\lambda\| = \|\varphi(\lambda)\| \le M_0 \|f\|, \qquad \lambda \in \Lambda_0 .$$

Так как x_λ – решение ОУ (10.2), то имеем $Ax_\lambda + \lambda B x_\lambda \equiv f$, $\lambda \in \Lambda_0$. Пусть $\lambda_n \to 0$ – произвольная последовательность. Тогда из последовательности $\left\{x_{\lambda_n}\right\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу x_0. Без ограничения общности будем считать, что сама последовательность $\left\{x_{\lambda_n}\right\}$ слабо сходится к x_0. Поэтому, переходя к пределу (в слабом смысле) в равенстве

$$Ax_{\lambda_n} + \lambda_n B x_{\lambda_n} \equiv f,$$

при $n \to \infty$, получим $Ax_0 = f$. Полученное равенство означает, что $f \in R(A)$. Таким образом, нами доказано, что из включения $f \in \overline{R(A)}$ вытекает другое включение $f \in R(A)$, которое доказывает нормальную разрешимость оператора A.

Докажем ограниченную обратимость оператора

$$F = PBQ : \ker A \to \ker A^*.$$

Представим пространства прообразов и образов как прямые суммы взаимно ортогональных подпространств

$$H = (E-Q)H \oplus QH \quad \text{и} \quad H = (E-P)H \oplus PH. \tag{10.30}$$

Разложения (10.30) порождают матричные представления для операторов A и B

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

где $\quad A_{11} = (E-P)A(E-Q), \quad B_{11} = (E-P)B(E-Q),$

$$B_{12} = (E-P)BQ, \quad B_{21} = PB(E-Q), \quad B_{22} = PBQ.$$

Представим неизвестный x и правую часть f в векторной форме

$$x=\left(x_1,\, x_2\right):\qquad x_1\in(E-Q)H,\qquad x_2\in QH\ ,$$

$$f=\left(f_1,\, f_2\right):\qquad f_1\in(E-P)H,\qquad f_2\in PH\ .$$

Поэтому семейство ОУ (10.2) можно записать в виде системы

$$\begin{cases}\left(A_{11}+\lambda B_{11}\right)x_1+\lambda B_{12}x_2=f_1,\\ \qquad\qquad \lambda B_{21}x_1+\lambda B_{22}x_2=f_2.\end{cases}\tag{10.31}$$

По условию система (10.31) для каждой правой части f_1, f_2 имеет единственное решение $x_{1,\lambda}$, $x_{2,\lambda}$ при $\lambda\in\Lambda_0$. Так как оператор $A:H\to H$ нормально разрешимый, то оператор

$$A_{11}:(E-Q)H\ \to\ (E-P)H\tag{10.32}$$

имеет ограниченный обратный

$$A_{11}^{-1}:(E-P)H\ \to\ (E-Q)H\ .$$

Если $\lambda\in\Lambda_0$ удовлетворяет условию $|\lambda|\left\|A_{11}^{-1}B_{11}\right\|<1$, то операторы

$$A_{11}+\lambda B_{11}:(E-Q)H\ \to\ (E-P)H$$

имеют ограниченные обратные

$$\left(A_{11}+\lambda B_{11}\right)^{-1}:(E-P)H\ \to\ (E-Q)H\ .$$

Из первого уравнения системы (10.31) при $f_1=0$ найдем $x_{1,\lambda}$

$$x_{1,\lambda}=-\lambda\left(A_{11}+\lambda B_{11}\right)^{-1}B_{12}x_{2,\lambda}.$$

Отсюда и из второго уравнения системы (10.31) получим

$$B_{22}\left(\lambda x_{2,\lambda}\right)-\lambda B_{21}\left(A_{11}+\lambda B_{11}\right)^{-1}B_{12}\left(\lambda x_{2,\lambda}\right)=f_2\ .\tag{10.33}$$

В силу оценки (10.5) семейство $\left\{\lambda x_{2,\lambda}\right\}$ равномерно ограничено при $\lambda \in \Lambda_0$: $\left\|\lambda x_{2,\lambda}\right\| \le C$. Положим $y_n = \lambda_n x_{2,\lambda_n}$, где $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\left\|y_n\right\| \le C$, $n = 1, 2, \ldots$. Согласно лемме 10.2 из последовательности $\left\{y_n\right\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\left\{y_{n_k}\right\}$. Этот слабый предел обозначим y^0. Второе слагаемое в левой части (10.33) по норме стремится к нулю

$$\left\|\lambda B_{21}\left(A_{11} + \lambda B_{11}\right)^{-1} B_{12}\left(\lambda x_{2,\lambda}\right)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0 .$$

Поэтому, полагая в равенстве (10.33) $\lambda = \lambda_{n_k}$ и переходя к слабому пределу при $k \to \infty$, получим

$$B_{22} y^0 = f_2 . \tag{10.34}$$

Так как $f_2 \in PH$ – произвольный элемент, то равенство (10.34) означает, что оператор $B_{22} : QH \to PH$ является отображением «на» и, следовательно, его образ совпадает со всем пространством: $R\left(B_{22}\right) = PH$.

Покажем, что для каждого $f_2 \in PH$ решение ОУ (10.34) является единственным, то есть

$$\ker B_{22} = \left\{0\right\} . \tag{10.35}$$

Действительно, пусть $x_{2,0} \in \ker B_{22}$. Так как оператор (10.32) ограниченно обратимый, то существует единственный элемент $x_{1,0} \in \left(E - Q\right)H$, удовлетворяющий равенству

$$A_{11} x_{1,0} = B_{12} x_{2,0} . \tag{10.36}$$

Подставим в левые части (10.31) $x_1 = 0$, $x_2 = x_{2,0}$ и с учетом (10.36) будем иметь

$$\begin{cases} \left(A_{11} + \lambda B_{11}\right) \cdot 0 + \lambda B_{12} x_{2,0} = \lambda A_{11} x_{1,0}, \\ B_{21} \cdot 0 + \lambda B_{22} x_{2,0} = 0. \end{cases} \tag{10.37}$$

Введем обозначения:

$$x_0 = \left(0, x_{2,0}\right) \in H, \quad y_0 = \left(x_{1,0}, 0\right) \in H, \quad f_0 = \left(A_{11} x_{1,0}, 0\right) \in H.$$

Тогда левую часть (10.37) можно записать как $(A + \lambda B) x_0$, а правую часть как $\lambda A y_0$. Поэтому из (10.37) имеем $(A + \lambda B) x_0 = \lambda A y_0$ и, следовательно, при $\lambda \in \Lambda_0$, находим

$$x_0 = \lambda (A + \lambda B)^{-1} A y_0.$$

Отсюда и из равномерной ограниченности семейства $\left\{(A + \lambda B)^{-1} A\right\}$, $\lambda \in \Lambda_0$ получим

$$\left\|x_0\right\| = \left\|\lambda (A + \lambda B)^{-1} A y_0\right\| \le$$

$$\le |\lambda| \left\|(A + \lambda B)^{-1} A\right\| \left\|y_0\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0.$$

Следовательно, $x_{2,0} = 0$. Полученное равенство доказывает справедливость (10.35).

Таким образом, оператор $B_{22} : QH \to PH$ является ограниченно обратимым. Так как $QH = \ker A$, $PH = \ker A^*$ и $B_{22} = PBQ = F_0$, то отсюда следует ограниченная обратимость оператора $F_0 = B_{22} : \ker A \to \ker A^*$.

Импликация (a2) $\Rightarrow$ (a3) доказана.

Доказательство импликации (а3) $\Rightarrow$ (а1). Докажем существование числа $\rho_0 > 0$ такого, что для каждого $\lambda:\ 0<|\lambda|\le\rho_0$ оператор

$$A+\lambda B:\ H\ \to\ H \tag{10.38}$$

имеет ограниченный обратный. С этой целью, как при доказательстве импликации (а2) $\Rightarrow$ (а3), запишем семейство ОУ (10.2) в «координатах»

$$\begin{cases}\left(A_{11}+\lambda B_{11}\right)x_1+\lambda B_{12}x_2=f_1,\\ \qquad\qquad \lambda B_{21}x_1+\lambda B_{22}x_2=f_2.\end{cases} \tag{10.39}$$

По условию леммы оператор $B_{22}=PBQ=F_0$ имеет ограниченный обратный $B_{22}^{-1}:\ker A^*\to\ker A$. Поэтому из второго уравнения системы (10.39) находим

$$x_2=-B_{22}^{-1}B_{21}x_1+\lambda^{-1}B_{22}^{-1}f_2. \tag{10.40}$$

Подставим найденное значение в первое уравнение системы

$$\left(A_{11}+\lambda B_{11}-\lambda B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}\right)x_1=f_1-B_{12}B_{22}^{-1}f_2. \tag{10.41}$$

Из нормальной разрешимости оператора A вытекает ограниченная обратимость оператора

$$A_{11}:(E-Q)H\to(E-P)H.$$

Если λ удовлетворяет условию

$$0<|\lambda|\le\rho_0,\ \text{где}\ \ \rho_0\left\|A_{11}^{-1}\cdot\left(B_{11}-B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}\right)\right\|<1, \tag{10.42}$$

то оператор

$$A_{11}+\lambda\left(B_{11}-B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}\right):\ (E-Q)H\to(E-P)H$$

имеет ограниченный обратный.

Пусть λ удовлетворяет условию (10.42). Тогда из уравнения (10.41) найдем первую неизвестную

$$x_{1,\lambda}=\left(A_{11}+\lambda\left(B_{11}-B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}\right)\right)^{-1}\left(f_1-B_{12}B_{22}^{-1}f_2\right).$$

Отсюда и из (10.40) найдем вторую неизвестную

$$x_{2,\lambda} = -B_{22}^{-1} B_{21} x_{1,\lambda} + \lambda^{-1} B_{22}^{-1} f_2 .$$

Ограниченная обратимость оператора (10.38) при $0 < |\lambda| \le \rho_0$ доказана.

Таким образом, при выполнении условия (10.42) семейство ОУ (10.2) однозначно разрешимо для каждого $f \in H$, то есть имеет место условие а). Докажем справедливость условия б).

Пусть $f = (f_1, f_2)$ принадлежит образу оператора A, то есть $f = (f_1, 0)$. Тогда решением системы (10.39) с данной правой частью является

$$\begin{cases} x_{1,\lambda} = \left(A_{11} + \lambda \left(B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21} \right) \right)^{-1} f_1, \\ x_{2,\lambda} = -B_{22}^{-1} B_{21} \left(A_{11} + \lambda \left(B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21} \right) \right)^{-1} f_1. \end{cases} \tag{10.43}$$

Из представления решения (10.43) следует существование предела при $\lambda \to 0$:

$$\lim_{\lambda \to 0} x_{1,\lambda} = A_{11}^{-1} f_1 \equiv x_{1,0} ,$$

$$\lim_{\lambda \to 0} x_{2,\lambda} = -B_{22}^{-1} B_{21} A_{11}^{-1} f_1 \equiv x_{2,0} .$$

Нетрудно проверить, что элемент $x_0 = \left(x_{1,0}, x_{2,0} \right) \in H$ является решением ОУ (10.1):

$$Ax_0 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} A_{11}^{-1} f_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \end{bmatrix} = f .$$

Импликация (а3) $\Rightarrow$ (а1) доказана.

Доказательство импликации (а2) $\Rightarrow$ (а4). Из (10.5), получим

$$\left\| \lambda (A + \lambda B)^{-1} B \right\| \le \left\| \lambda (A + \lambda B)^{-1} \right\| \|B\| \le M \|B\| .$$

Полагая здесь $M_1 = M\|B\|$, получим справедливость (10.7).

Импликация (a2) $\Rightarrow$ (a4) доказана.

Доказательство эквиваленции (a4) $\Leftrightarrow$ (a5).

Импликации (a4) $\Rightarrow$ (a5). Переходя к нормам в тождестве

$$(A+\lambda B)^{-1}A = E - \lambda(A+\lambda B)^{-1}B,$$

в силу (10.7), получим

$$\left\|(A+\lambda B)^{-1}A\right\| \le 1+M_1.$$

Полагая здесь $M_2 = 1+M_1$, получим справедливость (10.8)

Импликации (a5) $\Rightarrow$ (a4). Переходя к нормам в тождестве

$$\lambda(A+\lambda B)^{-1}B = E - (A+\lambda B)^{-1}A,$$

в силу (10.8), получим

$$\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1}B\right\| \le 1+M_2.$$

Полагая здесь $M_1 = 1+M_2$, получим справедливость (10.7)

Эквиваленция (a4) $\Leftrightarrow$ (a5) доказана.

Доказательство импликации (a5) $\Rightarrow$ (a2). Пусть $\lambda_0 \in \Lambda_0$ и $|\lambda_0| = \rho_0$. Положим $M_0 = \left\|\lambda\left(A+\lambda_0 B\right)^{-1}\right\|$ (очевидно, что $M_0 < \infty$). Переходя к нормам в тождестве

$$\lambda(A+\lambda B)^{-1} = \left[\lambda(A+\lambda B)^{-1}A + \lambda_0\lambda(A+\lambda B)^{-1}B\right]\left(A+\lambda_0 B\right)^{-1},$$

в силу (10.7) и (10.8), получим

$$\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1}\right\| \le \left(|\lambda|M_2 + |\lambda_0|M_1\right)M_0 \le \rho_0\left(M_2+M_1\right)M_0.$$

Полагая $M=\rho_0\left(M_2+M_1\right)M_0$ из полученной оценки, получим справедливость (10.5).

Импликация (a5) $\Rightarrow$ (a2) доказана.

Доказательство импликации (a2) $\Rightarrow$ (a6). Из (10.5), получим

$$\left\|\lambda B(A+\lambda B)^{-1}\right\|\le\|B\|\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1}\right\|\le\|B\|M .$$

Полагая здесь $M_3=\|B\|M$, получим справедливость (10.7).

Импликация (a2) $\Rightarrow$ (a6) доказана.

Доказательство эквиваленции (a6) $\Leftrightarrow$ (a7).

Импликации (a6) $\Rightarrow$ (a7). Переходя к нормам в тождестве

$$A\left(A+\lambda B\right)^{-1}=E-\lambda B\left(A+\lambda B\right)^{-1},$$

в силу (10.9), получим

$$\left\|\left(A+\lambda B\right)^{-1}A\right\|\le 1+M_3 .$$

Полагая здесь $M_4=1+M_3$, получим справедливость (10.10)

Импликации (a7) $\Rightarrow$ (a6). Переходя к нормам в тождестве

$$\lambda B\left(A+\lambda B\right)^{-1}=E-A\left(A+\lambda B\right)^{-1},$$

в силу (10.10), получим

$$\left\|\lambda B\left(A+\lambda B\right)^{-1}\right\|\le 1+M_4 .$$

Полагая здесь $M_3=1+M_4$, получим справедливость (10.9)

Эквиваленция (a6) $\Leftrightarrow$ (a7) доказана.

Доказательство импликации (a7) $\Rightarrow$ (a2). Пусть $\lambda_0\in\Lambda_0$ и $\left|\lambda_0\right|=\rho_0$. Положим $M_0=\left\|\lambda\left(A+\lambda_0 B\right)^{-1}\right\|$ (очевидно, что $M_0<\infty$). Переходя к нормам в тождестве

$$\lambda(A+\lambda B)^{-1}=\left(A+\lambda_0 B\right)^{-1}\left[\lambda A(A+\lambda B)^{-1}+\lambda_0\lambda B(A+\lambda B)^{-1}\right],$$

в силу (10.9) и (10.10), получим

$$\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1}\right\|\le M_0\left(|\lambda|M_4+|\lambda_0|M_3\right)\le\rho_0 M_0\left(M_4+M_3\right).$$

Полагая $M=\rho_0\left(M_4+M_3\right)M_0$ из полученной оценки, получим справедливость (10.5).

Импликация (a7) $\Rightarrow$ (a2) доказана.

Импликация (a2) $\Rightarrow$ (a8). Имеет место оценка

$$\left\|\lambda\left(A^*+\lambda B^*\right)^{-1}\right\|=\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1}\right\|\le M,\qquad \lambda\in\Lambda_0.$$

Отсюда и из импликации (a2) $\Rightarrow$ (a3) следует справедливость (a2) $\Rightarrow$ (a8).

Импликация (a8) $\Rightarrow$ (a2). Нормальная разрешимость оператора A эквивалентна нормальной разрешимости оператора A^*, а ограниченная обратимость оператора F_0 эквивалентна ограниченной обратимости оператора F_0^*. Поэтому из импликации (a3) $\Rightarrow$ (a2) следует справедливость импликации (a8) $\Rightarrow$ (a2).

Эквиваленция (a2) $\Leftrightarrow$ (a8) доказана.

Доказательства импликаций (a3)$\Rightarrow$(a9), (a3)$\Rightarrow$(a10). Нормальная разрешимость оператора A имеется в условии (a3). Нормальная разрешимость оператора F следует из ограниченной обратимости оператора $F_0\colon \ker A\to\ker A^*$. Действительно, продолжая нулем на ортогональное дополнение $\left(\ker A^*\right)^{\perp}$ обратный оператор F_0^{-1}, будем иметь $F^+=F_0^{-1}$. Так как F_0^{-1} – ограниченный оператор, то и псевдообратный оператор F^+ – ограниченный. Из ограниченности псевдообратного оператора F^+ вытекает нормальная разрешимость оператора F.

Для доказательства равенств (10.12) и (10.13) достаточно доказать равенства ядер этих операторов:

$$\ker F^+F = \ker Q \quad \text{и} \quad \ker FF^+ = \ker P .$$

Так как $F = PBQ$, то включение $\ker Q \subset \ker F^+F$ является очевидным. Покажем справедливость обратного включения $\ker F^+F \subset \ker Q$. Пусть $F^+Fx = 0$. Так как $F = FQ$, то $F^+FQx = 0$. На подпространстве $\ker A$ оператор F совпадает с оператором F_0 и, следовательно, $F^+ = F_0^{-1}$. Поэтому

$$0 = F^+FQx = F_0^{-1}F_0Qx = Qx .$$

Отсюда вытекает включение $\ker F^+F \subset \ker Q$.

Импликация (а3) $\Rightarrow$ (а9) доказана.

Так как $F^+ = \left(F^*F\right)^+ F^*$ и $F^* = QB^*P$, то включение $\ker P \subset \ker FF^+$ является очевидным. Покажем справедливость обратного включения $\ker FF^+ \subset \ker P$. Пусть $FF^+y = 0$. На подпространстве $\ker A$ оператор F совпадает с оператором F_0 и, следовательно, $F^+ = F_0^{-1}$. Поэтому

$$0 = FF^+Py = F_0F_0^{-1}Py = Py .$$

Отсюда вытекает включение $\ker FF^+ \subset \ker P$.

Импликация (а3) $\Rightarrow$ (а10) доказана.

Доказательства импликаций (а9)$\Rightarrow$(а3), (а10)$\Rightarrow$(а3). Нормальная разрешимость оператора A имеется в каждом из условий (а9) и (а10). Из нормальной разрешимости оператора F вытекает нормальная разрешимость оператора F_0. Отсюда получаем ограниченность псевдообратного оператора F_0^+. Из каждого из равенств (10.12) и (10.13) вытекает, что псевдообратный оператор F_0^+ определен на всем пространстве $\ker A^*$. Следовательно, существует обратный оператор F_0^{-1} и имеет место равенство $F_0^{-1}=F_0^+$. Таким образом, оператор F_0 является ограниченно обратимым.

Импликации (а9) $\Rightarrow$ (а3) и (а10) $\Rightarrow$ (а3) доказаны.

Доказательство импликации (а10) $\Rightarrow$ (а11). Нормальная разрешимость операторов A и F имеется в условии (а10). Докажем, что выражение, находящееся в правой части (10.14), является обратным оператором для оператора $A+\lambda B$. Рассмотрим действие оператора $A+\lambda B$ на правую часть равенства (10.14):

$$(A+\lambda B)\left(\lambda^{-1}F^+ + \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m (TB)^m T\left(BF^+ - E\right)\right) =$$

$$=\lambda^{-1}AF^+ + \left(AT\left(BF^+ - E\right) + BF^+\right) +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m (AT+E)(BT)^m\left(BF^+ - E\right).$$

Доказательство будет завершено, если полученное выражение совпадает с единичным оператором E. Так как $AQ=0$, то имеем

$$AF^+ = AF^*\left(FF^*\right)^+ = AQB^*P\left(FF^*\right)^+ = 0.$$

Так как $T=\left(F^+B-E\right)A^+$ и $AF^+=0$, то в силу равенства (10.13) имеем

$$AT\left(BF^+ - E\right) + BF^+ = A\left(F^+B-E\right)A^+\left(BF^+ - E\right) + BF^+ =$$

$$=\left(AF^+BA^+ - AA^+\right)\left(BF^+ - E\right) + BF^+ =$$

$$=-AA^+\left(BF^+ - E\right) + BF^+ = AA^+ + \left(E - AA^+\right)BF^+ =$$

$$=-P+E+PBF^+ = -P+E+PBQF^+ = -P+E+FF^+ = E;$$

$$(AT+E)BT=\left(A\left(F^{+}B-E\right)A^{+}+E\right)BT=$$

$$=\left(AF^{+}BA^{+}-AA^{+}+E\right)BT=\left(-AA^{+}+E\right)BT=$$

$$=PBT=PB\left(F^{+}B-E\right)A^{+}=PBF^{+}BA^{+}-PBA^{+}=$$

$$=PBQF^{+}BA^{+}-PBA^{+}=FF^{+}BA^{+}-PBA^{+}=$$

$$=\left(FF^{+}-P\right)BA^{+}=0\,.$$

Импликация (a10) $\Rightarrow$ (a11) доказана.

Доказательство импликации (a11) $\Rightarrow$ (a2). Из нормальной разрешимости операторов A и F вытекает ограниченность псевдообратных операторов A^{+} и F^{+}. Поэтому все составляющие операторы правой части равенства (10.14) являются ограниченными. Отсюда получаем равномерную ограниченность семейства $\left\{\lambda(A+\lambda B)^{-1}\right\}$ в области сходимости ряда (10.14).

Импликация (a11) $\Rightarrow$ (a2) доказана.

Доказательство импликации (a3) $\Rightarrow$ (a12). Докажем справедливость равенств

$$\ker A\cap\ker B=\{0\}\,, \tag{10.44}$$

$$R(A)\cap R(BQ)=\{0\}\,, \tag{10.45}$$

$$R(A)+R(BQ)=H\,, \tag{10.46}$$

где сумма в левой части (10.46) обозначает алгебраическую сумму подпространств $R(A)$ и $R(BQ)$.

Докажем равенство (10.44). Пусть $z\in\ker A\cap\ker B$. Из включения $z\in\ker A$ следует $Qz=z$. Отсюда и из включения $z\in\ker B$ следует

$$Bz=0\ \Rightarrow\ PBQz=0\ \Rightarrow\ Fz=0\,.$$

Из полученного равенства и ограниченной обратимости оператора $F:\ker A\to\ker A^{*}$ получаем, что $z=0$.

Докажем равенство (10.45). Пусть $w\in R(A)\cap R(BQ)$. Из включения $w\in R(A)$ следует существование $x\perp\ker A$ такого, что $Ax=w$. Из включения $w \in R(BQ)$ следует существование $y \in \ker A$ такого, что $By = w$. Положим $z_\lambda = \lambda x - y$. Этот элемент удовлетворяет равенству $(A + \lambda B) z_\lambda = \lambda^2 Bx$. В силу импликации (a3)$\Rightarrow$(a2) существует $\rho_0 = \rho_0(A, B) > 0$ такое, что оператор $A + \lambda B$ ограниченно обратимый для каждого λ из $\Lambda_0 = \{\lambda : 0 < |\lambda| \le \rho_0\}$. Если $\lambda \in \Lambda_0$, то $z_\lambda = \lambda^2 (A + \lambda B)^{-1} Bx$. Из равномерной ограниченности семейства $\{\lambda (A + \lambda B)^1 B\}$ (см. доказательство импликации (a1)$\Rightarrow$(a2)) вытекает справедливость предельного соотношения

$$\|z_\lambda\| = |\lambda| \left\| \lambda (A + \lambda B)^{-1} B \right\| \|x\| \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0.$$

С другой стороны, $z_\lambda = \lambda x - y \to -y$ при $\lambda \to 0$. Из этих предельных соотношений получим равенство $y = 0$. Следовательно, $w = By = 0$.

Докажем равенство (10.46). Пусть $f \in H$ – произвольный элемент. Тогда $Pf \in \ker A^*$. Отсюда и ограниченной обратимости оператора $F = PBQ : \ker A \to \ker A^*$ вытекает существование элемента $y \in \ker A$: $Fy = PBQy = PBy = Pf$. Положим

$$g = f - By. \tag{10.47}$$

Так как $Pg = Pf - PBy = 0$, то $g \in \ker P = \overline{R(A)}$. Отсюда и из нормальной разрешимости оператора A вытекает, что $g \in R(A)$. Тогда существует $x \perp \ker A$: $Ax = g$. Отсюда и из (10.47) имеем $Ax = f - By$, то есть $Ax + By = f$. Полученное равенство доказывает справедливость (10.46).

Напомним, что (см. [96]) сумма

$$H_1 + H_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in H_1,\, x_2 \in H_2\}$$

подпространств $H_1 \subset H$ и $H_2 \subset H$ называется **прямой суммой** и обозначается $H_1 \oplus H_2$, если:

1) H_1 и H_2 – замкнутые подпространства;

2) $H_1 \cap H_2 = \{0\}$;

3) $H_1 + H_2 = H$.

Докажем, что вместо двух равенств (10.45) и (10.46) можно записать одну прямую сумму $R(A) \oplus R(BQ) = H$.

Если замкнутость подпространства $R(A)$ следует из нормальной разрешимости оператора A, то замкнутость подпространства $R(BQ)$ следует из ограниченной обратимости оператора $F : \ker A \to \ker A^*$. Действительно, из ограниченной обратимости оператора $F : \ker A \to \ker A^*$ существует постоянная $M > 0$, что $\|Fx\| \geq M\|x\|$ для любого $x \in \ker A$. Из равенства

$$\|Fx\|^2 = \|PBQx\|^2 + \|(E-P)BQx\|^2, \quad x \in \ker A$$

получаем, что

$$\|Bx\|^2 \geq \|PBQx\|^2 = \|Fx\|^2 \geq M^2\|x\|^2, \quad x \in \ker A.$$

Пусть $f_0 \in \overline{R(BQ)}$, $f_k \in R(BQ)$ и $f_k \to f_0$ при $k \to \infty$. Тогда существует $x_k \in \ker A$, что $f_k = Bx_k$. Отсюда и из полученного неравенства имеем

$$\|f_k - f_m\|^2 = \|Bx_k - Bx_m\|^2 = \|B(x_k - x_m)\|^2 \geq M^2\|x_k - x_m\|^2.$$

Следовательно, последовательность $\{x_k\}$ является сходящейся. Если $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$, то $x_0 \in \ker A$ и, переходя к пределу в равенстве $f_k = Bx_k$, получим $f_0 = Bx_0$. Отсюда следует включение $f_0 \in R(BQ)$. Следовательно, $\overline{R(BQ)} = R(BQ)$.

Импликация (a3) $\Rightarrow$ (a12) доказана.

Доказательство импликации (а12) $\Rightarrow$ (а3). Произвольный элемент $z \in H$ однозначно представляется в виде суммы: $z = x + y$, где $x \perp \ker A$, $y \in \ker A$. Определим оператор $C : H \to H$:

$$Cz = Ax + By .$$

Отметим, что оператор $C : H \to H$ а) является ограниченным, б) имеет нулевое ядро: $\ker C = \{0\}$, в) является оператором «на»: $R(C) = H$.

Справедливость а) вытекает из ограниченности операторов A и B .

Если $Cz = 0$, то $Ax + By = 0$, где $z = x + y$. $x \perp \ker A$, $y \in \ker A$. Отсюда и из (10.45), во-первых, получаем, что $Ax = 0$ и, следовательно, $x = 0$, во-вторых $By = 0$ то есть $y \in \ker B$. Так как $y \in \ker A$ и $y \in \ker B$, то из (10.44) вытекает, что $y = 0$. Следовательно, $z = 0$. Справедливость б) доказана.

Справедливость в) вытекает из условия (10.46).

Так как оператор $C : H \to H$ удовлетворяет условиям а), б) и в), то в силу теоремы Банаха [43] он ограниченно обратимый, то есть существует $M > 0$, что

$$\left\| C^{-1} w \right\| \le M \left\| w \right\| \quad \text{для всех } w \in H . \tag{10.48}$$

Пусть $w \in H$ – произвольный элемент. Тогда в силу (10.46) существуют $u \in R(A)$ и $v \in R(BQ)$ такие, что $w = u + v$. Положим $z = C^{-1} w$. Поэтому

$$z = C^{-1} u + C^{-1} v . \tag{10.49}$$

Сужение оператора $C^{-1} : H \to H$ на $R(A)$ и $R(BQ)$ обозначим A_0^{-1} и B_0^{-1}, соответственно:

$$A_0^{-1} = C^{-1}\Big|_{R(A)}, \qquad B_0^{-1} = C^{-1}\Big|_{R(BQ)} . \tag{10.50}$$

Из (10.49), в силу обозначений (10.50), имеем

$$z = A_0^{-1} u + B_0^{-1} v .$$

Отсюда и из (10.48) будем иметь

$$\left\|A_0^{-1}u\right\| \le M\left\|u\right\|, \qquad \left\|B_0^{-1}v\right\| \le M\left\|v\right\|. \tag{10.51}$$

Пусть $u_0 \in \overline{R(A)}$. Тогда существует последовательность $u_k \in R(A)$, что $u_k \to u_0$ при $k \to \infty$. Положим $x_k = A_0^{-1}u_k$. Из (10.51) следует сходимость последовательности $\{x_k\}$. Пусть $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$. Тогда из ограниченности оператора A получаем, что $Ax_k \to Ax_0$ при $k \to \infty$. Так как $Ax_k = u_k$ и $u_k \to u_0$ при $k \to \infty$, то $Ax_0 = u_0$. Отсюда вытекает справедливость включения $u_0 \in R(A)$. Нормальная разрешимость оператора A доказана.

Докажем ограниченную обратимость оператора F_0, действующего из $\ker A$ в $\ker A^*$. Пусть $y \in \ker A$ и $F_0 y = 0$. Тогда $PBy = 0$ и, следовательно,

$$By \in \ker P = \overline{R(A)} = R(A). \tag{10.52}$$

С другой стороны, $By = BQy \in R(BQ)$. Отсюда и из (10.52), в силу (10.45), получаем равенство $By = 0$. Следовательно, $y \in \ker B$. Отсюда, из включения $y \in \ker A$, в силу (10.44), получаем равенство $y = 0$. Поэтому $\ker F\big|_{\ker A} = \{0\}$.

Пусть теперь $f \in \ker A^*$ – произвольный элемент. Тогда $Pf = f$. Согласно условию (10.46), существуют элементы $x \perp \ker A$ и $y \in \ker A$ такие, что $f = Ax + By$. Отсюда $f = Pf = PAx + PBy = PBQy = F_0 y$. Это равенство означает, что $F_0 : \ker A \to \ker A^*$ является отображением «на».

Таким образом, оператор $F_0 : \ker A \to \ker A^*$ является ограниченным, взаимно однозначным и «на». Тогда в силу теоремы Банаха [43] существует ограниченный обратный оператор $F_0^{-1} : \ker A^* \to \ker A$.

Импликация (a12) $\Rightarrow$ (a3) доказана.

Теорема 10.1 доказана.

Полноту доказательства теоремы 10.1 приведем в следующей диаграмме № 1.

10.6. Доказательство теорем 10.2-10.4.

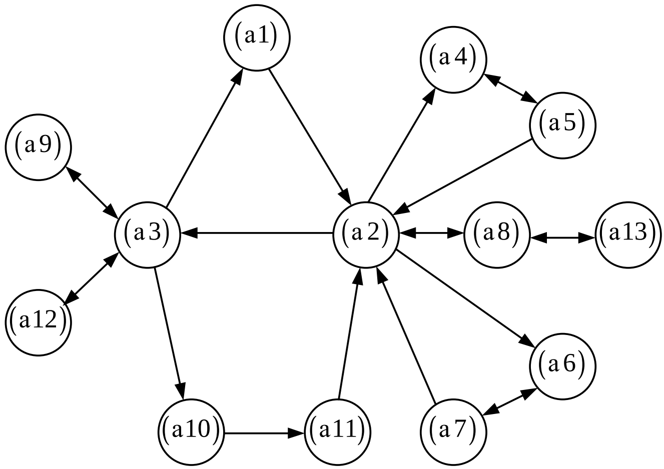
Доказательство теорем 10.2. Условие (a8) для уравнений (10.19) и (10.20) имеет такое же значение, что и условие (a3) для уравнений (10.1) и (10.2). В силу теоремы 10.1 условия (a3) и (a8) являются эквивалентными. Тогда из эквивалентности условий (a1) и (a3) вытекает справедливость утверждения теоремы.

Теорема 10.2 доказана.

Доказательство теорем 10.3. Пусть семейство (10.2) является регуляризацией сдвигом ОУ (10.1). В силу теоремы 10.1 вытекает справедливость условия (a3). Тогда оператор F_0 является отображением, осуществляющим взаимно однозначное соответствие между ядрами $\ker A$ и $\ker A^*$.

Теорема 10.3 доказана.

Диаграмма № 1



Доказательство теоремы 10.4. Пусть $\{e_n\}$ и $\{g_n\}$ – ортонормированные базисы в $\ker A$ и $\ker A^*$, соответственно. Тогда в качестве оператора B можно брать оператор, сопоставляющий элементу $e_n \in \ker A$ элемент $g_n \in \ker A^*$ и продолженный нулем на ортогональном дополнении к $\ker A$:

$$Be_n = g_n \quad \forall e_n \in \ker A \quad \text{и} \quad Bx = 0 \quad \forall x \perp \ker A.$$

Теорема 10.4 доказана.

11. АНАЛОГ РАНГОВОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ

Пусть A – квадратная матрица порядка n и ее ранг равен $r : r < n$. Пусть она представлена в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{11.1}$$

где A_{11}, A_{22} – квадратные матрицы порядка r и $n-r$, соответственно. Если матрица A_{11} – неособенная, то есть

$$\det A_{11} \neq 0, \tag{11.2}$$

а матрица A_{22} представляется равенством

$$A_{22} = A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}, \tag{11.3}$$

то матрицу A_{11} назовем **ранговой матрицей** матрицы A. Вообще представление матрицы A в виде (11.1) с ранговой матрицей A_{11} не является однозначным.

Естественной является задача обобщения этого представления для линейного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве H.

Пусть $A: H \to H$ – ограниченный и нормально разрешимый оператор. Тогда пространство H можно представить в виде прямых ортогональных сумм

$$H = R\left(A^*\right) \oplus \ker A, \qquad \left(R\left(A^*\right) = (\ker A)^{\perp}\right),$$

$$H = R(A) \oplus \ker A^*, \qquad \left(R(A) = \left(\ker A^*\right)^{\perp}\right).$$

Пусть наряду с этими представлениями пространство H представлено как прямые суммы (необязательно ортогональные)

$$H = H_1 \oplus H_0, \qquad H = F_1 \oplus F_0, \tag{11.4}$$

такие, что операторы

$$E - Q: H_1 \to R\left(A^*\right), \qquad Q: H_0 \to \ker A, \tag{11.5}$$

$$E - P: F_1 \to R(A), \qquad P: F_0 \to \ker A^* \tag{11.6}$$

являются взаимно однозначными отображениями и «на». Здесь Q и P – ортогональные проекторы на подпространства $\ker A$ и $\ker A^*$ соответственно. Прямые суммы (11.4) порождают проекторы (вообще говоря, неортогональные)

$$Q_1: H \to H_1, \qquad Q_0: H \to H_0,$$

$$P_1: H \to F_1, \qquad P_0: H \to F_0,$$

определенные следующим образом:

- если $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in H_1$, $x_0 \in H_0$,

  то $\quad Q_1 x = x_1, \qquad Q_0 x = x_0,$

- если $f = f_1 + f_0$, где $f_1 \in F_1$, $f_0 \in F_0$,

  то $\quad P_1 f = f_1, \qquad P_0 f = f_0.$

Наконец, сформулируем основное предположение. Проекторы $Q_1,\, Q_0 = E - Q_1,\, P_1,\, P_0 = E - P_1$, как линейные операторы, действующие в соответствующих пространствах

$$Q_1 = E - Q_0 : R\left(A^*\right) \to H_1, \qquad Q_0 : \ker A \to H_0\,, \tag{11.7}$$

$$P_1 = E - P_0 : R(A) \to F_1, \qquad P_0 : \ker A^* \to F_0\,, \tag{11.8}$$

являются взаимно однозначными и «на».

Если операторы (11.5)-(11.8) являются взаимно однозначными отображениями и «на», то подпространства H_1, H_0, F_1, F_0 назовем **порождающей четверкой.**

Примером порождающей четверки для любого ограниченного и нормально разрешимого оператора $A: H \to H$ является

$$H_1 = R\left(A^*\right) = (\ker A)^{\perp}, \quad H_0 = \ker A,$$

$$F_1 = R(A) = \left(\ker A^*\right)^{\perp}, \quad F_0 = \ker A^*.$$

Эту порождающую четверку назовем **естественной.**

Пусть H_1, H_0, F_1, F_0 – порождающая четверка. Полагая

$$A_{ij} = P_i A Q_j : H_j \to F_i, \qquad i,\ j = 0,\ 1, \tag{11.9}$$

оператор A представим в матричной форме

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{10} \\ A_{01} & A_{00} \end{bmatrix}. \tag{11.10}$$

Если H_1, H_0, F_1, F_0 – естественная порождающая четверка, то $A_{10} = 0,\ A_{01} = 0,\ A_{00} = 0$ и, следовательно,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Каждая порождающая четверка определяет одно матричное представление (11.10) оператора A. Так как пространство H можно представить прямыми суммами (11.4) различными порождающими четверками, то матричное представление оператора A не является однозначным.

Справедлива следующая

Лемма 11.1. ***Пусть*** H_1, H_0, F_1, F_0 ***– порождающая четверка. Тогда оператор*** $A_{11} = P_1 A Q_1 : H_1 \to F_1$ ***является ограниченно обратимым.***

Доказательство. Покажем, что ядро оператора A_{11} состоит только из нулевого элемента:

$$\ker A_{11} = \{0\}. \tag{11.11}$$

Пусть $A_{11} x_1 = 0$, где $x_1 \in H_1$. Тогда

$$P_1 A Q_1 x_1 = 0. \tag{11.12}$$

Так как $x_1 \in H_1$, то $Q_1 x_1 = x_1$ и, следовательно, равенство (11.12) принимает вид $P_1 A x_1 = 0$. Из взаимной однозначности оператора $P_1 : R(A) \to F_1$ и включения $A x_1 \in R(A)$ имеем

$$A x_1 = 0. \tag{11.13}$$

Отсюда вытекает включение $x_1 \in \ker A$. Оператор AQ является нулевым во всем пространстве. Поэтому равенство (11.13) можно записать в виде

$$A(E - Q) x_1 = 0. \tag{11.14}$$

Так как $E - Q$ является ортогональным проектором на $(\ker A)^{\perp}$, то $(E - Q) x_1 \in (\ker A)^{\perp}$. Отсюда и из (11.14) вытекает равенство $(E - Q) x_1 = 0$. Оператор $E - Q : H_1 \to R(A^*)$ действует взаимно однозначно. Поэтому из равенства $(E - Q) x_1 = 0$ получаем равенство $x_1 = 0$. Равенство (11.11) доказано.

Докажем, что оператор A_{11} является отображением «на»:

$$A_{11}H_1 = F_1. \tag{11.15}$$

Так как $Q_1 : H \to H_1$ является проектором, то из первого из (11.4) имеем

$$Q_1 H_1 = H_1. \tag{11.16}$$

Оператор AQ является нулевым, а $E - Q : H_1 \to R\left(A^*\right)$ является отображением «на». Поэтому имеем

$$AH_1 = A(E-Q)H_1 = AR\left(A^*\right) = R(A). \tag{11.17}$$

Наконец, из того, что оператор $P_1 : R(A) \to F_1$ является взаимно однозначным отображением и действует «на»,

$$P_1 R(A) = F_1. \tag{11.18}$$

Из (11.16)-(11.18) вытекает справедливость равенства (11.15).

Таким образом, мы доказали, что оператор A_{11} является взаимно однозначным отображением из H_1 на пространство F_1. Поэтому, в силу теоремы Банаха [43], существует обратный оператор $A_{11}^{-1} : F_1 \to H_1$ и является ограниченным.

Лемма 11.1 доказана.

Пусть $x_0 \in \ker A$ – произвольный элемент. В силу разложения $H = H_1 \oplus H_0$, имеем $x_0 = z_1 + z_0$, где $z_1 = Q_1 x_0 \in H_1$, $z_0 = Q_0 x_0 \in H_0$. Запишем равенство $Ax_0 = 0$ в виде системы:

$$\begin{cases} A_{11}z_1 + A_{10}z_0 = 0, \\ A_{01}z_1 + A_{00}z_0 = 0, \end{cases} \tag{11.19}$$

где операторы A_{ij} определены в (11.9). Так как A_{11} – ограниченно обратимый оператор, то, «умножив» первое уравнение системы (11.19) на $-A_{01}A_{11}^{-1}$ и прибавив ко второму, получим

$$\left(A_{00} - A_{01}A_{11}^{-1}A_{10}\right)z_0 = 0. \tag{11.20}$$

Полученное равенство имеет место для всех $z_0 = Q_0 x_0$, $x_0 \in \ker A$. Заметим, что оператор $A_{00} - A_{01} A_{11}^{-1} A_{10}$ действует в пространстве H_0, а множество $\{z_0 = Q_0 x_0 : x_0 \in \ker A\}$ совпадает с пространством H_0. Из этого замечания и равенства (11.20) будем иметь $A_{00} - A_{01} A_{11}^{-1} A_{10} = 0$, то есть

$$A_{00} = A_{01} A_{11}^{-1} A_{10} . \qquad (11.21)$$

Следовательно, нами доказана

Лемма 11.2. ***Пусть*** H_1, H_0, F_1, F_0 ***– порождающая четверка. Тогда справедливо равенство*** **(11.21).**

Равенство (11.21) является аналогом равенства (11.3) для бесконечномерного случая. Таким образом, для оператора A получено представление (11.10), (11.9), для которого имеют место оба соотношения, аналогичные (11.2) и (11.3). Это означает, что оператор A_{11} обладает всеми свойствами ранговой матрицы, введенного для матриц, что дает возможность вводить аналогичное понятие и для оператора. Ограниченно обратимый оператор

$$A_{11} = P_1 A Q_1 : H_1 \to F_1, \qquad (11.22)$$

для которого имеет место равенство (11.21), назовем **ранговым оператором** оператора $A : H \to H$, соответствующим порождающей четверке H_1, H_0, F_1, F_0.

Наряду с ОУ (11.19) рассмотрим параметрическое семейство ОУ $Ax + \lambda Bx = f$. Полагая $B_{ij} = P_i B Q_j$, $i, j = 0, 1$, оператор $B : H \to H$ можно представить в матричной форме

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{10} \\ B_{01} & B_{00} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим матричную форму оператора $A+\lambda B$. Для удобства записи введем обозначение

$$A+\lambda B=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{10} \\ C_{01} & C_{00} \end{bmatrix},$$

где $C_{ij}=C_{ij}(\lambda)\equiv A_{ij}+\lambda B_{ij}, \qquad j,\ j=0,\ 1.$

Если A_{11} – ранговый оператор оператора A, то оператор $C_{11}(\lambda)\equiv A_{11}+\lambda B_{11}$ является ограниченно обратимым для любого оператора B_{11} и параметра λ, удовлетворяющего условию $|\lambda|\left\|A_{11}^{-1}B_{11}\right\|\le\rho_0<1$. Для обратного оператора

$$C_{11}^{-1}(\lambda)=\left(A_{11}+\lambda B_{11}\right)^{-1}$$

справедлива оценка

$$\left\|C_{11}^{-1}(\lambda)\right\|=\left\|\left(A_{11}+\lambda B_{11}\right)^{-1}\right\|\le M_{11},$$

где $M_{11}=\left\|A_{11}^{-1}\right\|\left(1-\rho_0\right)^{-1}$. При этом справедливо представление

$$C_{11}^{-1}(\lambda)=A_{11}^{-1}-\lambda C_{11}^{-1}(\lambda)B_{11}A_{11}^{-1},$$

из которого вытекает оценка

$$\left|C_{11}^{-1}(\lambda)-A_{11}^{-1}\right|\le|\lambda|M_{11}\left\|B_{11}A_{11}^{-1}\right\|.$$

Предполагая дополнительно обратимость оператора $A+\lambda B$ при $\lambda\in\Lambda_0$, для обратного оператора $(A+\lambda B)^{-1}$ получим представление, аналогичное формуле Фробениуса (см. [25], стр. 59) для обращения блочной матрицы:

$$(A+\lambda B)^{-1}=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{10} \\ D_{01} & D_{00} \end{bmatrix}, \tag{11.23}$$

где
$$D_{11}=D_{11}(\lambda)\equiv C_{11}^{-1}+$$
$$+C_{11}^{-1}C_{10}\left(C_{00}-C_{01}C_{11}^{-1}C_{10}\right)^{-1}C_{01}C_{11}^{-1}, \qquad (11.24)$$
$$D_{10}=D_{11}(\lambda)\equiv -C_{11}^{-1}C_{10}\left(C_{00}-C_{01}C_{11}^{-1}C_{10}\right)^{-1}, \qquad (11.25)$$
$$D_{01}=D_{01}(\lambda)\equiv -\left(C_{00}-C_{01}C_{11}^{-1}C_{10}\right)^{-1}C_{01}C_{11}^{-1}, \qquad (11.26)$$
$$D_{00}=D_{00}(\lambda)\equiv\left(C_{00}-C_{01}C_{11}^{-1}C_{10}\right)^{-1}. \qquad (11.27)$$

Тот факт, что оператор, определенный равенствами (11.23)-(11.27), является обратным для оператора $A+\lambda B$, проверяется непосредственным вычислением.

Лемма 11.3. ***Пусть оператор*** $T:H\to H$ ***линейный ограниченный, а семейство линейных операторов*** $S_\lambda:H\to H$, $\lambda\in\Lambda_0$ ***равномерно ограниченное:*** $\|T\|\le M_1$, $\|S_\lambda\|\le M_2$, $\lambda\in\Lambda_0$. ***Тогда для существования обратных операторов*** $\left(T+\lambda S_\lambda\right)^{-1}$ ***и равномерной ограниченности семейства*** $\left\{\left(T+\lambda S_\lambda\right)^{-1}\right\}$, $\lambda\in\Lambda_0$***:***
$$\left\|\left(T+\lambda S_\lambda\right)^{-1}\right\|\le M,\quad \lambda\in\Lambda_0, \qquad (11.28)$$
необходимо и достаточно ограниченная обратимость оператора T ***.***

Доказательство. Необходимость. Пусть существуют обратные операторы $\left(T+\lambda S_\lambda\right)^{-1}$ и семейство $\left\{\left(T+\lambda S_\lambda\right)^{-1}\right\}$, равномерно ограниченное. Докажем ограниченную обратимость оператора T .

Покажем, что ядро T состоит только из нулевого элемента:
$$\ker T=\{0\}. \qquad (11.29)$$

Действительно, пусть $Tx_0 = 0$. Тогда $\left(T + \lambda S_\lambda\right)x_0 = \lambda S_\lambda x_0$ и, следовательно, $x_0 = \lambda\left(T + \lambda S_\lambda\right)^{-1} S_\lambda x_0$, $\lambda \in \Lambda_0$. Переходя к пределу в полученном равенстве и принимая во внимание (11.28), получим $x_0 = 0$. Равенство (11.29) доказано.

Покажем, что образ оператора T совпадает со всем пространством

$$R(T) = H . \tag{11.30}$$

Действительно, пусть $f \in H$ – произвольный элемент. Рассмотрим уравнение $\left(T + \lambda S_\lambda\right)x = f$. Положим $x_\lambda = \left(T + \lambda S_\lambda\right)^{-1} f$, $\lambda \in \Lambda_0$. Из (11.28) следует ограниченность семейства $\left\{x_\lambda\right\}$, $\lambda \in \Lambda_0$. Пусть $\left\{\lambda_n\right\}$ – произвольная сходящаяся к нулю последовательность: $\lambda_n \to 0 \; (n \to \infty)$. Тогда из последовательности $\left\{x_{\lambda_n}\right\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности будем считать, что сама последовательность $\left\{x_{\lambda_n}\right\}$ сходится слабо к некоторому элементу $x_0 \in H$. Переходя к пределу (в слабом смысле) при $n \to \infty$ в тождестве $\left(T + \lambda_n S_{\lambda_n}\right)x_{\lambda_n} = f$, $(n \in \mathbb{N})$, получим $Tx_0 = f$. Отсюда следует включение $f \in R(T)$. Равенство (11.30) доказано.

Из равенств (11.29) и (11.30) в силу теоремы Банаха [43] вытекает ограниченная обратимость оператора $T : H \to H$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $T : H \to H$ – ограниченно обратимый оператор. Докажем существование числа $\rho_0 > 0$ такого, что при $0 < |\lambda| \le \rho_0$ семейство $\left\{\left(T + \lambda S_\lambda\right)^{-1}\right\}$ является равномерно ограниченным.

Действительно, пусть $\rho_0 > 0$ удовлетворяет условию $\rho_0 \left\|T^{-1}\right\| M_2 < 1$. Очевидно, что при $0 < |\lambda| \le \rho_0$ выполняется неравенство

$$\left\{\left(T + \lambda S_\lambda\right)^{-1}\right\} \left\|\lambda T^{-1} S_\lambda\right\| \le |\lambda| \left\|T^{-1}\right\| \left\|S_\lambda\right\| \le \rho_0 \left\|T^{-1}\right\| M_2 < 1 .$$

Поэтому оператор $E+\lambda T^{-1}S_\lambda$ ограниченно обратимый, и имеет место оценка

$$\left\|\left(E+\lambda T^{-1}S_\lambda\right)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-\rho_0\left\|T^{-1}\right\|M_2}.$$

Отсюда будем иметь

$$\left\|\left(T+\lambda S_\lambda\right)^{-1}\right\|\le\frac{\left\|T^{-1}\right\|}{1-\rho_0\left\|T^{-1}\right\|M_2}.$$

Достаточность доказана. Лемма 11.3 доказана.

Лемма 11.4. ***Пусть*** H_1, H_0, F_1, F_0 ***– порождающая четверка. Тогда для равномерной ограниченности семейства*** $\{\lambda D_{00}(\lambda)\}$

$$\left\|\lambda D_{00}(\lambda)\right\|\le N_{00},\tag{11.31}$$

необходимо и достаточно ограниченная обратимость оператора

$$D_1\equiv B_{00}-A_{01}A_{11}^{-1}B_{10}-B_{01}A_{11}^{-1}A_{10}+A_{01}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{10}.\tag{11.32}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство $\{\lambda D_{00}(\lambda)\}$ равномерно ограниченное. Докажем ограниченную обратимость D_1.

Нетрудно проверить справедливость тождества

$$D_{00}(\lambda)=\left(D_0+\lambda D_1-\lambda^2D_2(\lambda)\right)^{-1},$$

где

$$D_0=A_{00}-A_{01}A_{11}^{-1}A_{10},$$

$$D_2(\lambda)=\Big(B_{01}C_{11}^{-1}B_{10}-A_{01}C_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}B_{10}-B_{01}C_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{10}+$$

$$+A_{01}C_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{10}\Big)^{-1},\tag{11.33}$$

причем

$$\left\|D_2(\lambda)\right\|\le M_2.\tag{11.34}$$

Так как A_{11} – ранговый оператор оператора A, то имеет место равенство (11.21). Тогда $D_0 = 0$ и поэтому для оператора $\lambda D_{00}(\lambda)$ получим представление

$$\lambda D_{00}(\lambda) = \left(D_1 - \lambda D_2(\lambda)\right)^{-1}. \quad (11.35)$$

Отсюда и из неравенств (11.31) и (11.34) для достаточно малых $|\lambda| > 0$ получаем оценку $\left\|D_1^{-1}\right\| \le N_1$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть оператор D_1 ограниченно обратимый: $\left\|D_1^{-1}\right\| \le N_1$. Докажем существование $\rho_0 > 0$, что при $0 < |\lambda| \le \rho_0$ семейство $\left\{\lambda D_{00}(\lambda)\right\}$ равномерно ограниченное.

Используем представление (11.35). Так как

$$\left(D_1 - \lambda D_2(\lambda)\right)^{-1} = \left(E - \lambda D_1^{-1} D_2(\lambda)\right)^{-1} D_1^{-1},$$

то при $|\lambda|\left\|D_1^{-1}\right\| M_2 \le \rho_0 < 1$ получим оценку

$$\left\|\left(D_1 - \lambda D_2(\lambda)\right)^{-1}\right\| \le \frac{\left\|D_1^{-1}\right\|}{1-\rho_0}.$$

Достаточность доказана. Лемма 11.4 доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 11.1. ***Для равномерной ограниченности семейства*** $\left\{\lambda(A+\lambda B)^{-1}\right\}$, $\lambda \in \Lambda_0$ ***необходимо ограниченная обратимость оператора*** **(11.32)** ***для любой порождающей четверки и достаточно – хотя бы для одной.***

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство операторов $\left\{\lambda(A+\lambda B)^{-1}\right\}$ равномерно ограниченное, а H_1, H_0, F_1, F_0 – произвольная порождающая четверка. Докажем ограниченную обратимость оператора (11.32). Согласно лемме 11.1 оператор A_{11} является ограниченно обратимым.

Для обратной матрицы $(A+\lambda B)^{-1}$ получено представление (11.23)-(11.27). Из равномерной ограниченности семейства $\left\{\lambda(A+\lambda B)^{-1}\right\}$, $\lambda \in \Lambda_0$ следует равномерная ограниченность семейств $\left\{\lambda D_{ij}(\lambda)\right\}$, $\lambda \in \Lambda_0$ для всех $i,\ j=0,1$. Тогда, согласно лемме 11.3, получим ограниченную обратимость оператора (11.32). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для некоторой порождающей четверки H_1, H_0, F_1, F_0 оператор, определенный равенством (11.32), является ограниченно обратимым. Докажем существование числа $\rho_0>0$ такого, что при $\lambda \in \Lambda_0=\left\{\lambda: 0<|\lambda| \le \rho_0\right\}$ оператор $A+\lambda B$ имеет обратный, а семейство $\left\{\lambda(A+\lambda B)^{-1}\right\}$ является равномерно ограниченным.

Согласно лемме 11.1 оператор A_{11} является ограниченно обратимым. Число $\rho_1>0$ выберем из условия

$$\rho_1\left\|A_{11}^{-1}B_{11}\right\|<1.$$

Тогда для любого $\lambda: 0<|\lambda| \le \rho_1$ оператор $E+\lambda A_{11}^{-1}B_{11}$ является ограниченно обратимым. Тогда и оператор $C_{11}=A_{11}+\lambda B_{11}$ является ограниченно обратимым. При этом справедливы оценки

$$\left\|\left(E+\lambda A_{11}^{-1}B_{11}\right)^{-1}\right\|<\frac{1}{1-\rho_1\left\|A_{11}^{-1}B_{11}\right\|},$$

$$\left\|\left(A_{11}+\lambda B_{11}\right)^{-1}\right\|<\frac{\left\|A_{11}^{-1}\right\|}{1-\rho_1\left\|A_{11}^{-1}B_{11}\right\|}.$$

Рассмотрим оператор $D_1-\lambda D_2(\lambda)$, где операторы D_1 и $D_2(\lambda)$ определены в (11.32) и (11.33), причем для $D_2(\lambda)$ имеет место оценка (11.34). По условию оператор D_1 ограниченно обратимый. Поэтому существует $N_1>0$ такое, что $\left\|D_1^{-1}\right\|\le N_1$. Если число $\rho_2>0$ удовлетворяет неравенству $\rho_2 N_1 M_2<1$, то при $\lambda\in\Lambda_0$, где $\rho_0=\min\{\rho_1,\rho_2\}$, оператор $D_1-\lambda D_2(\lambda)$ ограниченно обратимый. Действительно, из условия $\lambda\in\Lambda_0$ получаем ограниченную обратимость оператора $E-\lambda D_1^{-1}D_2(\lambda)$ и отсюда ограниченную обратимость оператора $D_1-\lambda D_2(\lambda)$, причем

$$\left\|\left(E-\lambda D_1^{-1}D_2(\lambda)\right)^{-1}\right\|<\frac{1}{1-\rho_0 N_1 M_2},$$

$$\left\|\left(D_1-\lambda D_2(\lambda)\right)^{-1}\right\|<\frac{N_1}{1-\rho_0 N_1 M_2}. \qquad (11.36)$$

Имеет место представление

$$C_{00}-C_{01}C_{11}^{-1}C_{10}=\lambda\left(D_1-\lambda D_2(\lambda)\right).$$

Отсюда получаем обратимость $C_{00}-C_{01}C_{11}^{-1}C_{10}$, а из (11.36) – оценку:

$$\left\|\left(C_{00}-C_{01}C_{11}^{-1}C_{10}\right)^{-1}\right\|<\frac{N_1|\lambda|^{-1}}{1-\rho_0 N_1 M_2}.$$

Следовательно, семейство $\{\lambda D_{00}(\lambda)\}$, $\lambda\in\Lambda_0$ является равномерно ограниченным. Отсюда и из равенств (11.24)-(11.26) вытекает равномерная ограниченность семейств $\{\lambda D_{11}(\lambda)\}$, $\{\lambda D_{10}(\lambda)\}$, $\{\lambda D_{01}(\lambda)\}$, $\lambda\in\Lambda_0$, а из (11.23) вытекает равномерная ограниченность семейств $\left\{\lambda(A+\lambda B)^{-1}\right\}$. Достаточность доказана.

Теорема 11.1 доказана.

12. ЗАДАЧА С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ДАННЫМИ

12.1. Формулировка задачи. Рассмотрим задачу регуляризации сдвигом, когда вместо точных данных A, B, f известны их приближения $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{f}$, связанные с точными данными соотношениями

$$\left\|\tilde{A}-A\right\| \le \mu, \quad \left\|\tilde{B}-B\right\| \le \nu, \quad \left\|\tilde{f}-f\right\| \le \delta \left\|f\right\|, \tag{12.1}$$

где $\mu \ge 0, \nu \ge 0, \delta \ge 0$ – известные величины (погрешности аппроксимации). Таким образом, вместо точных ОУ (операторных уравнений)

$$Ax = f\,, \tag{12.2}$$

$$\left(A+\lambda B\right)x = f\,, \tag{12.3}$$

даны их приближения $\tilde{A}x = \tilde{f}$ и

$$\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)x = \tilde{f}\,. \tag{12.4}$$

Будем предполагать, что семейство ОУ (12.3) является регуляризацией сдвигом ОУ (12.2). Через x_λ обозначим решение уравнения (12.3). Тогда $x_\lambda \to x_0$ при $\lambda \to 0$, где x_0 – решение ОУ (12.2): $Ax_0 = f$. Предметом настоящего исследования является выявление условий, при выполнении которых:

1) ОУ (12.4) будет иметь единственное решение

$$\tilde{x}_\lambda = \tilde{x}_\lambda\left(\tilde{f}, \tilde{A}, \tilde{B}\right) = \left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1}\tilde{f}$$

для всех $\lambda \in \Lambda_0$ и приближенных данных $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{f}$;

2) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\lambda\to 0}\tilde{x}_\lambda = x_0\,; \tag{12.5}$$

3) можно получить оценку скорости сходимости предельного соотношения (12.5).

Пусть H_1, H_0, F_1, F_0 – произвольная порождающая четверка. Тогда точные данные A, B, f представляются в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{10} \\ A_{01} & A_{00} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{10} \\ B_{01} & B_{00} \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix},$$

а приближенные данные $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{f}$ – в виде

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{10} \\ \tilde{A}_{01} & \tilde{A}_{00} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{10} \\ \tilde{B}_{01} & \tilde{B}_{00} \end{bmatrix}, \quad \tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_0 \end{bmatrix}.$$

Существует число $k = k\left(H_1, H_0, F_1, F_0\right)$, позволяющее записать соотношения (12.1) в виде

$$\begin{gathered} \left\| \tilde{A}_{ij} - A_{ij} \right\| \le k\mu, \quad \left\| \tilde{B}_{ij} - B_{ij} \right\| \le k\nu, \\ \left\| \tilde{f}_i - f_i \right\| \le k\delta \| f \|, \quad i, j = 0,1 \end{gathered}. \tag{12.6}$$

12.2. Основные результаты. В данном пункте приведены формулировки основных результатов. Положим

$$T_1 = B_{00} - A_{01}A_{11}^{-1}B_{10} - B_{01}A_{11}^{-1}A_{10} + A_{01}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{10}. \tag{12.7}$$

Справедлива

Теорема 12.1. ***Пусть выполнено условие***

$$|\lambda| \to 0, \quad \frac{\mu}{|\lambda|} \to 0, \quad \nu \to 0. \tag{12.8}$$

Тогда для равномерной ограниченности семейства операторов $\left\{ \lambda\left(\tilde{A} + \lambda\tilde{B}\right)^{-1} \right\}$, $\lambda \in \Lambda_0$ ***необходимо и достаточно ограниченная обратимость оператора*** $T_1 : H_1 \to F_1$.

Доказательство теоремы 12.1 приведено в пункте 12.4.

В условиях теоремы 12.1 предполагается, что погрешность оператора $\tilde{A}$, то есть величина μ, является бесконечно малой более высокого порядка по отношению параметра регуляризации λ, то есть $\mu/|\lambda|\to 0$ при $\lambda\to 0$. Погрешность оператора $\tilde{B}$ – величина ν является произвольной бесконечно малой. Для того чтобы и величина μ являлась произвольной бесконечно малой, то есть не требовать выполнение соотношения $\mu/|\lambda|\to 0$ при $\lambda\to 0$, нужно выполнение дополнительного условия. Сформулируем это условие.

Будем предполагать, что известна линейная часть погрешности оператора $\tilde{A}$. Пусть имеют место представления

$$\tilde{A}_{ij}-A_{ij}=\mu A'_{ij}+o(\mu),\qquad i,\ j=0,1, \tag{12.9}$$

где $A'_{ij}:H_j\to F_i$, $i,\ j=0,1$ – произвольные линейные ограниченные операторы. Положим

$$T=A'_{00}-A_{01}A_{11}^{-1}A'_{10}-A'_{01}A_{11}^{-1}A_{10}+A_{01}A_{11}^{-1}A'_{11}A_{11}^{-1}A_{10}.$$

Очевидно, что оператор T действует из пространства H_1 в F_1.

Теорема 12.2. ***Пусть*** $|\lambda|=\mu\to 0$, $\nu\to 0$***. Тогда для существования предела*** $\lambda\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1}\to D$ ***и ограниченности оператора*** $D:H_1\to F_1$ ***необходимо и достаточно ограниченная обратимость оператора*** $T_1:H_1\to F_1$ ***и выполнение равенства*** $T=0$**.**

Доказательство теоремы 12.2 приведено в пункте 12.4.

Оба условия, составляющие теорему 12.2, являются более жесткими по сравнению с соответствующими условиями теоремы 12.1. Так, если доказательство достаточности теоремы 12.1 состоит только из установления ограниченной обратимости оператора $T_1:H_1\to F_1$, то в доказательстве достаточности теоремы 12.2 дополнительно доказывается равенство $T=0$; если доказательство необходимости теоремы 12.1 состоит только из установления равномерной ограниченности семейства $\left\{\lambda\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1}\right\}$, $\lambda\in\Lambda_0$, то в доказательстве необходимости теоремы 12.2 доказывается сходимость этого семейства и ограниченность предельного оператора. Это связано с тем, что величина μ в теореме 12.1 является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с параметром регуляризации λ: $\mu=o(\lambda)$, а в теореме 12.2 величина μ имеет такой же порядок, что и параметр регуляризации λ: $\mu=|\lambda|$. Следующее утверждение является нечто средним между этими теоремами. В ней порядок малости величины μ и параметра регуляризации λ равны и связаны соотношением $\mu\le\varepsilon|\lambda|$, где ε – фиксированное число из промежутка $\left[0,\varepsilon_0\right]$, $\varepsilon_0>0$ – некоторое число.

Положим

$$\tilde{T}_2=\left(\tilde{A}_{00}-A_{00}\right)-A_{01}A_{11}^{-1}\left(\tilde{A}_{10}-A_{10}\right)-\left(\tilde{A}_{01}-A_{01}\right)A_{11}^{-1}A_{10}+$$
$$+A_{01}A_{11}^{-1}\left(\tilde{A}_{11}-A_{11}\right)A_{11}^{-1}A_{10}. \tag{12.10}$$

Тогда из (12.6) и ограниченности операторов A_{01}, A_{11} и A_{11}^{-1} вытекает существование числа $m_2>0$, такого, что

$$\left\|\tilde{T}_2\right\|\le m_2\mu. \tag{12.11}$$

Теорема 12.3. ***Пусть выполнено условие***

$$|\lambda|\to 0,\quad \mu\le\varepsilon|\lambda|,\quad \nu\to 0, \tag{12.12}$$

где $\varepsilon\in\left[0,\varepsilon_0\right]$ ***– произвольное, а*** ε_0 ***– некоторое достаточно малое положительное число. Тогда для равномерной ограниченности семейства операторов*** $\left\{\lambda\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1}\right\}$, $\lambda\in\Lambda_0$ ***необходимо и достаточно ограниченная обратимость оператора*** $T_1:H_1\to F_1$.

Доказательство теоремы 12.3 приведено в пункте 12.4.

Предполагая обратимость оператора $\tilde{A}+\lambda\tilde{B}$ для всех λ из промежутка $\left(0,\rho_0\right]$, где $\rho_0>0$ – некоторое число, обратный оператор $\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1}$ представим в виде

$$\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}\tilde{D}_{11}(\lambda) & \tilde{D}_{10}(\lambda)\\ \tilde{D}_{01}(\lambda) & \tilde{D}_{00}(\lambda)\end{bmatrix}, \tag{12.13}$$

где операторы $\tilde{D}_{ij}(\lambda)$, $i,\ j=0,1$ определены ниже равенствами (12.42) – (12.45). Тогда решение сдвигом ОУ с приближенными данными (12.4) записывается в виде

$$\tilde{x}_\lambda=\begin{bmatrix}\tilde{x}_{\lambda,1}\\ \tilde{x}_{\lambda,0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{D}_{11}(\lambda)\,\tilde{f}_1+\tilde{D}_{10}(\lambda)\,\tilde{f}_0\\ \tilde{D}_{01}(\lambda)\,\tilde{f}_1+\tilde{D}_{00}(\lambda)\,\tilde{f}_0\end{bmatrix}. \tag{12.14}$$

Нетрудно проверить, что при $f\in R(A)$ элемент

$$x_0=\begin{bmatrix}x_{0,1}\\ x_{0,0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1}f_1-A_{11}^{-1}A_{10}T_{11}^{-1}\left(A_{10}A_{11}^{-1}B_{11}-B_{01}\right)A_{11}^{-1}f_1\\ T_{11}^{-1}\left(A_{10}A_{11}^{-1}B_{11}-B_{01}\right)A_{11}^{-1}f_1\end{bmatrix}. \tag{12.15}$$

является решением ОУ (12.2).

Справедливая следующая

Теорема 12.4. ***Пусть*** $f\in R(A)$, ***оператор*** $T_1:H_1\to F_1$ ***ограниченно обратимый и выполнено условие***

$$|\lambda|\to 0,\quad \mu\le\varepsilon|\lambda|,\quad \nu\to 0,\quad \frac{\delta}{|\lambda|}\to 0,$$

где $\varepsilon\in\left[0,\varepsilon_0\right]$ ***– произвольное, а*** ε_0 ***– некоторое достаточно малое положительное число. Тогда справедлива оценка скорости сходимости***

$$\left\|\tilde{x}_\lambda-x_0\right\|\le M_1\left(|\lambda|+\nu+\frac{\delta}{|\lambda|}\right),$$

где $M_1>0$ ***– некоторое постоянное.***

Доказательство теоремы 12.3 приведено в пункте 12.4.

12.3. Вспомогательные утверждения. Для удобства записи используем обозначения:

$$C_{ij} = C_{ij}(\lambda) \equiv A_{ij} + \lambda B_{ij},\ \tilde{C}_{ij} = \tilde{C}_{ij}(\lambda) \equiv \tilde{A}_{ij} + \lambda \tilde{B}_{ij},\ i, j = 0,1.$$

Для получения оценки скорости сходимости регуляризованных решений требуются оценки норм операторов C_{ij} и $\tilde{C}_{ij}$. В рассматриваемых случаях параметр λ изменяется во множестве $\Lambda_0 = \{\lambda : 0 < |\lambda| \le \rho_0\}$, где $\rho_0 > 0$ – некоторое достаточно малое число, а уровни погрешности операторов, величины μ и ν изменяются в промежутках $0 \le \mu \le \mu_0$ и $0 \le \nu \le \nu_0$, где $\mu_0 > 0$ и $\nu_0 > 0$ – предельные значения погрешностей. Из ограниченности операторов A, B, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и их «близости» (12.1) и (12.6) в области изменения параметров λ, μ и ν вытекает существование числа $m_0 > 0$ такого, что

$$\left\| C_{ij} \right\| \le m_0, \quad \left\| \tilde{C}_{ij} \right\| \le m_0, \quad i,\ j = 0, 1. \tag{12.16}$$

Лемма 12.1. ***Пусть имеют место соотношения* (12.6). *Тогда справедлива оценка***

$$\left\| \tilde{C}_{ij} - C_{ij} \right\| \le k\left(\mu + |\lambda|\nu\right), \quad i,\ j = 0, 1. \tag{12.17}$$

Доказательство леммы очевидно.

Лемма 12.2. ***Пусть выполнено условие***

$$\rho_0 \left\| A_{11}^{-1} B_{11} \right\| \mu \le q_1 < 1. \tag{12.18}$$

Тогда для любого $\lambda \in \Lambda_0 = \{\lambda : 0 < |\lambda| \le \rho_0\}$ ***оператор*** C_{11} ***ограниченно обратимый и справедливы оценки***

$$\left\| C_{11}^{-1}(\lambda) \right\| \le \frac{\left\| A_{11}^{-1} \right\|}{1 - q_1}, \quad \lambda \in \Lambda_0, \tag{12.19}$$

$$\left\| A_{11}^{-1} - C_{11}^{-1}(\lambda) \right\| \le \frac{\left\| A_{11}^{-1} \right\|^2 \left\| B_{11} \right\|}{1 - q_1} |\lambda|, \quad \lambda \in \Lambda_0. \tag{12.20}$$

Доказательство. Для любого $\lambda \in \Lambda_0$ справедливо представление

$$C_{11}^{-1}(\lambda) = A_{11}^{-1} - \lambda\left(E + \lambda A_{11}^{-1}B_{11}\right)^{-1} A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}.$$

Очевидно следующее равенство

$$A_{11}^{-1} - C_{11}^{-1}(\lambda) = \lambda\left(E + \lambda A_{11}^{-1}B_{11}\right)^{-1} A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1} \qquad (12.21)$$

и оценка

$$\left\|\left(E + \lambda A_{11}^{-1}B_{11}\right)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-q_1}. \qquad (12.22)$$

Из равенства $C_{11}(\lambda) = A_{11}\left(E + \lambda A_{11}^{-1}B_{11}\right)$ получаем обратимость оператора $C_{11}(\lambda)$, а из (12.22) – справедливость (12.19).

Переходя к нормам в (12.21) и принимая во внимание (12.22), получим справедливость (12.20).

Лемма доказана.

Лемма 12.3. ***Пусть выполнено условие***

$$\left\|A_{11}^{-1}\right\|\mu \le q_2 < 1. \qquad (12.23)$$

Тогда оператор $\tilde{A}_{11} : H_1 \to F_1$ ***ограниченно обратимый и справедлива оценка***

$$\left\|\tilde{A}_{11}^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A_{11}^{-1}\right\|}{1-q_2}. \qquad (12.24)$$

Доказательство. Из очевидного равенства

$$\tilde{A}_{11} = A_{11}\left(E + A_{11}^{-1}\left(\tilde{A}_{11} - A_{11}\right)\right) \qquad (12.25)$$

и оценки

$$\left\|A_{11}^{-1}\left(\tilde{A}_{11} - A_{11}\right)\right\| \le \left\|A_{11}^{-1}\right\|\left\|\tilde{A}_{11} - A_{11}\right\| \le \left\|A_{11}^{-1}\right\|\mu \le q_2, \qquad (12.26)$$

в силу (12.23), следует обратимость оператора $E + A_{11}^{-1}\left(\tilde{A}_{11} - A_{11}\right)$, а в силу (12.26), справедливость оценки

$$\left\| \left(E + A_{11}^{-1} \left(\tilde{A}_{11} - A_{11} \right) \right)^{-1} \right\| \le \frac{1}{1-q_2} . \tag{12.27}$$

Отсюда, в силу (12.25), получим обратимость оператора $A_{\mu,11}$ и справедливость равенства

$$\tilde{A}_{11}^{-1} = \left(E + A_{11}^{-1} \left(\tilde{A}_{11} - A_{11} \right) \right)^{-1} A_{11}^{-1} . \tag{12.28}$$

Переходя к нормам в (12.28) и учитывая (12.27), получим справедливость (12.24).

Лемма доказана.

Лемма 12.4. ***Пусть выполнено условие***

$$\left\| A_{11}^{-1} \right\| \left(\mu + \rho_0 \left(\left\| B_{11} \right\| + \nu \right) \right) \le q_3 < 1 . \tag{12.29}$$

Тогда для любого $\lambda \in \Lambda_0 = \left\{ \lambda : 0 < |\lambda| \le \rho_0 \right\}$ ***оператор***

$$\tilde{C}_{11} = \tilde{C}_{11}(\lambda,\mu,\nu) \equiv \tilde{A}_{11} + \lambda \tilde{B}_{11} : H_1 \to F_1$$

ограниченно обратимый и справедливы оценки

$$\left\| \tilde{C}_{11}^{-1} \right\| \le \frac{\left\| A_{11}^{-1} \right\|}{1-q_3} , \tag{12.30}$$

$$\left\| \tilde{C}_{11}^{-1} - A_{11}^{-1} \right\| \le \frac{\left\| A_{11}^{-1} \right\|^2}{1-q_3} \left(\mu + |\lambda| \left(\left\| B_{11} \right\| + \nu \right) \right) . \tag{12.31}$$

Доказательство. Из очевидного равенства

$$\tilde{C}_{11} = A_{11} \left(E + \tilde{T}_{11} \right) , \tag{12.32}$$

где $\tilde{T}_{11} = A_{11}^{-1}\left(\tilde{A}_{11} - A_{11}\right) + \lambda \tilde{B}_{11}$, и оценки

$$\left\|\tilde{T}_{11}\right\| \le \left\|A_{11}^{-1}\right\|\left(\mu + |\lambda|\left(\left\|B_{11}\right\| + \nu\right)\right) \le q_3$$

следует обратимость оператора $E + \tilde{T}_{11}$ и справедливость оценки

$$\left\|\left(E + \tilde{T}_{11}\right)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - q_3}. \tag{12.33}$$

Отсюда, в силу (12.32), получим обратимость оператора $\tilde{C}_{11}$ и справедливость равенства

$$\tilde{C}_{11}^{-1} = \left(E + \tilde{T}_{11}\right)^{-1} A_{11}^{-1}. \tag{12.34}$$

Переходя к нормам в (12.34) и учитывая (12.33), получим справедливость (12.30).

Переходя к нормам в равенстве

$$\tilde{C}_{11}^{-1} - A_{11}^{-1} = \left(\left(E + \tilde{T}_{11}\right)^{-1} - E\right)^{-1} A_{11}^{-1},$$

получим справедливость (12.31).

Лемма доказана.

Нетрудно представить оператор $\tilde{C}_{00} - \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10}$ в следующем виде

$$\tilde{C}_{00} - \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10} = T_0 + \lambda T_1 + \tilde{T}_2 + \tilde{T}_3, \tag{12.35}$$

где операторы T_1 и $\tilde{T}_2$ определены в (12.7) и (12.10), а

$$T_0 = A_{00} - A_{01}A_{11}^{-1}A_{10}.$$

Для операторов $\tilde{T}_2$ и $\tilde{T}_3$ справедливы оценки

$$\left\|\tilde{T}_2\right\| \le m_2\mu, \quad m_2 = k\left(1 + m_0\left\|A_{11}^{-1}\right\|\right)^2, \tag{12.36}$$

$$\left\|\tilde{T}_3\right\| \le m_2'\left(|\lambda|\nu + |\lambda|^2 + \mu^2\right), \tag{12.37}$$

где $m_2' > 0$ – некоторое фиксированное число.

Положим $m_1 = \dfrac{k\left\|A_{11}^{-1}\right\|^2}{\left(1-q_1\right)\left(1-q_3\right)}$, где постоянные q_1 и q_3 участвуют в формулировке лемм 12.2 и 12.4.

Лемма 12.5. ***Пусть выполнено условие*** **(12.29).** ***Тогда справедлива оценка***

$$\left\|\tilde{C}_{11}^{-1} - C_{11}^{-1}\right\| \le m_1\left(\mu + |\lambda|\nu\right). \tag{12.38}$$

Доказательство. Из выполнения условия (12.29) следует выполнение условия (12.18). Поэтому существуют обратные операторы C_{11}^{-1} и $\tilde{C}_{11}^{-1}$. Переходя к нормам в равенстве

$$\tilde{C}_{11}^{-1} - C_{11}^{-1} = \tilde{C}_{11}^{-1}\left(C_{11} - \tilde{C}_{11}\right)C_{11}^{-1}$$

и принимая во внимание (12.19), (12.30) и (12.17), получим справедливость (12.38).

Лемма доказана.

Лемма 12.6. ***Пусть выполнено условие***

$$|\lambda|\left\|T_1^{-1}T_2\right\| \le q_4 < 1. \tag{12.39}$$

Тогда справедлива оценка

$$\left\|\left(C_{00} - C_{01}C_{11}^{-1}C_{10}\right)^{-1}\right\| \le \frac{\left\|T_1^{-1}\right\|}{|\lambda|\left(1-q_4\right)}. \tag{12.40}$$

Доказательство. Нетрудно проверяется справедливость равенства

$$C_{00} - C_{01}C_{11}^{-1}C_{10} = \lambda T_1\left(E + \lambda T_1^{-1}T_2 + O\left(\lambda^2\right)\right). \tag{12.41}$$

В силу оценки (12.39) оператор $E + \lambda T_1^{-1}T_2 + O\left(\lambda^2\right)$ является обратимым. Поэтому справедлива оценка

$$\left(E + \lambda T_1^{-1}T_2 + O\left(\lambda^2\right)\right)^{-1} \le \frac{1}{1-q_4}.$$

Отсюда и из (12.41) получим справедливость (12.40).

Лемма доказана.

Положим

$$\tilde{D}_{00} = \left(\tilde{C}_{00} - \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10}\right)^{-1}, \tag{12.42}$$

$$\tilde{D}_{01} = -\tilde{D}_{00}\tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}, \tag{12.43}$$

$$\tilde{D}_{10} = -\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10}\tilde{D}_{00}, \tag{12.44}$$

$$\tilde{D}_{11} = \tilde{C}_{11}^{-1} + \tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10}\tilde{D}_{00}\tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}. \tag{12.45}$$

Лемма 12.7. ***Пусть выполнено условие***

$$\lambda \to 0, \quad \frac{\mu}{|\lambda|} \to 0, \quad \nu \to 0. \tag{12.46}$$

Тогда для равномерной ограниченности семейства $\left\{\lambda\tilde{D}_{00}\right\}$ ***необходимо и достаточно ограниченная обратимость оператора*** T_1**.**

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство $\left\{\lambda\tilde{D}_{00}\right\}$ равномерно ограниченное. Докажем ограниченную обратимость оператора T_1.

Согласно лемме 11.2 оператор $T_0 = 0$. Поэтому (12.35) можно записать в виде

$$\tilde{C}_{00} - \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10} = \lambda\left(T_1 + \lambda^{-1}\left(\tilde{T}_2 + \tilde{T}_3\right)\right).$$

В силу (12.36) и (12.37), будем иметь

$$\left\|\lambda^{-1}\left(\tilde{T}_2 + \tilde{T}_3\right)\right\| \le m_2\frac{\mu}{|\lambda|} + O\left(\nu + |\lambda| + \frac{\mu^2}{|\lambda|}\right).$$

Отсюда, при выполнении (12.46), имеем

$$\left\|\lambda^{-1}\left(\tilde{T}_2 + \tilde{T}_3\right)\right\| \to 0. \tag{12.47}$$

Так как семейство $\left\{\lambda\tilde{D}_{00}\right\}$ равномерно ограниченное, то, принимая во внимание (12.47) из леммы 11.3, получаем ограниченную обратимость оператора T_1. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть оператор T_1 ограниченно обратимый. Докажем равномерную ограниченность семейства $\left\{\lambda\tilde{D}_{00}\right\}$.

Согласно лемме 11.2 оператор $T_0 = 0$. Поэтому равенство (12.35) можно записать в виде

$$\tilde{C}_{00} - \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10} = \lambda T_1\left(E + \lambda^{-1}T_1^{-1}\left(\tilde{T}_2 + \tilde{T}_3\right)\right). \qquad (12.48)$$

Пусть $q_5 < 1$ - произвольное. Тогда при достаточно малых $|\lambda| > 0$, $\mu \geq 0$ и $\nu \geq 0$ из условия (12.46) вытекает оценка

$$\left\|\lambda^{-1}T_1^{-1}\left(\tilde{T}_2 + \tilde{T}_3\right)\right\| \leq \left\|T_1^{-1}\right\|\left(m_2\frac{\mu}{|\lambda|} + O\left(\nu + |\lambda| + \frac{\mu^2}{|\lambda|}\right)\right) \leq q_5 .$$

Из полученного неравенства следует ограниченная обратимость оператора $E + \lambda^{-1}T_1^{-1}\left(\tilde{T}_2 + \tilde{T}_3\right)$ и справедливость оценки

$$\left\|\left(E + \lambda^{-1}T_1^{-1}\left(\tilde{T}_2 + \tilde{T}_3\right)\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - q_5} .$$

Поэтому из представления (12.48) вытекает обратимость оператора $\tilde{C}_{00} - \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10}$ и справедливость оценки

$$\left\|\left(\tilde{C}_{00} - \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{m_3}{|\lambda|}, \quad m_3 = \frac{\left\|T_1\right\|}{1 - q_5} .$$

Полученная оценка эквивалентна равномерной ограниченности семейства $\left\{\lambda\tilde{D}_{00}\right\}$. Достаточность доказана.

Лемма доказана.

Лемма 12.8. ***Пусть*** H_1, H_0, F_1, F_0 ***– произвольная порождающая четверка. Тогда для существования предела*** $\lambda\tilde{D}_{00} \to D_{00}^{(0)}$ ***при*** $|\lambda| = \mu \to 0$, $\nu \to 0$ ***и ограниченности оператора*** $D_{00}^{(0)} : H_1 \to F_1$ ***необходимо и достаточно ограниченная обратимость оператора*** $T_1 : H_1 \to F_1$ ***и выполнение равенства*** $T = 0$**.**

Доказательство. Необходимость. Пусть существует предел $\lambda\tilde{D}_{00} \to D_{00}^{(0)}$ при $|\lambda| = \mu \to 0, \nu \to 0$ и $D_{00}^{(0)} : H_1 \to F_1$ – ограниченный оператор. Докажем ограниченную обратимость оператора T_1 и выполнение равенства $T = 0$.

В силу (12.9) оператор $\tilde{T}_2$ представим в виде

$$\tilde{T}_2 = \mu T + o(\mu),$$

где

$$T = A'_{00} - A_{01}A_{11}^{-1}A'_{10} - A'_{01}A_{11}^{-1}A_{10} + A_{01}A_{11}^{-1}A'_{11}A_{11}^{-1}A_{10}. \qquad (12.49)$$

Поэтому, в силу леммы 11.2, равенство (12.35) представим в виде

$$\tilde{C}_{00} - \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10} = \lambda T_1 + \mu T + o(\mu) + \tilde{T}_3 \qquad (12.50)$$

и, следовательно,

$$\lambda D_{00} = \lambda\left(\tilde{C}_{00} - \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10}\right)^{-1} = \left(T_1 + \frac{\mu}{\lambda}T + o\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\tilde{T}_3\right)^{-1}.$$

По условию семейство $\left\{\lambda\tilde{D}_{00}\right\}$ имеет предел при $|\lambda| = \mu \to 0$, $\nu \to 0$. Следовательно, полагая $\lambda = \varepsilon\mu$, где $\varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| = 1$, получим

$$\lambda D_{00} \to \left(T_1 + \varepsilon T\right)^{-1} \text{ при } |\lambda| = \mu \to 0,\ \nu \to 0. \qquad (12.51)$$

Так как ε – произвольное, то из (12.51), в силу единственности предела, получаем справедливость равенства $T = 0$ и в силу ограниченности оператора $D_{00}^{(0)}$ – ограниченную обратимость оператора $T_1 : H_1 \to F_1$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть оператор $T_1 : H_1 \to F_1$ ограниченно обратимый и справедливо равенство $T = 0$. Докажем существование предела $\lambda \tilde{D}_{00} \to D_{00}^{(0)}$ при $|\lambda| = \mu \to 0, \nu \to 0$ и ограниченность оператора $D_{00}^{(0)} : H_1 \to F_1$.

Действительно, представление (12.50) в данном случае, принимает вид

$$\tilde{C}_{00} - \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10} = \lambda T_1 + o(\mu) + \tilde{T}_3 .$$

Отсюда будем иметь

$$\lambda D_{00} = \lambda\left(\tilde{C}_{00} - \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10}\right)^{-1} = \left(T_1 + o\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\tilde{T}_3\right)^{-1} . \qquad (12.52)$$

Так как

$$\left\| o\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\tilde{T}_3 \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| = \mu \to 0, \nu \to 0 ,$$

то, переходя к пределу в (12.52) при $|\lambda| = \mu \to 0$, $\nu \to 0$, получим

$$\lambda D_{00} \to T_1^{-1} \text{ при } |\lambda| = \mu \to 0 , \ \nu \to 0 .$$

Таким образом, при $|\lambda| = \mu \to 0$, $\nu \to 0$ существует предел $\lambda D_{00} \to D_{00}^{(0)}$ и оператор $D_{00}^{(0)} = T_1^{-1}$ – ограниченный. Достаточность доказана.

Лемма доказана.

Лемма 12.9. ***Пусть выполнено условие* (12.12). *Тогда для равномерной ограниченности семейства*** $\left\{\lambda \tilde{D}_{00}\right\}$ ***необходимо и достаточно ограниченная обратимость оператора*** $T_1 : H_1 \to F_1$**.**

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство $\{\lambda\tilde{D}_{00}\}$ равномерно ограниченное. Докажем ограниченную обратимость оператора T_1.

Согласно лемме 11.2 оператор $T_0=0$. Поэтому (12.35) можно записать в виде

$$\tilde{C}_{00}-\tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10}=\lambda\left(T_1+\lambda^{-1}\left(\tilde{T}_2+\tilde{T}_3\right)\right).$$

Имеем

$$\left\|\lambda^{-1}\left(\tilde{T}_2+\tilde{T}_3\right)\right\|\le\frac{1}{|\lambda|}m_2\mu+\frac{1}{|\lambda|}m_2'\left(\nu|\lambda|+|\lambda|^2+\mu^2\right).$$

Следовательно, в силу неравенства $\mu\le\varepsilon|\lambda|$, получим

$$\left\|\lambda^{-1}\left(\tilde{T}_2+\tilde{T}_3\right)\right\|\le\varepsilon m_2+m_2'\left(\nu+\left(1+\varepsilon^2\right)|\lambda|\right).$$

Отсюда при $\varepsilon\to 0$ и $|\lambda|\to 0$ имеем

$$\left\|\lambda^{-1}\left(\tilde{T}_2+\tilde{T}_3\right)\right\|\to 0. \tag{12.53}$$

Так как семейство $\{\lambda\tilde{D}_{00}\}$ равномерно ограниченное, то из (12.53) в силу леммы 11.3 получаем ограниченную обратимость оператора T_1. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть оператор T_1 ограниченно обратимый. Докажем равномерную ограниченность семейства $\{\lambda\tilde{D}_{00}\}$.

Согласно лемме 11.2 оператор $T_0=0$. Поэтому (12.35) можно записать в виде

$$\tilde{C}_{00}-\tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10}=\lambda T_1\left(E+\lambda^{-1}T_1^{-1}\left(\tilde{T}_2+\tilde{T}_3\right)\right). \tag{12.54}$$

Имеем

$$\left\|\lambda^{-1}T_1^{-1}\left(\tilde{T}_2+\tilde{T}_3\right)\right\|\le$$
$$\le\frac{1}{|\lambda|}\left\|T_1^{-1}\right\|m_2\mu+\frac{1}{|\lambda|}\left\|T_1^{-1}\right\|m_2'\left(\nu|\lambda|+|\lambda|^2+\mu^2\right). \tag{12.55}$$

Отсюда, в силу неравенства $\mu \le \varepsilon|\lambda|$, получим

$$\left\|\lambda^{-1}T_1^{-1}\left(\tilde{T}_2+\tilde{T}_3\right)\right\| \le \varepsilon\left\|T_1^{-1}\right\|m_2+\left\|T_1^{-1}\right\|m_2'\left(\nu+\left(1+\varepsilon^2\right)|\lambda|\right).$$

Пусть $q_6<1$ - произвольное. Тогда существуют зависящие от $\left\|T_1^{-1}\right\|$, m_2 и m_2' величины $\varepsilon_0>0$, $\nu_0>0$ и ρ_1: $0<\rho_1\le\rho_0$ такие, что для всех ε, ν и λ, удовлетворяющих неравенствам

$$0\le\varepsilon\le\varepsilon_0,\quad 0\le\nu\le\nu_0,\quad 0<|\lambda|\le\rho_1,$$

выполняется условие

$$\varepsilon\left\|T_1^{-1}\right\|m_2+\left\|T_1^{-1}\right\|m_2'\left(\nu+\left(1+\varepsilon^2\right)|\lambda|\right)\le q_6.$$

Из полученного и (12.55) вытекает оценка

$$\left\|\lambda^{-1}T_1^{-1}\left(\tilde{T}_2+\tilde{T}_3\right)\right\|\le q_6<1.$$

Отсюда получаем обратимость оператора $E+\lambda^{-1}T_1^{-1}\left(\tilde{T}_2+\tilde{T}_3\right)$ и справедливость оценки

$$\left\|\left(E+\lambda^{-1}T_1^{-1}\left(\tilde{T}_2+\tilde{T}_3\right)\right)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-q_6}$$

и, принимая во внимание представление (12.13) – обратимость оператора $\tilde{C}_{00}-\tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10}$ и справедливость оценки

$$\left\|\left(\tilde{C}_{00}-\tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10}\right)^{-1}\right\|\le\frac{\left\|T_1^{-1}\right\|}{|\lambda|\left(1-q_6\right)}.$$

Полученная оценка эквивалентна равномерной ограниченности семейства $\left\{\lambda\tilde{D}_{00}\right\}$. Достаточность доказана.

Лемма доказана.

Лемма 12.10. ***Пусть*** $f \in R(A)$ ***и имеет место*** **(12.29).** ***Тогда справедливы оценки***

$$\left\| \tilde{f}_0 - \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{f}_1 \right\| \le m_5\left(\mu + |\lambda|\nu + |\lambda| + \delta\right)\| f \|, \qquad (12.56)$$

$$\left\| \frac{1}{\lambda}\left(\tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{f}_1 - \tilde{f}_0\right) - B_{01}A_{11}^{-1}f_1 \right\| \le k\left(k_0\left\|A_{11}^{-1}\right\|\frac{\mu}{|\lambda|} + \right.$$

$$\left. + \left\|A_{11}^{-1}\right\|\left(1 + \frac{m_0\left\|B_{11}\right\|\left\|A_{11}^{-1}\right\|}{1 - q_3}\right)\nu + k_0\frac{\delta}{|\lambda|}\right)\| f \|, \qquad (12.57)$$

где
$$m_5 = \max\left\{k_0,\, k_0\left\|A_{11}^{-1}\right\|,\, k_1\right\},$$

$$k_0 = k\left(1 + \frac{m_0\left\|A_{11}^{-1}\right\|}{1 - q_3}\right), \qquad k_1 = k\left\|A_{11}^{-1}\right\|\left(\left\|B_{01}\right\| + \frac{\left\|B_{11}\right\|\left\|A_{11}^{-1}\right\|}{1 - q_3}\right).$$

Доказательство. Из включения $f \in R(A)$ получаем равенство $f_0 = A_{01}A_{11}^{-1}f_1$. Поэтому справедливо тождество

$$\tilde{f}_0 - \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{f}_1 = \left(\tilde{f}_0 - f_0\right) + \left(C_{01} - \tilde{C}_{01}\right)A_{11}^{-1}f_1 - \lambda B_{01}A_{11}^{-1}f_1 +$$

$$+ \tilde{C}_{01}\left(A_{11}^{-1} - \tilde{C}_{11}^{-1}\right)f_1 + \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\left(f_1 - \tilde{f}_1\right). \qquad (12.58)$$

Переходя здесь к нормам, в силу (12.6) , (12.16), (12.17) и (12.31), получим

$$\left\| \tilde{f}_0 - \tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{f}_1 \right\| \le k\left[\delta + \left(\mu + |\lambda|\nu\right)\left\|A_{11}^{-1}\right\| + |\lambda|\left\|B_{01}\right\|\left\|A_{11}^{-1}\right\| + \right.$$

$$\left. + \frac{m_0\left\|A_{11}^{-1}\right\|^2}{1 - q_3}\left(\mu + |\lambda|\left(\left\|B_{11}\right\| + \nu\right)\right) + \frac{\delta m_0\left\|A_{11}^{-1}\right\|}{1 - q_3}\right]\| f \| =$$

$$= m_5\left(\mu + |\lambda|\nu + |\lambda| + \delta\right)\| f \|.$$

Соотношение (12.56) доказано. Докажем соотношение (12.57). Из (12.58) получим

$$\left(\tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{f}_1-\tilde{f}_0\right)-\lambda B_{01}A_{11}^{-1}f_1=\left(f_0-\tilde{f}_0\right)+\left(\tilde{C}_{01}-C_{01}\right)A_{11}^{-1}f_1+$$

$$+\tilde{C}_{01}\left(\tilde{C}_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}\right)f_1+\tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\left(\tilde{f}_1-f_1\right).$$

Поделим обе части этого равенства на λ и, в силу (12.16), (12.17) и (12.31), получим справедливость (12.57).

Лемма доказана.

Лемма 12.11. ***Пусть имеет место*** **(12.29).** ***Тогда справедлива оценка***

$$\left\|\left(C_{00}-C_{01}C_{11}^{-1}C_{10}\right)-\left(\tilde{C}_{00}-\tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10}\right)\right\|\le$$

$$\le k\left(1+\frac{m_0\left\|A_{11}^{-1}\right\|}{1-q_1}\right)\left(1+\frac{m_0\left\|A_{11}^{-1}\right\|}{1-q_3}\right)\left(\mu+|\lambda|\nu\right). \qquad (12.59)$$

Доказательство. Переходя к нормам в тождестве

$$\left(C_{00}-C_{01}C_{11}^{-1}C_{10}\right)-\left(\tilde{C}_{00}-\tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{C}_{10}\right)=\left(C_{00}-\tilde{C}_{00}\right)-$$

$$-\left(C_{01}-\tilde{C}_{01}\right)C_{11}^{-1}C_{10}-\tilde{C}_{01}\left(C_{11}^{-1}-\tilde{C}_{11}^{-1}\right)C_{10}-\tilde{C}_{01}\tilde{C}_{11}^{-1}\left(C_{10}-\tilde{C}_{10}\right)$$

и учитывая утверждения лемм 12.2 и 12.4, получим справедливость равенства (12.59).

Лемма доказана.

Положим

$$T_2=-B_{01}A_{11}^{-1}B_{10}-A_{01}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}B_{10}-$$

$$-B_{01}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{10}-A_{01}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{10},$$

$$S_{00}(\lambda)=\lambda^{-1}T_1^{-1}-T_1^{-1}T_2T_1^{-1},$$

$$S_{01}(\lambda)=-\lambda^{-1}T_1^{-1}A_{01}A_{11}^{-1}+\left(T_1^{-1}A_{01}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}+\right.$$

$$\left.+T_1^{-1}T_2T_1^{-1}A_{01}A_{11}^{-1}-T_1^{-1}B_{01}A_{11}^{-1}\right),$$

$$S_{10}(\lambda) = -\lambda^{-1} A_{11}^{-1} A_{10} T_1^{-1} + \left(A_{11}^{-1} B_{11} A_{11}^{-1} A_{10} T_1^{-1} + \right.$$

$$\left. + A_{11}^{-1} A_{10} T_1^{-1} T_2 T_1^{-1} - A_{11}^{-1} B_{10} T_1^{-1} \right). \tag{12.60}$$

$$S_{11}(\lambda) = \lambda^{-1} A_{11}^{-1} A_{10} T_1^{-1} A_{01} A_{11}^{-1} + \left(A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{10} T_1^{-1} B_{01} A_{11}^{-1} - \right.$$

$$- A_{11}^{-1} A_{10} T_1^{-1} A_{01} A_{11}^{-1} B_{11} A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1} A_{10} T_1^{-1} T_2 T_1^{-1} A_{01} A_{11}^{-1} +$$

$$\left. + A_{11}^{-1} B_{10} T_1^{-1} A_{01} A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1} B_{11} A_{11}^{-1} A_{10} T_1^{-1} A_{01} A_{11}^{-1} \right). \tag{12.61}$$

Лемма 12.12. ***Пусть имеют место*** **(12.29) и (12.18).** ***Тогда имеют место представления***

$$D_{ij} = S_{ij} + S_{ij}^{(1)}, \quad \tilde{D}_{ij} = S_{ij} + \tilde{S}_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 0,1, \tag{12.62}$$

где операторы D_{ij} ***и*** $\tilde{D}_{ij}$ ***определены в*** **(11.24)-(11.27)** ***и*** **(12.42)-(12.45)** ***соответственно, а операторы*** $S_{ij}^{(1)} = S_{ij}^{(1)}(\lambda)$ ***и*** $\tilde{S}_{ij}^{(1)} = \tilde{S}_{ij}^{(1)}(\lambda, \mu, \nu)$ ***допускают оценки***

$$\left\| S_{ij}^{(1)} \right\| \le m_6 |\lambda|, \quad \left\| \tilde{S}_{ij}^{(1)} \right\| \le m_6 \left(|\lambda| + \mu + |\lambda| \nu \right), \tag{12.63}$$

а $m_6 > 0$ ***и*** $m_7 > 0$ ***– некоторые постоянные.***

Для доказательства леммы 12.12 достаточно разложить оператор $C_{00} - C_{01} C_{11}^{-1} C_{10}$ в ряд по степеням λ, а оператор $\tilde{C}_{00} - \tilde{C}_{01} \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{C}_{10}$ по степеням λ, μ, ν и их произведений.

Лемма 12.13. ***Пусть*** $f \in R(A)$, ***оператор*** T_1 ***ограниченно обратимый и выполнено условие***

$$|\lambda| \to 0, \quad \mu \le \varepsilon |\lambda|, \quad \nu \to 0, \quad \frac{\delta}{|\lambda|} \to 0, \tag{12.64}$$

где $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ ***– произвольное, а*** ε_0 ***– некоторое достаточно малое положительное число. Тогда для решений*** x_λ ***и*** $\tilde{x}_\lambda$ ***уравнений* (12.3) *и* (12.4) *справедливы представления***

$$x_{\lambda,1} = x_{0,1} + X_{\lambda,1}, \quad x_{\lambda,0} = x_{0,0} + X_{\lambda,0}, \tag{12.65}$$

$$\tilde{x}_{\lambda,1} = x_{0,1} + \tilde{X}_{\lambda,1}, \quad \tilde{x}_{\lambda,0} = x_{0,0} + \tilde{X}_{\lambda,0}, \tag{12.66}$$

где $x_{0,1}$ ***и*** $x_{0,0}$ ***определены в* (12.15), *а***

$$\left\| X_{\lambda,1} \right\| \le m_7 |\lambda| \| f \|, \quad \left\| X_{\lambda,0} \right\| \le m_7 |\lambda| \| f \|, \tag{12.67}$$

$$\left\| \tilde{X}_{\lambda,1} \right\| \le m_8 \left(|\lambda| + \nu + \frac{\delta}{|\lambda|} \right) \| f \|, \left\| \tilde{X}_{\lambda,0} \right\| \le m_8 \left(|\lambda| + \nu + \frac{\delta}{|\lambda|} \right) \| f \|. \tag{12.68}$$

Доказательство. Докажем представление (12.65) и оценку (12.67). В силу (12.62) имеем

$$x_\lambda = \begin{bmatrix} S_{11}(\lambda) f_1 + S_{10}(\lambda) f_0 \\ S_{01}(\lambda) f_1 + S_{00}(\lambda) f_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)}(\lambda) f_1 + S_{10}^{(1)}(\lambda) f_0 \\ S_{01}^{(1)}(\lambda) f_1 + S_{00}^{(1)}(\lambda) f_0 \end{bmatrix}.$$

Из включения $f \in R(A)$ следует, что $f_0 = A_{01} A_{11}^{-1} f_1$. Отсюда и из (12.60), (12.61) получим тождества

$$S_{11}(\lambda) f_1 + S_{10}(\lambda) f_0 \equiv x_{0,1}, \, S_{01}(\lambda) f_1 + S_{00}(\lambda) f_0 \equiv x_{0,0}, \tag{12.69}$$

а из (12.63) – справедливость оценок (12.67).

Докажем представление (12.66) и оценку (12.68). В силу (12.62) имеем

$$\tilde{x}_\lambda = \begin{bmatrix} S_{11}(\lambda) f_1 + S_{10}(\lambda) f_0 \\ S_{01}(\lambda) f_1 + S_{00}(\lambda) f_0 \end{bmatrix} + \tag{12.70}$$

$$+ \begin{bmatrix} S_{11}(\lambda)(\tilde{f}_1 - f_1) + S_{10}(\lambda)(\tilde{f}_0 - f_0) + \tilde{S}_{11}^{(1)}(\lambda) \tilde{f}_1 + \tilde{S}_{10}^{(1)}(\lambda) \tilde{f}_0 \\ S_{01}(\lambda)(\tilde{f}_1 - f_1) + S_{00}(\lambda)(\tilde{f}_0 - f_0) + + \tilde{S}_{01}^{(1)}(\lambda) \tilde{f}_1 + \tilde{S}_{00}^{(1)}(\lambda) \tilde{f}_0 \end{bmatrix}.$$

Для первого слагаемого справедливы тождества (12.69). Справедливость оценок (12.68) следует из (12.63), (12.64) и (12.6).

Лемма доказана.

12.4. Доказательства теорем 12.1 – 12.4.

Доказательство теоремы 12.1. Необходимость. Пусть при достаточно малых $|\lambda|>0$, $\mu\geq 0$ и $\nu\geq 0$ семейство $\left\{\lambda\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1}\right\}$ равномерно ограниченное. Докажем ограниченную обратимость оператора $T_1 : H_1 \to F_1$.

Порождающая четверка H_1, H_0, F_1, F_0 позволяет представить семейства $A+\lambda B$ и $\tilde{A}+\lambda\tilde{B}$ в матричной форме

$$A+\lambda B=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{10} \\ C_{10} & C_{00} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}+\lambda\tilde{B}=\begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{10} \\ \tilde{C}_{10} & \tilde{C}_{00} \end{bmatrix}.$$

Тогда обратная матрица $\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1}$ записывается равенствами (12.13) и (12.42)-(12.45). Из равномерной ограниченности $\left\{\lambda\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1}\right\}$ при условии (12.8) следует, в частности, равномерная ограниченность семейства $\left\{\lambda\tilde{D}_{00}\right\}$. Тогда из леммы 12.7 вытекает ограниченная обратимость оператора T_1. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть оператор $T_1 : H_1 \to F_1$ ограниченно обратимый. Докажем равномерную ограниченность семейства $\left\{\lambda\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1}\right\}$ при достаточно малых $|\lambda|>0$, $\mu\geq 0$ и $\nu\geq 0$, удовлетворяющих условию (12.46).

Из ограниченной обратимости $T_1 : H_1 \to H_1$ и леммы 11.4 получаем равномерную ограниченность семейства $\left\{\lambda\tilde{D}_{00}\right\}$. Отсюда, в силу равенств (12.43)-(12.45), вытекает равномерная ограниченность семейств $\left\{\lambda\tilde{D}_{01}\right\}$,

$\{\lambda\tilde{D}_{10}\}$ и $\{\lambda\tilde{D}_{11}\}$. Наконец, из равенства (12.13) следует равномерная ограниченность семейства $\left\{\lambda\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1}\right\}$. Достаточность доказана.

Теорема 12.1 доказана.

Доказательство теоремы 12.2. Необходимость. Пусть существует предел $\lambda\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)\to D$ при $|\lambda|=\mu\to 0, \nu\to 0$ и $D:H_1\to F_1$ – ограниченный оператор. Докажем ограниченную обратимость оператора T_1 и выполнение равенства $T=0$.

Из существования предела $\lambda\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)\to D$ при $|\lambda|=\mu\to 0$, $\nu\to 0$ следует, в частности, существование предела $\lambda\tilde{D}_{00}\to D_0$ и ограниченность оператора $D_0:H_1\to F_1$. Тогда из леммы 12.8 вытекает ограниченная обратимость оператора $T_1:H_1\to F_1$ и выполнение равенства $T=0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть оператор $T_1:H_1\to F_1$ ограниченно обратимый и справедливо равенство $T=0$. Докажем существование предела $\lambda\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1}\to D$ при $|\lambda|=\mu\to 0, \nu\to 0$ и ограниченность оператора $D:H_1\to F_1$.

Согласно лемме 12.8 получаем существование предела $\lambda\tilde{D}_{00}\to D_{00}^{(0)}$ при $|\lambda|=\mu\to 0, \nu\to 0$. Отсюда, в силу равенств (12.43)-(12.45), вытекает существование предела у семейств $\lambda\tilde{D}_{01}\to D_{01}^{(0)}$, $\lambda\tilde{D}_{10}\to D_{10}^{(0)}$, $\lambda\tilde{D}_{11}\to D_{11}^{(0)}$ при $|\lambda|=\mu\to 0$, $\nu\to 0$ и, в силу равенств

$$D_{01}^{(0)}=-D_{00}^{(0)}A_{01}A_{11}^{-1},\ D_{01}^{(0)}=-A_{11}^{-1}A_{10}D_{00}^{(0)},$$

$$D_{11}^{(0)}=A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{10}D_{00}^{(0)}A_{01}A_{11}^{-1},$$

их ограниченность. Наконец, из равенства (12.13) следует существование предела

$$\lambda\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1} \to D \equiv \begin{bmatrix} D_{11}^{(0)} & D_{10}^{(0)} \\ D_{01}^{(0)} & D_{00}^{(0)} \end{bmatrix}$$

и из ограниченности операторов $D_{ij}^{(0)},\ i,\ j=0,1$ – ограниченность оператора D. Достаточность доказана.

Теорема 12.2 доказана.

Доказательство теоремы 12.3 проводится аналогично доказательству теоремы 12.1. В доказательстве необходимости ссылку на лемму 12.4 следует заменить на лемму 12.9, в доказательстве достаточности ссылку на условие (12.46) следует заменить на условие (12.12).

Доказательство теоремы 12.4. В силу тождеств (12.69), (12.70) и оценок (12.68) имеем

$$\left\|\tilde{x}_{\lambda,1}-x_{0,1}\right\| \le \left\|\tilde{X}_{\lambda,1}\right\| \le m_8\left(|\lambda|+\nu+\frac{\delta}{|\lambda|}\right)\|f\|,$$

$$\left\|\tilde{x}_{\lambda,0}-x_{0,0}\right\| \le \left\|\tilde{X}_{\lambda,0}\right\| \le m_8\left(|\lambda|+\nu+\frac{\delta}{|\lambda|}\right)\|f\|.$$

Теорема 12.4 доказана.

их ограниченность. Наконец, из равенства (12.13) следует существование предела

$$\lambda\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1} \to D \equiv \begin{bmatrix} D_{11}^{(0)} & D_{10}^{(0)} \\ D_{01}^{(0)} & D_{00}^{(0)} \end{bmatrix}$$

и из ограниченности операторов $D_{ij}^{(0)},\, i,\ j=0,1$ – ограниченность оператора D. Достаточность доказана.

Теорема 12.2 доказана.

Доказательство теоремы 12.3 проводится аналогично доказательству теоремы 12.1. В доказательстве необходимости ссылку на лемму 12.4 следует заменить на лемму 12.9, в доказательстве достаточности ссылку на условие (12.46) следует заменить на условие (12.12).

Доказательство теоремы 12.4. В силу тождеств (12.69), (12.70) и оценок (12.68) имеем

$$\left\|\tilde{x}_{\lambda,1}-x_{0,1}\right\| \le \left\|\tilde{X}_{\lambda,1}\right\| \le m_8\left(|\lambda|+\nu+\frac{\delta}{|\lambda|}\right)\|f\|,$$

$$\left\|\tilde{x}_{\lambda,0}-x_{0,0}\right\| \le \left\|\tilde{X}_{\lambda,0}\right\| \le m_8\left(|\lambda|+\nu+\frac{\delta}{|\lambda|}\right)\|f\|.$$

Теорема 12.4 доказана.

ГЛАВА 2

1. ЗАДАЧИ L-ПСЕВДООБРАЩЕНИЯ

1.1. Определения квазирешения и псевдорешения операторных уравнений (ОУ). Пусть $A: H \to F$ – линейный ограниченный оператор, а H и F – гильбертовы пространства с нормами $\|\cdot\|_H$ и $\|\cdot\|_F$, соответственно (если не имеется необходимость, то нормы используют без указания индекса).

Рассмотрим ОУ

$$Ax = f, \tag{1.1}$$

где $f \in F$ – заданный, а $x \in H$ – искомый элементы.

Пусть $K \subset H$ – произвольное множество. **Квазирешением** ОУ (1.1) на множестве K [36, 37] назовем любой элемент $x_0 \in K$, минимизирующий невязку

$$\|Ax_0 - f\| = \inf\left\{\|Ax - f\| : u \in K\right\}$$

на множестве K. Приведенное определение отличается от определения В.К.Иванова. Здесь не требуется от множества $K \subset H$ свойства компактности. Поэтому множество квазирешений ОУ (1.1) может быть и пустым. Если у ОУ (1.1) существует квазирешение, то оно, вообще говоря, определяется неоднозначно. Если $K = H$, то квазирешение ОУ (1.1) назовем **псевдорешением** этого уравнения. Псевдорешение ОУ (1.1) с минимальной нормой назовем **нормальным псевдорешением** ОУ (1.1). Очевидно, что если ОУ (1.1) разрешимо, то его псевдорешение совпадает с решением, а нормальное псевдорешение с нормальным решением.

1.2. Задачи L-псевдообращения. Пусть $A: H \to F$ и $L: H \to G$ – линейные ограниченные операторы, $f \in F$ и $g \in G$ – заданные элементы, а H, F и G – гильбертовы пространства. Предметом исследования данного параграфа являются две задачи – стационарная задача L-псевдообращения и вариационная задача L-псевдообращения. Приводятся условия разрешимости и, в частности, однозначной разрешимости этих задач, получены представления их решения в явном виде, доказана эквивалентность этих задач.

Приведем формулировки рассматриваемых задач:

- **стационарная задача** $(S;\ f,\ g)$ (см. [65, 66]):

  найти квазирешение $x_0 = x_0(f,\ g)$ *уравнения*

$$Lx = g \tag{1.2}$$

на множестве псевдорешений уравнения (1.1).

- **вариационная задача** $(V;\ f,\ g)$ [59, 60]:

  найти решение вариационной задачи

$$\Phi_\alpha(x) \equiv \|Ax - f\|^2 + \alpha\|Lx - g\|^2 \to \min, \quad x \in H,$$

где $\alpha > 0$, *и исследовать его предельные свойства при* $\alpha \to 0$.

1.3. Условие взаимной дополнительности операторов. Следуя [58, 59], будем говорить, что операторы $A: H \to F$ и $L: H \to G$ удовлетворяют условию **взаимной дополнительности**, если существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что для всех $x \in H$ выполняется неравенство

$$\|Ax\|^2 + \|Lx\|^2 \geq \gamma\|x\|^2, \quad x \in H. \tag{1.3}$$

Если пространства H, F и G являются конечномерными, то нетрудно доказать, что взаимная дополнительность операторов A и L эквивалентна условию

$$\ker A \cap \ker L = \{0\}. \tag{1.4}$$

В случае бесконечномерных пространств H, F и G из взаимной дополнительности операторов A и L вытекает условие (1.4). Однако, обратное утверждение не имеет место, то есть из условия (1.4) не вытекает взаимная дополнительность операторов A и L, даже при дополнительном предположении нормальной разрешимости этих операторов.

Действительно, в пространстве l_2 $(H = F = G = l_2)$ рассмотрим операторы

$$A = \mathrm{diag}\left(A_1, \dots, A_n, \dots\right), \dots\ L = \mathrm{diag}\left(L_1, \dots, L_n, \dots\right),$$

где
$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1+\dfrac{1}{n} \\ 1 & 1+\dfrac{1}{n} \end{bmatrix}, \qquad L_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Имеем
$$\ker A_n = \left\{\alpha e_n : \alpha \in \mathbb{R}\right\}, \qquad \ker L_n = \left\{\alpha g_n : \alpha \in \mathbb{R}\right\}, \tag{1.5}$$

где
$$e_n = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{1}{n} \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad g_n = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

Из равенств (1.5) следует, что $\ker A_n \cap \ker L_n = \{0\}$, а отсюда получим справедливость равенства (1.4).

Докажем нормальную разрешимость операторов A и L. Для этого найдем сингулярные числа этих операторов. Так как

$$A^* A = \mathrm{diag}\left(A_1^* A_1, \dots, A_n^* A_n, \dots\right),$$

$$L^* L = \mathrm{diag}\left(L_1^* L_1, \dots, L_n^* L_n, \dots\right),$$

$$A_n^* A_n = \begin{bmatrix} 2 & 2\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \\ 2\left(1+\dfrac{1}{n}\right) & 2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 \end{bmatrix}, \qquad n = 1, 2, \dots ,$$

$$L_n^* L_n = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad n = 1, 2, \dots ,$$

то собственными значениями матриц $A_n^* A_n$ и $L_n^* L_n$ (они же являются квадратами сингулярных чисел матриц A_n и L_n) являются числа

$$\lambda_1\left(A_n^* A_n\right) = 0, \quad \lambda_2\left(A_n^* A_n\right) = 2 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2, \qquad n = 1, 2, \dots ,$$

$$\lambda_1\left(L_n^* L_n\right) = 0, \quad \lambda_2\left(L_n^* L_n\right) = 4, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Из этих равенств следует, что ненулевые собственные значения матриц $A_n^* A_n$ и $L_n^* L_n$ отделены от нуля. Следовательно, отделены от нуля и ненулевые собственные значения операторов $A^* A$ и $L^* L$. Это эквивалентно нормальной разрешимости операторов A и L.

Таким образом, для операторов A и L доказано равенство (1.4) и установлена их нормальная разрешимость. Но, тем не менее, операторы A и L не являются взаимно дополнительными. Действительно, рассмотрим элементы

$$x_n = \left(\Theta_1, \dots, \Theta_{n-1}, g_n, \Theta_{n+1}, \dots\right),$$

где $\Theta_k = (0,\ 0)$, $k = 1, 2, \dots$, а вектор g_n – определен равенством (1.6). Тогда

$$\left\|Ax_n\right\|^2 + \left\|Lx_n\right\|^2 = \left\|A_n g_n\right\|^2 + \left\|L_n g_n\right\|^2 = \frac{2}{n^2}, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Отсюда следует, что не существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что имеет место условие (1.3) для всех $x \in H$.

1.4. Решение задач L-псевдообращения. Будем говорить, что имеет место **основное условие**, если оператор A нормально разрешимый и операторы A и L удовлетворяют условию взаимной дополнительности.

Псевдообратный оператор для оператора A обозначим A^+, а ортогональный проектор на ядро $\ker A$ оператора A – через Q .

Основными результатами данного пункта являются следующие утверждения:

Теорема 1.1. ***Для однозначной разрешимости задачи*** $(S;\ f,\ g)$ ***для всех*** $f \in F$ ***и*** $g \in G$ ***необходимо и достаточно выполнение основного условия; при этом единственное решение задачи*** $(S;\ f,\ g)$ ***определяется равенством***

$$x_0 = A^+ f + (LQ)^+ \left(g - LA^+ f\right). \tag{1.7}$$

Положим

$$T_0 = E - (LQ)^+ L, \qquad T = -\left(A^* A\right)^+ L^* L, \tag{1.8}$$

$\rho_0 = \rho(T)$ – спектральный радиус оператора T.

Теорема 1.2. ***Для того чтобы задача*** $(V;\ f,\ g)$ ***для всех*** $f \in F$, $g \in G$ ***и*** $\alpha > 0$ ***имела единственное решение, сходящееся при*** $\alpha \to 0$, ***необходимо и достаточно выполнение основного условия; при этом единственное решение задачи*** $(V;\ f,\ g)$ ***определяется равенством***

$$x_\alpha = x_\alpha(f, g) \equiv \left(A^* A + \alpha L^* L\right)^{-1} \left(A^* f + \alpha L^* g\right), \tag{1.9}$$

причем для всех $\alpha : 0 < \alpha < \rho_0^{-1}$ ***справедлива оценка***

$$\left\| x_\alpha - x_0 \right\| \le m\alpha,$$

где x_0 ***– решение задачи*** $(S;\ f,\ g)$, ***а*** $m > 0$ ***– некоторая постоянная, не зависящая от*** α.

В теореме 1.1 изучается вопрос однозначной разрешимости стационарной задачи $(S;\ f,\ g)$. Ответ на более общий вопрос, а именно, разрешимости этой задачи, приводится в следующей теореме.

Теорема 1.3. ***Для разрешимости задачи $(S;\, f,\, g)$ для всех $f \in F$ и $g \in G$ необходимо и достаточно нормальная разрешимость операторов A и LQ; при этом все решения задачи $(S;\, f,\, g)$ определяются равенством***

$$x_0 = A^+ f + (LQ)^+ \left(g - LA^+ f\right) + QQ_1 y\,,$$

где Q_1 – ортогональный проектор на ядро оператора LQ, а $y \in H$ – произвольный элемент.

Доказательства теорем 1.1 – 1.3 приведены в п. 1.6.

Близкими по теме исследования данного параграфа следует отметить работы Б. А. Алиева [2], В. И. Мелешко [56, 57], Р. А. Шафиева [110 - 112] и др.

1.5. Вспомогательные утверждения. В этом пункте доказываются леммы, используемые при доказательстве теорем 1.1 – 1.3.

Лемма 1.1. ***Пусть оператор $A: H \to F$ нормально разрешимый. Тогда для взаимной дополнительности операторов A и $L: H \to G$ необходимо и достаточно ограниченная обратимость оператора***

$$L: \ker A \to R(LQ). \tag{1.10}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть операторы A и L взаимно дополнительные. Докажем ограниченную обратимость оператора (1.10).

Из нормальной разрешимости оператора A вытекает существование постоянной $\gamma_1 > 0$, удовлетворяющей условию

$$\|Ax\| \ge \gamma_1 \|x\| \quad \text{для всех} \quad x \perp \ker A.$$

Если $x \in \ker A$, то $Qx = x$ и, следовательно, из (1.3) будем иметь

$$\|Lx\|^2 = \|LQx\|^2 \ge \gamma \|x\|^2, \quad \forall x \in \ker A.$$

Полученное соотношение эквивалентно ограниченной обратимости оператора (1.10). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть оператор (1.10) ограниченно обратимый. Докажем взаимную дополнительность операторов $A: H \to F$ и $L: H \to G$.

Предположим противное. Пусть не имеет место соотношение (1.3), то есть существует последовательность нормированных элементов $x_n \in H$, $\|x_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$ такая, что

$$\|Ax_n\|^2 + \|Lx_n\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1.11}$$

Записав

$$x_n = x_{n,1} + x_{n,0}, \quad x_{n,1} \perp \ker A, \quad x_{n,0} \in \ker A, \tag{1.12}$$

из (1.11) будем иметь $\|Ax_n\| = \|Ax_{n,1}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и из нормальной разрешимости оператора A вытекает соотношение

$$\|x_{n,1}\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1.13}$$

Тогда $\|x_{n,0}\| \to 1$ при $n \to \infty$. Принимая во внимание (1.11) и (1.12), получаем

$$\|Lx_{n,0}\| = \|LQx_{n,0}\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из полученного соотношения и ограниченной обратимости оператора (1.10) будем иметь $\|x_{n,0}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и из (1.13) получим предельное соотношение $\|x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, которое противоречит нормированности элементов x_n. Полученное противоречие доказывает взаимную дополнительность операторов A и L. Достаточность доказана.

Лемма 1.1 доказана.

Следствие 1.1. ***Пусть имеет место основное условие. Тогда оператор $LQ: H \to G$ нормально разрешимый.***

Следствие 1.2. ***Пусть оператор*** $A : H \to F$ ***нормально разрешимый и оператор*** **(1.10)** ***ограниченно обратимый. Тогда оператор*** $LQ : H \to G$ ***нормально разрешимый.***

Действительно, представив $H = \ker A \oplus^{\perp} \ker A$, получим

$$LQ(H) = LQ(\ker A) = R(LQ).$$

Из ограниченной обратимости оператора (1.10) имеем $\overline{R(LQ)} = R(LQ)$. Поэтому $\overline{LQ(H)} = LQ(H)$, что и требовалось доказать.

Замечание 1.1. Из условия взаимной дополнительности операторов A и L не вытекает нормальная разрешимость оператора A. Действительно, если $L = E$, то имеет место условие взаимной дополнительности (1.3) с постоянной $\gamma = 1$, для любого оператора A, в частности, не являющегося нормально разрешимым.

Лемма 1.2. ***Пусть оператор*** $A : H \to F$ ***нормально разрешимый. Тогда для взаимной дополнительности операторов*** A ***и*** $L : H \to G$ ***необходимо и достаточно выполнение равенства***

$$(LQ)^{+} LQ = Q. \tag{1.14}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть операторы A и L взаимно дополнительные. Докажем справедливость равенства (1.14).

Равенство ортогональных проекторов, действующих в одном и том же пространстве, эквивалентно равенству их ядер. Так как операторы $(LQ)^{+} LQ$ и Q являются ортогональными проекторами, то (1.14) эквивалентно равенству

$$\ker (LQ)^{+} LQ = \ker Q.$$

Включение $\ker Q \subset \ker (LQ)^{+} LQ$ является очевидным. Докажем обратное включение $\ker (LQ)^{+} LQ \subset \ker Q$.

Пусть $x \in \ker (LQ)^+ LQ$. Тогда $x \in \ker LQ$ и, следовательно, $LQx = 0$. Представим $x = x_0 + x_1$, где

$$x_0 \in \ker A = ^{\perp} \ker Q , \qquad x_1 \in ^{\perp} \ker A = \ker Q .$$

Тогда $Ax_0 = 0$, $Qx = Qx_0 = x_0$ и поэтому

$$Lx_0 = LQx_0 = LQx = 0 .$$

Из взаимной дополнительности операторов A и L получим

$$0 = \|Ax_0\|^2 + \|Lx_0\|^2 \geq \gamma \|x_0\|^2 .$$

Отсюда следует равенство $x_0 = 0$. Таким образом, нами получено $x = x_1 \in \ker Q$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть имеет место равенство (1.14). Докажем взаимную дополнительность операторов A и L.

Покажем вначале справедливость равенства

$$\ker A \bigcap \ker L = \{0\} . \tag{1.15}$$

Пусть $x \in \ker A \bigcap \ker L$. Тогда $Qx = x$ и $LQx = Lx = 0$. Отсюда и из равенства (1.14) будем иметь $x = Qx = (LQ)^+ LQx = 0$. Равенство (1.15) доказано.

Докажем теперь существование постоянной $\gamma > 0$, для которой справедливо (1.3). Предположим противное. Пусть не имеет место условие (1.3). Тогда существует последовательность нормированных элементов $x_n \in H$, $\|x_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, для которой имеет место соотношение (1.11). Представим x_n в виде (1.12). Тогда из соотношения $\|Ax_n\| = \|Ax_{n,1}\| \to 0$, $n \to \infty$ и нормальной разрешимости оператора A получим $\|x_{n,1}\| \to 0$,

$n \to \infty$ и, следовательно, $\left\| x_{n,0} \right\| \to 1$, $n \to \infty$. С другой стороны, из соотношения $\left\| Lx_n \right\| \to 0$, $n \to \infty$ и ограниченности оператора L будем иметь

$$\left\| Lx_{n,0} \right\| = \left\| L\left(x_n - x_{n,1} \right) \right\| \le \left\| Lx_n \right\| + \left\| L \right\| \left\| x_{n,1} \right\| \to 0, \quad n \to \infty. \quad (1.16)$$

Так как $x_{n,0} \in \ker A$, то $Qx_{n,0} = x_{n,0}$. Отсюда и из (1.14) получим $x_{n,0} = Qx_{n,0} = \left(LQ \right)^+ LQx_{n,0}$. Переходя к нормам в этом равенстве, из соотношения (1.16) и леммы 1.1 будем иметь

$$\left\| x_{n,0} \right\| \le \left\| \left(LQ \right)^+ \right\| \left\| LQx_{n,0} \right\| = \left\| \left(LQ \right)^+ \right\| \left\| Lx_{n,0} \right\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Полученное соотношение противоречит $\left\| x_{n,0} \right\| \to 1$, $n \to \infty$. Достаточность доказана.

Лемма 1.2 доказана.

Следствие 1.3. ***Пусть оператор*** $A : H \to F$ ***нормально разрешимый. Тогда для взаимной дополнительности операторов*** A ***и*** L ***необходимо и достаточно выполнение равенства***

$$QQ_1 = 0,$$

где

$$Q_1 = E - \left(LQ \right)^+ LQ.$$

Лемма 1.3. ***Для взаимной дополнительности операторов*** $A : H \to F$ ***и*** $L : H \to G$ ***необходимо ограниченная обратимость оператора*** $A^* A + \alpha L^* L$ ***для всех*** $\alpha > 0$ ***и достаточно – хотя бы для одного*** $\alpha > 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть операторы A и L взаимно дополнительные. Докажем ограниченную обратимость оператора $A^* A + \alpha L^* L$ для всех $\alpha > 0$.

Действительно, если $0 < \alpha \le 1$, то

$$\|Ax\|^2 + \alpha\|Lx\|^2 \geq \alpha\gamma\|x\|^2,$$

если $\alpha > 1$, то

$$\|Ax\|^2 + \alpha\|Lx\|^2 \geq \gamma\|x\|^2.$$

Полагая $\beta_\alpha = \min\{\alpha, 1\}$, из полученных оценок будем иметь

$$\|Ax\|^2 + \alpha\|Lx\|^2 \geq \beta_\alpha\|x\|^2.$$

Отсюда следует обратимость оператора $A^*A + \alpha L^*L$ для всех $\alpha > 0$. Покажем ограниченность оператора $\left(A^*A + \alpha L^*L\right)^{-1}$ для всех $\alpha > 0$.

Предположим противное. Пусть $\left(A^*A + \alpha L^*L\right)^{-1}$ не является ограниченным хотя бы для одного $\alpha > 0$. Тогда существует последовательность нормированных элементов $x_n \in H$, $\|x_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$ такая, что

$$\left\|\left(A^*A + \alpha L^*L\right)^{-1} x_n\right\| \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1.17}$$

Положим

$$y_n = \left(A^*A + \alpha L^*L\right)^{-1} x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.18}$$

Запишем условие взаимной дополнительности

$$\|Ay_n\|^2 + \|Ly_n\|^2 \geq \gamma\|y_n\|^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

то есть

$$\left(\left(A^*A + \alpha L^*L\right)y_n, y_n\right) \geq \gamma\|y_n\|^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, принимая во внимание обозначение (1.18), получим

$$\left(x_n, \left(A^*A + \alpha L^*L\right)^{-1} x_n\right) \geq \beta_\alpha\gamma\left\|\left(A^*A + \alpha L^*L\right)^{-1} x_n\right\|^2.$$

Поделим обе части этих неравенств на $\left\|\left(A^*A+\alpha L^*L\right)^{-1}x_n\right\|$:

$$\left(x_n, \frac{\left(A^*A+\alpha L^*L\right)^{-1}x_n}{\left\|\left(A^*A+\alpha L^*L\right)^{-1}x_n\right\|}\right) \geq$$

$$\geq \begin{cases} \alpha\gamma\left\|\left(A^*A+\alpha L^*L\right)^{-1}x_n\right\|, & 0<\alpha<1, \\ \gamma\left\|\left(A^*A+\alpha L^*L\right)^{-1}x_n\right\|, & \alpha\geq 1. \end{cases} \qquad (1.19)$$

Так как для всех $n\in\mathbb{N}$

$$\left(x_n, \frac{\left(A^*A+\alpha L^*L\right)^{-1}x_n}{\left\|\left(A^*A+\alpha L^*L\right)^{-1}x_n\right\|}\right) \leq \left\|x_n\right\| \left\|\frac{\left(A^*A+\alpha L^*L\right)^{-1}x_n}{\left\|\left(A^*A+\alpha L^*L\right)^{-1}x_n\right\|}\right\| = 1,$$

то переходя в (1.19) к пределу при $n\to\infty$, в силу (1.17), получим неверное неравенство $1\geq\infty$. Полученное противоречие доказывает ограниченность обратного оператора $\left(A^*A+\alpha L^*L\right)^{-1}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть оператор $A^*A+\alpha L^*L$ ограниченно обратимый хотя бы для одного $\alpha>0$. Докажем взаимную дополнительность операторов A и L.

Предположим противное. Пусть операторы A и L не удовлетворяют условию взаимной дополнительности. Это эквивалентно существованию последовательности нормированных элементов $x_n\in H$, $\left\|x_n\right\|=1$, $n\in\mathbb{N}$ таких, что

$$\left\|Ax_n\right\|^2+\left\|Lx_n\right\|^2\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Тогда $\left\|Ax_n\right\|\to 0$, $\left\|Lx_n\right\|\to 0$ при $n\to\infty$ и, следовательно,

$$\left(\left(A^*A+\alpha L^*L\right)x_n, x_n\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty .$$

Из ограниченной обратимости оператора $A^*A+\alpha L^*L$ следует существование $\gamma_0 > 0$ такое, что

$$\left\|\left(A^*A+\alpha L^*L\right)x_n\right\| \geq \gamma_0 \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N} .$$

Действительно, если это не так, то существует подпоследовательность x_{n_k} последовательности x_n такая, что $\left\|y_{n_k}\right\| \to 0$ при $k \to \infty$, где

$$y_{n_k} = \left(A^*A+\alpha L^*L\right)x_{n_k} .$$

Тогда из ограниченной обратимости $\left(A^*A+\alpha L^*L\right)^{-1}$ получим соотношение

$$\left\|x_{n_k}\right\| = \left\|\left(A^*A+\alpha L^*L\right)^{-1} y_{n_k}\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty ,$$

которое противоречит нормированности последовательности x_n. Достаточность доказана.

Лемма 1.3 доказана.

Положим

$$X_{-1} = \left(QL^*LQ\right)^+ ,$$

$$X_0 = T_0\left(A^*A\right)^+\left(E - L^*LX_{-1}\right) ,$$

$$X_m = TX_{m-1}, \qquad m \geq 1 ,$$

где операторы T_0 и T определены в (1.8).

Лемма 1.4. ***Пусть оператор*** $A: H \to F$ ***нормально разрешимый и операторы*** A ***и*** $L: H \to G$ ***взаимно дополнительные. Тогда справедливо разложение в операторный ряд***

$$\left(A^*A+\alpha L^*L\right)^{-1} = \sum_{m=-1}^{\infty} \alpha^m X_m , \tag{1.20}$$

сходящийся при $0<\alpha<\rho_0^{-1}$***, где*** $\rho_0=\rho(T)$ ***– спектральный радиус оператора*** **(1.8).**

Доказательство. Сходимость ряда (1.20) при $0<\alpha<\rho_0^{-1}$ следует из представления общего члена ряда

$$X_m=T^m X_0,\qquad m\ge 1.$$

Для доказательства справедливости равенства (1.20) используются следующие очевидные равенства

$$A^*AT_0=A^*A,\qquad A^*A\left(A^*A\right)^+=E-Q,$$

$$A^*AT+L^*L=QL^*L,\qquad QL^*L\left(LQ\right)^+=QL^*.$$

$$\left(A^*AT+L^*L\right)T_0=0.$$

Имеем:

$$A^*AX_{-1}=A^*A\left(LQ^*QL\right)^+=0$$

$$A^*AX_0+L^*LX_{-1}=A^*ATX_{-1}+A^*AT_0\left(A^*A\right)^++L^*LX_{-1}=$$

$$=\left(A^*AT+L^*L\right)X_{-1}+A^*A\left(A^*A\right)^+=$$

$$=QL^*L\left(QL^*LQ\right)^++E-Q=\left(LQ\right)^+LQ+E-\left(LQ\right)^+LQ=E$$

$$A^*AX_1+L^*LX_0=A^*ATX_0+L^*LX_0=$$

$$=\left(A^*AT+L^*L\right)T_0\left(A^*A\right)^+\left(E-L^*LX_{-1}\right)=0,$$

а при $m\ge 2$ имеем

$$A^*AX_m+L^*LX_{m-1}=-\left(A^*AT+L^*L\right)T_0\left(A^*A\right)^+L^*LX_{m-2}=0.$$

Из этих равенств будем иметь

$$\left(A^*A+\alpha L^*L\right)\sum_{m=-1}^{\infty}\alpha^m X_m =$$

$$= A^*AX_{-1}+\sum_{m=-1}^{\infty}\alpha^m\left(A^*AX_m + L^*LX_{m-1}\right)=E\,.$$

Лемма 1.4 доказана.

Лемма 1.5. ***Пусть оператор*** $A:H\to F$ ***нормально разрешимый и операторы*** A ***и*** $L:H\to G$ ***взаимно дополнительные. Тогда для любого*** $\alpha>0$ ***задача*** $\left(V;\ f,\, g\right)$ ***имеет единственное решение и представляется формулой*** **(1.9).**

Доказательство. Представим функционал $\Phi_\alpha\left(x\right)$ с помощью скалярных произведений:

$$\Phi_\alpha\left(x\right)=\left(Ax,Ax\right)+\alpha\left(Lx,Lx\right)-$$

$$-2\left(Ax,f\right)-2\alpha\left(Lx,g\right)+\left(f,f\right)+\alpha\left(g,g\right).$$

Запишем приращение функционала $\Phi_\alpha\left(x\right)$, когда аргумент получает приращение h:

$$\Phi_\alpha\left(x+h\right)-\Phi_\alpha\left(x\right)=2\left(Ax,Ah\right)+2\alpha\left(Lx,Lh\right)-$$

$$-2\left(f,Ah\right)-2\alpha\left(g,Lh\right)+\left(Ah,Ah\right)+\alpha\left(Lh,Lh\right)=$$

$$=2\left(\left(A^*A+\alpha L^*L\right)x-\left(A^*f+\alpha L^*g\right),h\right)+$$

$$+\left(Ah,Ah\right)+\alpha\left(Lh,Lh\right).$$

Из необходимого условия экстремума получим

$$\left(A^*A+\alpha L^*L\right)x-\left(A^*f+\alpha L^*g\right)=0\,,$$

то есть

$$\left(A^*A+\alpha L^*L\right)x = A^* f + \alpha L^* g\,. \tag{1.21}$$

В силу леммы 1.3 оператор $A^*A+\alpha L^*L$ при каждом $\alpha>0$ ограниченно обратимый. Поэтому уравнение (1.21) однозначно разрешимо для всех $f\in F$ и $g\in G$ при каждом $\alpha>0$ и его решение представляется формулой (1.9).

Лемма 1.5 доказана.

Из лемм 1.4 и 1.5 получаем представление для решения вариационной задачи $(V;\ f,g)$.

Лемма 1.6. ***Пусть оператор*** $A: H\to F$ ***нормально разрешимый и операторы*** A ***и*** $L: H\to G$ ***взаимно дополнительные. Тогда для любых*** $f\in F$ ***и*** $g\in G$ ***решение задачи*** $(V;\ f,g)$ ***можно представить в виде ряда***

$$x_\alpha(f,g)=\left(E-(LQ)^+L\right)A^+f+(LQ)^+g+\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^m T^{m-1}x_*\,,$$

где

$$x_* = -T_0\left(A^*A\right)^+L^*\left[LT_0A^+f-\left(E-L(LQ)^+\right)g\right].$$

Для формулировки следующего утверждения введем обозначения: $A_1: H_1\to F_1$ и $L_1: H_1\to G_1$ – линейные ограниченные операторы, где H_1,F_1,G_1 – гильбертовы пространства.

Лемма 1.7. ***Пусть оператор*** A_1 ***обратимый и операторы*** A_1 ***и*** L_1 ***взаимно дополнительные. Тогда для существования предела***

$$x_\alpha\left(f_1,0\right)\to x_0\left(f_1,0\right)\quad \text{при}\quad \alpha\to 0\,, \tag{1.22}$$

где $x_0\left(f_1,0\right)$ ***– некоторый элемент,***

$$x_\alpha\left(f_1,0\right)=\left(A_1^*A_1+\alpha L_1^*L_1\right)^{-1}A_1^*f_1\,, \tag{1.23}$$

а $f_1 \in F_1$ – произвольный элемент, необходимо и достаточно нормальная разрешимость оператора A_1.

Доказательство. Необходимость. Пусть имеет место предельное соотношение (1.22) для любого $f_1 \in F_1$. Докажем нормальную разрешимость оператора A_1.

Из обратимости оператора A_1, в частности, вытекает равенство

$$\ker A_1^* = \{0\}. \tag{1.24}$$

Из (1.23) для любого $\alpha > 0$ вытекает тождество

$$\left(A_1^* A_1 + \alpha L_1^* L_1\right) x_\alpha\left(f_1, 0\right) \equiv A_1^* f_1.$$

Переходя к пределу в этом тождестве при $\alpha \to 0$, получим $A_1^* A_1 x_1\left(f_1, 0\right) = A_1^* f_1$, то есть $A_1^*\left(A_1 x_1\left(f_1, 0\right) - f_1\right) = 0$. Отсюда и из (1.24) будем иметь $A_1 x_1\left(f_1, 0\right) - f_1 = 0$. Таким образом,

$$f_1 = A_1 x_1\left(f_1, 0\right) \in R\left(A_1\right)$$

и, следовательно, $R\left(A_1\right) = H_1$. Полученное равенство эквивалентно нормальной разрешимости оператора A_1. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть оператор A_1 нормально разрешимый. Докажем справедливость предельного соотношения (1.22) для любого $f_1 \in F_1$.

Из нормальной разрешимости оператора A_1 вытекает ограниченность обратного оператора A_1^{-1}. Тогда ограниченными являются операторы $\left(A_1^* A_1\right)^{-1}$ и $\left(A_1^* A_1\right)^{-1} L_1^* L_1$. Пусть

$$\left\|\left(A_1^* A_1\right)^{-1} L_1^* L_1\right\| \le m.$$

Тогда при $\alpha m \le q < 1$ оператор $A_1^* A_1 + \alpha L_1^* L_1$ ограниченно обратимый и имеет место оценка

$$\left\| \left(A_1^* A_1 + \alpha L_1^* L_1 \right)^{-1} A_1^* f_1 - A_1^{-1} f_1 \right\| \le \frac{\alpha m}{1-q} \left\| A_1^{-1} f_1 \right\|.$$

Отсюда следует справедливость (1.22) для любого $f_1 \in F_1$, причем $x_0\left(f_1, 0 \right) = A_1^{-1} f_1$. Достаточность доказана.

Лемма 1.7 доказана.

Лемма 1.8. ***Пусть операторы*** A ***и*** L ***взаимно дополнительные. Тогда для существования предела***

$$x_\alpha\left(f, 0 \right) \equiv \left(A^* A + \alpha L^* L \right)^{-1} A^* f \to x_0\left(f, 0 \right) \quad \text{при} \quad \alpha \to 0,$$

где $x_0\left(f_1, 0 \right)$ ***– некоторый элемент, а*** $f \in F$ ***– произвольный элемент, необходимо и достаточно, чтобы операторы*** A ***и*** LQ ***являлись нормально разрешимыми.***

Доказательство. Положим

$$H_1 =^{\perp} \ker A, \quad F_1 =^{\perp} \ker A^*, \quad A_1 = A\big|_{H_1}, \quad L_1 = L\big|_{H_1},$$

$$f = f_0 + f_1, \quad f_0 \in \ker A^*, \quad f_1 \perp \ker A^*.$$

Тогда $x_\alpha\left(f, 0 \right) \equiv x_\alpha\left(f_1, 0 \right) = \left(A_1^* A_1 + \alpha L_1^* L_1 \right)^{-1} A_1^* f_1$.

Оператор $A_1 : H_1 \to F_1$ обратимый. Это означает, что выполнены все условия леммы 1.7. Поэтому оператор A_1 нормально разрешимый. Отсюда и из равенства $R\left(A \right) = R\left(A_1 \right)$ вытекает нормальная разрешимость оператора $A : H \to F$.

Так как $x_\alpha = x_\alpha\left(f, 0 \right)$ – решение вариационной задачи (Б), то оно удовлетворяет уравнению

$$\left(A^*A+\alpha L^*L\right)x=A^*f\ . \tag{1.25}$$

Из нормальной разрешимости оператора A вытекает представление

$$x_\alpha=A^+f+Qy_0+\alpha y_\alpha\,, \tag{1.26}$$

где y_0 – фиксированный элемент, а y_α сходится к некоторому элементу y_* при $\alpha\to 0$: $y_\alpha\to y_0$ $(\alpha\to 0)$. Подставим (1.26) в (1.25), а затем сократим на общий множитель α:

$$A^*Ay_\alpha+L^*L\left(A^+f+Qy_0\right)+\alpha L^*Ly_\alpha=0\,.$$

Перейдем к пределу при $\alpha\to 0$:

$$A^*Ay_*+L^*L\left(A^+f+Qy_0\right)=0\,.$$

Так как $QA^*=0$, то, применяя проектор Q к последнему равенству, получим

$$QL^*LQy_0=-QL^*LA^+f\ .$$

Полученное уравнение разрешимо для любого $f\in F$. Поэтому оператор $QL^*LQ=\left(LQ\right)^*LQ$ является нормально разрешимым, откуда следует нормальная разрешимость оператора LQ.

Лемма 1.8 доказана.

Лемма 1.9. ***Пусть операторы A и L взаимно дополнительные. Тогда для существования предела***

$$x_\alpha\left(0,g\right)\equiv\alpha\left(A^*A+\alpha L^*L\right)^{-1}L^*g\to x_0\left(0,g\right)\quad\text{при}\quad \alpha\to 0\,,$$

где $x_0\left(0,g\right)$ – некоторый элемент, а $g\in G$ – произвольный элемент, необходимо нормальная разрешимость оператора LQ и достаточно нормальная разрешимость оператора A.

Доказательство. Необходимость. Пусть решение вариационной задачи $(V;\ f,g)$ сходится: $x_\alpha \equiv x_\alpha(0,g) \to x_*$ при $\alpha \to 0$, где $x_* \in H$ – некоторый элемент. Докажем нормальную разрешимость оператора LQ.

Представим элементы x_α и x_* в виде:

$$x_\alpha = x_{\alpha,0} + x_{\alpha,1}, \quad x_{\alpha,0} \in \ker A, \quad x_{\alpha,1} \perp \ker A, \tag{1.27}$$

$$x_* = x_{*,0} + x_{*,1}, \quad x_{*,0} \in \ker A, \quad x_{*,1} \perp \ker A.$$

Так как x_α удовлетворяет уравнению

$$A^* A x_\alpha + \alpha L^* L x_\alpha = \alpha L^* g\ ,$$

то из (1.27) получим

$$A^* A x_{\alpha,1} + \alpha L^* L x_{\alpha,0} + \alpha L^* L x_{\alpha,1} = \alpha L^* g\ . \tag{1.28}$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$ в этом равенстве, будем иметь $A^* A x_{*,1} = 0$. Отсюда следует включение $x_{*,1} \in \ker A$. Сопоставляя полученное включение с (1.27), получим $x_{*,1} = 0$ и, следовательно,

$$x_* = x_{*,0} \in \ker A. \tag{1.29}$$

Так как $QA^* = 0$, то из (1.28) будем иметь

$$QL^* L x_{\alpha,0} + QL^* L x_{\alpha,1} = QL^* g\ . \tag{1.30}$$

Осуществим предельный переход в (1.30) и, с учетом (1.29), будем иметь $QL^* L x_{*,0} = QL^* g$ или

$$QL^* LQ x_{*,0} = QL^* g\ . \tag{1.31}$$

Так как $g \in G$ – произвольный элемент, то разрешимость уравнения (1.31) влечет нормальную разрешимость оператора $QL^* LQ$, которая является необходимым и достаточным условием для нормальной разрешимости оператора LQ. Необходимость доказана.

Достаточность. Справедливость этой части утверждения следует из леммы 1.6 при $f = 0$.

Лемма 1.9 доказана.

1.6. Доказательства теорем 1.1 и 1.2.

Доказательство теоремы 1.1. Необходимость. Пусть стационарная задача $(S;\ f,\ g)$ однозначно разрешима для всех $f \in F$ и $g \in G$. Докажем выполнение основного условия.

Из однозначной разрешимости задачи $(S;\ f,\ g)$ вытекает, в частности, существование псевдорешений уравнения (1.1) для любого $f \in F$. Это означает, что псевдообратный оператор A^+ определен на всем пространстве F. Следовательно, оператор $A: H \to F$ нормально разрешимый.

Любое псевдорешение уравнения (1.1) представляется формулой

$$x = A^+ f + Qy, \qquad \left(Q = E - A^+ A\right), \tag{1.32}$$

где $y \in H$ – произвольный элемент. Следовательно, множеством псевдорешений уравнения (1.1) является

$$K = \left\{A^+ f + Qy : y \in H\right\}. \tag{1.33}$$

Так как задача $(S;\ f,\ g)$ однозначно разрешима, то уравнение (1.2) имеет квазирешения на множестве K для любого $g \in G$. Подставим x из (1.32) в (1.2):

$$LQy = g - LA^+ f\ . \tag{1.34}$$

Псевдорешениями этого уравнения являются

$$y = (LQ)^+ \left(g - LA^+ f\right) + Q_1 z, \qquad \left(Q_1 = E - (LQ)^+ LQ\right), \tag{1.35}$$

где $z \in H$ – произвольный элемент. Подставляя y из (1.35) в (1.32), получим решение задачи $(S;\ f,\ g)$:

$$x = A^+ f + Q(LQ)^+ \left(g - LA^+ f\right) + QQ_1 z\ . \tag{1.36}$$

Согласно необходимому условию, задача $(S;\ f,\ g)$ имеет единственное решение. Следовательно, последнее слагаемое в правой части (1.36) равно нулю для любого $z \in H$: $QQ_1 z = 0$. Это эквивалентно равенству $QQ_1 = 0$. Отсюда, в силу следствия 1.2, получим взаимную дополнительность операторов A и L. Таким образом, имеет место основное условие. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть имеет место основное условие. Докажем однозначную разрешимость задачи $(S;\ f,\ g)$.

Так как оператор $A: H \to F$ нормально разрешимый, то псевдообратный оператор A^+ определен на всем пространстве F: $D\left(A^+\right) = F$. Поэтому уравнение (1.1) имеет псевдорешения для любого $f \in F$ и они представляются равенством (1.32). Подставив x из (1.32) в (1.2), получим уравнение (1.34). Отсюда следует, что задача нахождения квазирешения уравнения (1.2) на множестве (1.33) является эквивалентной задаче нахождения псевдорешений уравнения (1.34). В силу следствия 1.1 оператор $LQ: H \to G$ нормально разрешимый. Поэтому из уравнения (1.34) получаем представление (1.35) и отсюда – представление (1.36) для искомого квазирешения. Принимая во внимание утверждение следствия 1.2, из (1.36), получим единственность решения задачи $(S;\ f,\ g)$, которое представляется формулой (1.7). Достаточность доказана.

Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Необходимость. Пусть вариационная задача $(V;\ f,\ g)$ для всех $f \in F$, $g \in G$ и $\alpha > 0$ имеет единственное решение $x_\alpha \equiv x_\alpha(f, g)$, сходящееся при $\alpha \to 0$: $\lim\limits_{\alpha \to 0} x_\alpha = x_*$, где $x_* \in H$ – некоторый элемент. Докажем выполнение основного условия.

Так как при всех $f \in F$, $g \in G$ и $\alpha > 0$

$$x_\alpha(f, g) = x_\alpha(f, 0) + x_\alpha(0, g), \tag{1.37}$$

то из лемм 1.8 и 1.9 вытекает нормальная разрешимость операторов A и LQ. Затем из леммы 1.1 получаем взаимную дополнительность операторов A и L. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть имеет место основное условие. Тогда из представления (1.37) и лемм 1.8 и 1.9 следует существование предела решения вариационной задачи x_α при $\alpha \to 0$. Из леммы 1.6 получаем предельное соотношение

$$\lim_{\alpha\to 0} x_\alpha(f,g) = x_0(f,g) \equiv \left(E-(LQ)^+ L\right)A^+ f + (LQ)^+ g$$

и оценку

$$\left\| x_\alpha(f,g) - x_0(f,g) \right\| \le m\alpha$$

для всех $\alpha : 0 < \alpha < q_0 \rho_0^{-1}$, где $q_0 : 0 < q_0 < 1$ – произвольное число, $\rho_0 = \rho(T)$ – спектральный радиус оператора (1.8), а

$$m = \frac{1}{1-q_0}\left\| T_0\left(A^* A\right)^+ L^*\left[LT_0 A^+ f - \left(E - L(LQ)^+\right) g\right]\right\|$$

Достаточность доказана.

Теорема 1.2 доказана.

2. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ L-ПСЕВДООБРАЩЕНИЯ

2.1. Формулировки двойственных задач. Пусть $A: H \to F$ и $L: H \to G$ – линейные ограниченные операторы, $f \in F$ и $g \in G$ – заданные элементы, H, F и G – гильбертовы пространства. Ниже рассматриваются операторные уравнения

$$Ax = f\ ; \tag{2.1}$$

$$Lx = g\ . \tag{2.2}$$

Напомним, что в § 1.2 были изучены:

стационарная задача $(S; f, g)$**:** найти квазирешение уравнения (2.2) на множестве псевдорешений уравнения (2.1);

вариационная задача $(V;f,g)$**:** найти элемент $x_\alpha \in H$, доставляющий минимум функционалу

$$\Phi_\alpha(x)=\|Ax-f\|^2+\alpha\|Lx-g\|^2 \to \min, \qquad x\in H, \tag{2.3}$$

где $\alpha>0$, и исследовать его предельные свойства при $\alpha\to 0$.

Наряду с этими задачами рассмотрим:

стационарную двойственную задачу $(S^*;f,g)$**:** найти квазирешение уравнения (2.1) на множестве псевдорешений уравнения (2.2);

вариационную двойственную задачу $(V^*;f,g)$**:** найти элемент $x_\alpha \in H$, доставляющий минимум функционалу (2.3), где $\alpha>0$, и исследовать его предельные свойства при $\alpha\to\infty$.

В данном параграфе будут установлены разрешимость и однозначная разрешимость двойственных задач, связь между решениями двойственных и прямых задач в совместных и несовместных случаях, доказаны скорость сходимости решения вариационной двойственной задачи к решению стационарной двойственной задачи.

2.2. Совместный случай. Ниже будут использованы четыре проектора, и во избежание путаницы переобозначим проекторы Q и Q_1, введенные в § 1, и определим ещё два:

$$Q_A=E-A^+A, \qquad Q_{LQ}=E-(LQ_A)^+(LQ_A)$$

$$Q_L=E-L^+L, \qquad Q_{AQ}=E-(AQ_L)^+(AQ_L).$$

Напомним, что Q_A является ортогональным проектором на ядро оператора A, а Q_L, Q_{LQ} и Q_{AQ} – ортогональные проекторы на ядра операторов L, LQ_A и AQ_L, соответственно.

Пусть $f_0\in F$, $g_0\in G$ – заданные элементы. Положим

$$x_0=A^+f_0+(LQ_A)^+(g_0-LA^+f_0), \tag{2.4}$$

$$x_0^* = L^+ g_0 + \left(AQ_L\right)^+ \left(f_0 - AL^+ g_0\right). \tag{2.5}$$

Решения стационарной задачи $\left(S;\, f_0, g_0\right)$ и стационарной двойственной задачи $\left(S^*;\, f_0, g_0\right)$ связаны с элементами (2.4) и (2.5). А именно, справедливо следующее утверждение:

Лемма 2.1. а) ***Если при данных*** $f_0 \in F$ ***и*** $g_0 \in G$ ***задача*** $\left(S;\, f_0, g_0\right)$ ***является разрешимой, то её решения представляются в виде***

$$x = x_0 + Q_A Q_{LQ} u\,, \tag{2.6}$$

где $u \in H$ ***– произвольный элемент.***

б) ***Если при данных*** $f_0 \in F$ ***и*** $g_0 \in G$ ***задача*** $\left(S^*;\, f_0, g_0\right)$ ***является разрешимой, то её решение представляется в виде***

$$x^* = x_0^* + Q_L Q_{AQ} v\,,$$

где $v \in H$ ***– произвольный элемент.***

Доказательство леммы 2.1. а) Пусть при данных $f_0 \in F$, $g_0 \in G$ задача $\left(S;\, f_0, g_0\right)$ является разрешимой. Все псевдорешения уравнения $Ax = f_0$ представляются в виде

$$x = A^+ f_0 + Q_A y, \qquad y \in H\,. \tag{2.7}$$

Подставим полученное выражение в уравнение $Lx = g_0$ и для нахождения y получим

$$LQ_A y = g_0 - LA^+ f_0\,. \tag{2.8}$$

Так как задача $\left(S;\, f_0, g_0\right)$ является разрешимой, то уравнение (2.8) имеет псевдорешения, и они записываются в виде

$$y = \left(LQ_A\right)^+ \left(g_0 - LA^+ f_0\right) + Q_{LQ} u\,, \tag{2.9}$$

где $u \in H$ – произвольный элемент. Отсюда и из (2.7) получаем справедливость пункта а).

Пункт б) доказывается аналогично пункту а).

Лемма 2.1 доказана.

Для установления связи между решениями стационарных задач $\left(S; f_0, g_0\right)$ и $\left(S^*; f_0, g_0\right)$ важную роль сыграют следующие леммы.

Лемма 2.2. ***Следующие утверждения являются эквивалентными:***

а) ***система***

$$\begin{cases} Ax = f_0, \\ Lx = g_0 \end{cases}. \tag{2.10}$$

для данных $f_0 \in F$ ***и*** $g_0 \in G$ ***является совместной;***

б) ***имеют место включения:***

$$f_0 \in R(A), \qquad g_0 - LA^+ f_0 \in R\left(LQ_A\right); \tag{2.11}$$

в) ***имеют место включения:***

$$g_0 \in R(L), \qquad f_0 - AL^+ g_0 \in R\left(AQ_L\right). \tag{2.12}$$

Доказательство леммы 2.2. Если будет доказана эквивалентность условий а) и б), то, поменяв местами уравнения системы (2.10) и повторив выкладки, проведенные в доказательстве эквивалентности условий а) и б), получим эквивалентность условий а) и в).

Доказательство импликации а) $\Rightarrow$ б). Пусть для данных $f_0 \in F$ и $g_0 \in G$ система (2.10) является совместной. Докажем справедливость включений (2.11) для данных элементов f_0 и g_0.

Справедливость первого включения (2.11) следует из разрешимости первого уравнения системы (2.10). Покажем справедливость второго включения (2.11).

Все решения первого уравнения системы (2.10) представляются в виде (2.7). Подставляя x из этого представления во второе уравнение системы (2.10), получим уравнение (2.8). Из совместности системы (2.10) вытекает разрешимость уравнения (2.8). Следовательно, справедливо и второе из включений (2.11). Импликация а) $\Rightarrow$ б) доказана.

Доказательство импликации б) $\Rightarrow$ а). Пусть имеют место включения (2.11). Докажем совместность системы (2.10).

Разрешимость первого уравнения системы (2.10) следует из включения $f_0 \in R(A)$. При этом решения этого уравнения представляются формулой (2.7) и элемент y является решением уравнения (2.8). Из второго включения (2.11) вытекает разрешимость уравнения (2.8) и, следовательно, система (2.10) является совместной. Импликация б) $\Rightarrow$ а) доказана.

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. ***Каждый из операторов*** $Q_A Q_{LQ}$ ***и*** $Q_L Q_{AQ}$ ***является проектором на подпространство*** $\ker A \bigcap \ker L$***, причем***

$$R\left(Q_A Q_{LQ}\right) = \ker A \bigcap \ker L = R\left(Q_L Q_{AQ}\right). \tag{2.13}$$

Доказательство леммы 2.3. Докажем включение

$$R\left(Q_A Q_{LQ}\right) \subset \ker A \bigcap \ker L. \tag{2.14}$$

Пусть $x \in H$ – произвольный элемент. Положим $y = Q_A Q_{LQ} x$. Так как AQ_A и $LQ_A Q_{LQ}$ являются нулевыми операторами, то $Ay = 0$ и $Ly = 0$. Поэтому $y \in \ker A \bigcap \ker L$. Включение (2.14) доказано.

Докажем обратное включение

$$\ker A \bigcap \ker L \subset R\left(Q_A Q_{LQ}\right). \tag{2.15}$$

Пусть $y \in \ker A \bigcap \ker L$ – произвольный элемент. Тогда $Q_A y = y$ и $Ly = 0$. Далее имеем

$$Q_A Q_{LQ} y = Q_A\left(y - \left(LQ_A\right)^+ LQ_A y\right) = Q_A y - \left(LQ_A\right)^+ Ly = y.$$

Следовательно, $y \in R\left(Q_A Q_{LQ}\right)$. Включение (2.15) доказано.

Первое равенство (2.13) доказано. Второе равенство (2.13) доказывается аналогично.

Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. ***Пусть имеет место любое из эквивалентных условий*** **а) – в)** ***леммы 2.2. Тогда для любого элемента*** $u \in H$ ***найдется*** $v \in H$ ***такое, что***

$$x_0^* + Q_L Q_{AQ} v = x_0 + Q_A Q_{LQ} u \, ; \qquad (2.16)$$

и для любого $v \in H$ ***найдется*** $u \in H$ ***такое, что***

$$x_0 + Q_A Q_{LQ} u = x_0^* + Q_L Q_{AQ} v \, . \qquad (2.17)$$

Доказательство леммы 2.4. Так как условия а) – в) леммы 2.2 эквивалентны, то будем считать, что имеет место каждое из этих условий.

Из первого включения (2.11) получим представление (2.7) для псевдорешений уравнения (2.1). Подставив полученные псевдорешения в (2.2) получим уравнение (2.8). Отсюда, в силу второго включения (2.11), получим представление для решения задачи $\left(S;\, f_0, g_0\right)$

$$x = A^+ f_0 + \left(LQ_A\right)^+ \left(g_0 - LA^+ f_0\right) + Q_A Q_{LQ} u, \qquad u \in H \, . \qquad (2.18)$$

Из второго включения (2.12) получим представление для псевдорешений уравнения (2.2) $x = L^+ g_0 + Q_L y, \quad y \in H$. Подставив полученные псевдорешения в (2.1), получим уравнение $AQ_L y = f_0 - AL^+ g_0$. Отсюда, в силу второго включения (2.12), получим представление для решения задачи $\left(S^*;\, f_0, g_0\right)$

$$x = L^+ g_0 + \left(AQ_L\right)^+ \left(f_0 - AL^+ g_0\right) + Q_L Q_{AQ} v, \qquad v \in H \, . \qquad (2.19)$$

Полученные решения (2.18) и (2.19) являются также решениями системы (2.10). Отсюда и из леммы 2.3 следует справедливость обоих равенств (2.16) и (2.17).

Лемма 2.4 доказана.

Заметим, что в формулировках лемм 2.1 – 2.4 не требуются ни нормальная разрешимость операторов A и L, ни их взаимная дополнительность. При наличии дополнительных условий эти утверждения можно усилить. В частности, рассмотрим условие

$$\ker A \bigcap \ker L = \{0\}. \tag{2.20}$$

Теорема 2.1. ***Следующие утверждения являются эквивалентными:***

а) ***система* (2.10) *для данных*** $f_0 \in F$ ***и*** $g_0 \in G$ ***имеет единственное решение*** $\tilde{x}$***;***

б) ***задача*** $(S; f_0, g_0)$ ***имеет единственное решение*** x_0***, определенное в* (2.4);**

в) ***задача*** $(S^*; f_0, g_0)$ ***имеет единственное решение*** x_0^****, определенное в* (2.5);**

г) ***имеют место включения* (2.11) *и условие* (2.20)*;***

д) ***имеют место включения* (2.12) *и условие* (2.20)*;***

При этом справедливы равенства

$$\tilde{x} = x_0 = x_0^*. \tag{2.21}$$

Доказательство импликации а) $\Rightarrow$ б). Покажем, что задача $(S; f_0, g_0)$ имеет единственное решение, и оно определяется формулой (2.4). Нетрудно проверить, что все решения задачи $(S; f_0, g_0)$ представляются формулой (2.6). С другой стороны, для каждого $u \in H$ элемент (2.4) является решением системы (2.10). Согласно предположению у системы (2.10) решение единственное. Поэтому

$$Q_A Q_{LQ} u = 0 \tag{2.22}$$

для всех $u \in H$. Это означает, что формула (2.6) определяет один единственный элемент x_0 и, следовательно, задача $(S; f_0, g_0)$ имеет единственное решение, определенное в (2.4). Импликация а) $\Rightarrow$ б) доказана.

Доказательство импликации б) $\Rightarrow$ а). Как было отмечено выше, все решения задачи $\left(S; f_0, g_0\right)$ представляются равенством (2.6). По условию б) у этой задачи только одно решение. Поэтому справедливо равенство (2.22).

С другой стороны, все решения системы (2.10) представляются равенством (2.18), где $u \in H$ – произвольный элемент. Отсюда и из равенства (2.22) следует единственность этого решения. Импликация б) $\Rightarrow$ а) доказана. Одновременно доказано первое из равенств (2.21).

Доказательства импликаций а) $\Rightarrow$ в) и в) $\Rightarrow$ а) повторяют вышеприведенные доказательства, с той лишь разницей, что в системе (2.10) нужно поменять местами уравнения.

Доказательство импликации а) $\Rightarrow$ г). Справедливость включений (2.11) следует из леммы 2.2. Покажем справедливость равенства (2.20). Пусть $z \in \ker A \bigcap \ker L$. В силу эквивалентности условий а) и б) следует, что $x = x_0 + z$ является решением системы (2.10). Из единственности решения системы (2.10) вытекает, что $z = 0$. Это эквивалентно равенству (2.20). Импликация а) $\Rightarrow$ г) доказана.

Доказательство импликации г) $\Rightarrow$ а). Заметим, что из условия (2.20) вытекает равенство (2.22). Действительно, для любого $x \in H$ из равенств $AQ_A = 0$ и $LQ_AQ_{LQ} = 0$ имеем

$$Q_AQ_{LQ}x \in \ker A, \qquad Q_AQ_{LQ}x \in \ker L.$$

Далее из включений (2.11) последовательно следуют представления (2.7), (2.9) и (2.6). Наконец, учитывая (2.22), из (2.6) вытекает единственность решения системы (2.10). Импликация г) $\Rightarrow$ а) доказана.

Доказательства импликаций а) $\Rightarrow$ д) и д) $\Rightarrow$ а) повторяют вышеприведенные доказательства, с той лишь разницей, что в системе (2.10) нужно поменять местами уравнения.

Теорема 2.1 доказана.

2.3. Общий (несовместный) случай. Для того чтобы вместо задач $\left(S; f, g\right)$ и $\left(S^*; f, g\right)$ с произвольными правыми частями $f \in F$ и $g \in G$

рассматривать соответствующие равносильные совместные задачи, вводим следующие элементы:

$$\begin{cases} f_{01} = AA^{+} f, \\ g_{01} = LA^{+} f + L\left(LQ_{A}\right)^{+}\left(g - LA^{+} f\right), \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} f_{02} = AL^{+} g + A\left(AQ_{L}\right)^{+}\left(f - AL^{+} g\right), \\ g_{02} = LL^{+} g, \end{cases} . \quad (2.24)$$

Замечание. Так как $f \in F$ и $g \in G$ – произвольные элементы, то элементы f_{01}, g_{01}, f_{02}, g_{02} определены не всегда. Например, для того чтобы элемент f_{01} был определен, необходимо и достаточно, чтобы ортогональная проекция элемента $f \in F$ на подпространство $\overline{R(A)}$ принадлежала образу $R(A)$ оператора A. Если указанная проекция не принадлежит образу $R(A)$, то элемент f_{01} не определен.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 2.2. а) ***Задача*** $(S; f, g)$ ***с произвольными правыми частями*** $f \in F$ ***и*** $g \in G$ ***эквивалентна задаче*** $(S; f_{01}, g_{01})$ ***с правыми частями*** f_{01} ***и*** g_{01} ***из*** **(2.23).**

б) ***Задача*** $(S^{*}; f, g)$ ***с произвольными правыми частями*** $f \in F$ ***и*** $g \in G$ ***эквивалентна задаче*** $(S^{*}; f_{02}, g_{02})$ ***с правыми частями*** f_{02} ***и*** g_{02} ***из*** **(2.24).**

Доказательство теоремы 2.2. а) Рассмотрим возможные случаи. Задача $(S; f, g)$: 1) не имеет решения; 2) имеет решение; 3) имеет единственное решение. Пункт а) будет полностью доказан, если и задача $(S; f_{01}, g_{01})$ с правыми частями f_{01} и g_{01} из (2.23) в соответствующих случаях: 1) не имеет решения; 2) имеет решение; 3) имеет единственное решение.

1) Пусть задача $(S; f, g)$ для данных правых частей $f \in F$ и $g \in G$ не имеет решения. Это означает, что либо 1.1) уравнение (2.1) не имеет псевдорешения, либо 1.2) уравнение (2.1) имеет псевдорешения, но уравнение (2.2) на множестве псевдорешений уравнения (2.1) не имеет квазирешения.

Случай 1.1). Отсутствие псевдорешения уравнения (2.1) означает, что ортогональная проекция элемента f на подпространство $\overline{R(A)}$ не принадлежит образу $R(A)$ оператора A. Тогда элемент f не принадлежит области определения $D(A^+)$ псевдообратного оператора A^+ и, следовательно, не определен элемент f_{01} из (2.23). Поэтому и задача $(S; f_{01}, g_{01})$ не имеет решения.

Случай 1.2). Если элемент f принадлежит области определения псевдообратного оператора A^+, то псевдорешения уравнения (2.1) представляются формулой

$$x = A^+ f + Q_A y . \tag{2.25}$$

Элемент y, входящий в (2.25), определяется как псевдорешение уравнения

$$LQ_A y = g - LA^+ f . \tag{2.26}$$

Так как уравнение (2.2) на множестве псевдорешений уравнения (2.1) для данных f и g не имеет квазирешения, то уравнение (2.26) не имеет псевдорешения. Это означает, что элемент $g - LA^+ f$ не принадлежит области определения $D\left((LQ_A)^+\right)$ псевдообратного оператора $(LQ_A)^+$. Следовательно, не определен элемент g_{01} из (2.23). Поэтому и задача $(S; f_{01}, g_{01})$ не имеет решения.

2) Пусть задача $(S; f, g)$ для данных правых частей $f \in F$ и $g \in G$ имеет решение. Докажем, что и задача $(S; f_{01}, g_{01})$ имеет решение.

Действительно, представляя псевдорешения уравнения (2.1) в виде (2.25), находим псевдорешения уравнения (2.26):

$$y = (LQ_A)^+ (g - LA^+ f) + Q_{LQ} z, \qquad z \in H . \tag{2.27}$$

Тогда решения задачи $(S; f, g)$ представляются формулой

$$x = A^+ f + (LQ_A)^+ (g - LA^+ f) + Q_A Q_{LQ} z, \qquad z \in H . \tag{2.28}$$

Так как $f \in D(A^+)$, то $f_{01} \in R(A)$ и так как $g - LA^+ f \in D\left((LQ_A)^+\right)$, то $g_{01} - LA^+ f_{01} \in R(LQ_A)$. Поэтому задача $(S; f_{01}, g_{01})$ имеет решение и оно представляется в виде

$$x = A^+ f_{01} + (LQ_A)^+ (g_{01} - LA^+ f_{01}) + Q_A Q_{LQ} w, \qquad w \in H . \tag{2.29}$$

Так как $A^+ A A^+ = A^+$ и $(LQ_A)^+ L (LQ_A)^+ = (LQ_A)^+$, то имеем

$$A^+ f_{01} = A^+ A A^+ f = A^+ f , \tag{2.30}$$

$$(LQ_A)^+ (g_{01} - LA^+ f_{01}) =$$

$$= (LQ_A)^+ \left(LA^+ f + L(LQ_A)^+ (g - LA^+ f) - LA^+ f\right) =$$

$$= (LQ_A)^+ \left(L(LQ_A)^+ (g - LA^+ f)\right) = (LQ_A)^+ (g - LA^+ f) . \tag{2.31}$$

Равенства (2.30) и (2.31) показывают, что правая часть решения (2.29) совпадает с правой частью решения (2.28).

3) Пусть задача $(S; f, g)$ для данных правых частей $f \in F$ и $g \in G$ имеет единственное решение. Так как для любого $z \in H$ элемент (2.28) является решением задачи $(S; f, g)$, то $Q_A Q_{LQ} = 0$. Отсюда и из (2.29) вытекает единственность решения задачи $(S; f_{01}, g_{01})$. Согласно предыдущему пункту эти единственные решения совпадают.

Пункт а) доказан. Справедливость пункта б) устанавливается аналогичными рассуждениями.

Теорема 2.2 доказана.

Теорема 2.3. ***Следующие утверждения являются эквивалентными:***

а) ***для всех*** $f \in F$ ***и*** $g \in G$ ***задача*** $(S;\ f,\ g)$ ***является однозначно разрешимой:***

б) ***имеет место основное условие;***

в) ***система***

$$\begin{cases} Ax = f_{01}, \\ Lx = g_{01} \end{cases} \tag{2.32}$$

является однозначно разрешимой;

г) ***имеют место условие*** **(2.20)** ***и включения***

$$f_{01} \in R(A), \qquad g_{01} - LA^{+} f_{01} \in R\left(LQ_A\right);$$

д) ***имеют место условие*** **(2.20)** ***и включения***

$$g_{01} \in R(L), \qquad f_{01} - AL^{+} g_{01} \in R\left(AQ_L\right).$$

Доказательство теоремы 2.3. Справедливость эквивалентности а) $\Leftrightarrow$ б) доказана в теореме 1.1, а справедливость эквивалентностей в) $\Leftrightarrow$ г) $\Leftrightarrow$ д) получается из эквивалентностей а) $\Leftrightarrow$ г) $\Leftrightarrow$ д) теоремы 2.1 при $f_0 = f_{01}$, $g_0 = g_{01}$. Для завершения доказательства данной теоремы осталось установить справедливость эквивалентности б) $\Leftrightarrow$ в).

Доказательство импликации б) $\Rightarrow$ в). Пусть имеет место основное условие. Докажем однозначную разрешимость системы (2.32) для всех $f \in F$ и $g \in G$.

Основное условие, во-первых, включает в себе нормальную разрешимость оператора $A: H \to F$. Поэтому псевдообратный оператор A^+ определен во всем пространстве F и, следовательно, определен элемент f_{01} по формуле (2.23). Так как $f_{01} \in R(A)$, то первое уравнение системы (2.32) является совместным. Решение этого уравнения представляется формулой

$$x = A^+ f_{01} + Q_A y, \quad y \in H.$$

Отсюда и из второго уравнения системы (2.32) для нахождения промежуточного неизвестного элемента y получим уравнение

$$LQ_A y = g_{01} - LA^+ f_{01}.$$

Основное условие, во-вторых, включает в себе взаимную дополнительность операторов A и L. Отсюда и из следствия 1.1 вытекает нормальная разрешимость оператора $LQ_A: \ H \to G$. Поэтому псевдообратный оператор $\left(LQ_A\right)^+$ определен во всем пространстве G. Псевдорешения последнего уравнения можно представить в виде

$$y = \left(LQ_A\right)^+ \left(g_{01} - LA^+ f_{01}\right) + Q_{LQ} z, \quad \forall z \in H.$$

Так как

$$g_{01} - LA^+ f_{01} = \left(LQ_A\right)\left(LQ_A\right)^+ \left(g - LA^+ f\right) \in R\left(LQ_A\right), \tag{2.33}$$

то полученное псевдорешение является решением уравнения. Следовательно, уравнение $LQ_A y = g_{01} - LA^+ f_{01}$ является совместным. Решения этого уравнения представляются формулой

$$y = \left(LQ_A\right)^+ \left(g_{01} - LA^+ f_{01}\right) + Q_{LQ} z, \quad \forall z \in H.$$

Таким образом, система (2.32) является совместной, и ее решения представляются в виде

$$x = A^{+} f_{01} + \left(LQ_A\right)^{+}\left(g_{01} - LA^{+} f_{01}\right) + Q_A Q_{LQ} z, \qquad \forall z \in H \ .$$

Покажем, что $Q_A Q_{LQ} z = 0$ для всех $z \in H$. Действительно, так как операторы AQ_A и $LQ_A Q_{LQ}$ являются нулевыми, то элемент $w = Q_A Q_{LQ} z$ принадлежит и ядру оператора A, и ядру оператора L. Отсюда и из условия взаимной дополнительности операторов A и L получаем равенство $w = Q_A Q_{LQ} z = 0$. Итак, система (2.32) является однозначно разрешимой для всех $f \in F$ и $g \in G$. Импликация б) $\Rightarrow$ в) доказана.

Доказательство импликации в) $\Rightarrow$ б). Пусть система (2.32) является однозначно разрешимой для всех $f \in F$ и $g \in G$. Докажем выполнение основного условия.

Из однозначной разрешимости системы (2.32) для всех $f \in F$ и $g \in G$ вытекает выполнение равенства (2.20). Действительно, если x – решение системы (2.32), то $x + y$ также является решением этой системы для любого $y \in \ker A \bigcap \ker L$. Из единственности решения системы (2.32) вытекает, что $y = 0$. Это означает выполнение равенства (2.20).

Так как система (2.32) однозначно разрешима, то уравнение $Ax = f_{01}$ является совместным. Поэтому элемент f_{01} определен для любого $f \in F$. Это означает, что псевдообратный оператор A^{+} определен во всем пространстве F и, следовательно, оператор A нормально разрешимый.

Подставим решение $x = A^{+} f_{01} + Q_A y$, $y \in H$ первого уравнения системы (2.32) во второе уравнение и для нахождения y получим уравнение $LQ_A y = g_{01} - A^{+} f_{01}$. Из однозначной разрешимости системы (2.32) вытекает совместность этого уравнения и, следовательно,

$$g_{01} - A^{+} f_{01} \in R\left(LQ_A\right).$$

Из (2.33) получим

$$g_{01} - A^{+} f_{01} = L\left(LQ_A\right)^{+}\left(g - A^{+} f\right).$$

Так как множество $\left\{g - A^{+} f : f \in F,\, g \in G\right\}$ совпадает с пространством G, то псевдообратный оператор $\left(LQ_A\right)^{+}$ определен во всем пространстве. Следовательно, оператор LQ_A нормально разрешимый. Отсюда, из нормальной разрешимости оператора A и наличия условия (2.20), вытекает выполнение взаимной дополнительности операторов A и L. Импликация в) $\Rightarrow$ б) доказана.

Теорема 2.3 доказана.

Теорема 2.4. ***Следующие утверждения эквивалентны:***

а) ***для всех*** $f \in F$ ***и*** $g \in G$ ***задача*** $\left(S^{*};\, f,\, g\right)$ ***является однозначно разрешимой:***

б) ***имеет место основное условие;***

в) ***система***

$$\begin{cases} Ax = f_{02}, \\ Lx = g_{02} \end{cases} \tag{2.34}$$

является однозначно разрешимой;

г) ***имеют место условие* (2.20) *и включения***

$$f_{02} \in R(A), \qquad g_{02} - LA^{+} f_{02} \in R\left(LQ_A\right);$$

д) ***имеют место условие* (2.20) *и включения***

$$g_{02} \in R(L), \qquad f_{02} - AL^{+} g_{02} \in R\left(AQ_L\right).$$

Доказательство теорема 2.4. Справедливость этой теоремы следует из теоремы 2.3, если повторить рассуждения, приведенные в доказательстве этой теоремы, предварительно поменяв местами уравнения системы (2.32).

2.4. Сведение общего случая к совместному. Ниже сформулированы и доказаны утверждения, в которых для произвольных правых частей $f \in F$ и $g \in G$ устанавливается связь между задачами $(S; f, g)$, $(S^*; f, g)$ с совместными системами (2.32) и (2.34), при самых общих предположениях относительно операторов A и L.

Теорема 2.5. ***Пусть*** $f \in F$ ***и*** $g \in G$ ***– произвольные элементы. Тогда система* (2.32) *с правой частью*** (f_{01}, g_{01}) ***из* (2.23) *эквивалентна:***

а) ***задаче*** $(S; f, g)$***;***

б) ***задаче*** $(S^*; f, g)$**.**

Доказательство теоремы 2.5. а) Рассмотрим три случая – стационарная задача $(S; f, g)$: 1) не имеет решения; 2) имеет более одного решения; 3) имеет единственное решение.

1). Пусть задача $(S; f, g)$ для данных правых частей $f \in F$ и $g \in G$ не имеет решения. Это означает, что либо а) уравнение (2.1) не имеет решения, либо б) уравнение (2.2) на множестве псевдорешений уравнения (2.1) не имеет квазирешения.

Случай а). Отсутствие псевдорешения уравнения (2.1) означает, что $f_1 \notin R(A)$, где f_1 ортогональная проекция f на замыкание $\overline{R(A)}$. Тогда элемент f не попадает в область определения псевдообратного оператора A^+ и, следовательно, не определен элемент f_{01} из (2.23). Поэтому и система (2.32) с правой частью (f_{01}, g_{01}) из (2.23) не имеет решения.

Случай б). Если $f_1 \in R(A)$, то псевдорешения уравнения (2.1) представляются формулой (2.25). Элемент y, входящий в представление (2.25), определяется как псевдорешение уравнения (2.26). Так как уравнение (2.2) на множестве псевдорешений уравнения (2.1) для данных f и g не имеет квазирешения, то уравнение (2.26) не имеет псевдорешения. Это означает, что элемент $g - A^+ f$ не принадлежит области определения псевдообратного оператора $\left(LQ_A\right)^+$ и, следовательно, не определен элемент g_{01} из (2.23). Поэтому и система (2.32) с правой частью $\left(f_{01}, g_{01}\right)$ из (2.23) не имеет решения.

Движение от «конца» к «началу» в каждом из случаев а) и б) даёт доказательство того, что если система (2.32) с правой частью $\left(f_{01}, g_{01}\right)$ из (2.23) не имеет решения, то и задача $\left(S; f, g\right)$ для данных правых частей $f \in F$ и $g \in G$ не имеет решения.

Эквивалентность рассматриваемых задач в случае 1) доказана.

2). Пусть задача $\left(S; f, g\right)$ для данных правых частей $f \in F$ и $g \in G$ имеет более одного решения. Докажем, что и система (2.32) имеет более одного решения.

Действительно, представляя псевдорешения уравнения (2.1) в виде (2.25), находим псевдорешения уравнения (2.26) в виде (2.27). Тогда решения задачи $\left(S; f, g\right)$ представляются формулой (2.28). Так как решение стационарной задачи не единственное, то оператор $Q_A Q_{LQ}$ не нулевой.

Каждый элемент x, представленный в виде (2.28), является решением системы (2.32). Следовательно, система (2.32) совместна и решение определяется неоднозначно.

Пусть система (2.32) совместна и имеет более одного решения. Нетрудно проверить, что для любого $z \in H$ элемент

$$x = A^+ f_{01} + \left(LQ_A\right)^+ \left(g_{01} - A^+ f_{01}\right) + Q_A Q_{LQ} z, \qquad z \in H$$

удовлетворяет системе (2.32). Так как

$$A^+ f_{01} = A^+ f, \qquad \left(LQ_A\right)^+ \left(g_{01} - A^+ f_{01}\right) = \left(LQ_A\right)^+ \left(g - A^+ f\right),$$

то из (2.29) получим (2.28) и, следовательно, задача $\left(S; f, g\right)$ разрешима и имеет более одного решения.

3). Пусть задача $(S; f, g)$ для данных правых частей $f \in F$ и $g \in G$ имеет единственное решение. Так как для любого $z \in H$ элемент (2.28) является решением задачи $(S; f, g)$, то $Q_A Q_{LQ} = 0$. Отсюда и из (2.29) следует единственность решения системы (2.32). Движение от «конца» к «началу» даёт доказательства обратного утверждения.

Таким образом, нами доказана эквивалентность системы (2.32) с правой частью (f_{01}, g_{01}) из (2.23) и задачи $(S; f, g)$.

Теорема 2.5 доказана.

Аналогично теореме 2.5 доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.6. ***Пусть*** $f \in F$ ***и*** $g \in G$ ***– произвольные элементы. Тогда система* (2.34) *с правой частью*** (f_{02}, g_{02}) ***из* (2.24) *эквивалентна:***

а) ***задаче*** $(S; f, g)$***;***

б) ***задаче*** $(S^*; f, g)$**.**

Доказательство теоремы 2.6 проводится аналогично доказательству теоремы 2.5.

2.5. Вариационная двойственная задача. Наряду с основным условием рассмотрим аналогичное условие и для двойственной задачи. Будем говорить, что имеет место двойственное основное условие, если оператор L нормально разрешимый и операторы A и L взаимно дополнительные. Введенное условие является необходимым и достаточным существования решения вариационной двойственной задачи и его сходимости.

Теорема 2.7. ***Для того чтобы задача*** $(V^*; f, g)$ ***для всех*** $f \in F$**,** $g \in G$ ***и*** $\alpha > 0$ ***имела единственное решение*** x_α^***, *сходящееся при*** $\alpha \to \infty$**, *необходимо и достаточно выполнение двойственного основного условия; при этом для всех*** $\alpha : 0 < \rho_\infty < \alpha < \infty$ ***справедливо представление***

$$x_\alpha^* = \left(A^* A + \alpha L^* L\right)^{-1} \left(A^* f + \alpha L^* g\right) \tag{2.35}$$

и имеет место оценка

$$\left\|x_\alpha^* - x_0^*\right\| = M\alpha^{-1}, \qquad (2.36)$$

где x_0^* ***– решение задачи*** $\left(S^*;\ f, g\right)$, ρ_∞ ***и*** $M > 0$ ***– некоторые постоянные, не зависящие от*** α ***.***

Доказательство теоремы 2.7. Полагая $\beta = 1/\alpha$, решение (2.35) можно представить в виде

$$x_{1/\beta}^* = \left(L^* L + \beta A^* A\right)^{-1}\left(L^* g + \beta A^* f\right).$$

Для полученного решения выполняются все условия теоремы 1.2 и, следовательно, имеет место оценка скорости сходимости (2.36).

Теорема 2.7 доказана.

3. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОРЯДОК СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ L-ПСЕВДООБРАЩЕНИЯ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ДАННЫМИ

3.1. Постановка задачи и основные результаты. В данном параграфе изучим вопрос аппроксимации «точного» решения задачи L-псевдообращения «приближенными» решениями вариационной задачи, когда вместо «точной четверки» $\left(A, L, f, g\right)$ задано множество «приближенных четверок» $\left(\tilde{A}, \tilde{L}, \tilde{f}, \tilde{g}\right)$.

Пусть по-прежнему $A: H \to F$ и $L: H \to G$ – линейные ограниченные операторы, а H, F и G – гильбертовы пространства. Будем считать, что нам известны $\left\{\tilde{A}\right\}$, $\left\{\tilde{L}\right\}$ – множества линейных операторов $\tilde{A}: H \to F$, $\tilde{L}: H \to G$ и $\left\{\tilde{f}\right\}$, $\left\{\tilde{g}\right\}$ – множества правых частей $\tilde{f} \in F$, $\tilde{g} \in G$, удовлетворяющих условиям

$$\left\|\tilde{A} - A\right\| \le \mu, \quad \left\|\tilde{L} - L\right\| \le \mu, \quad \left(\mu \ge 0\right), \qquad (3.1)$$

$$\left\|\tilde{f}-f\right\|\le\varepsilon\left\|f\right\|,\quad \left\|\tilde{g}-g\right\|\le\varepsilon\left\|g\right\|,\quad (\varepsilon\ge 0), \tag{3.2}$$

где $\mu>0$, $\varepsilon>0$ – произвольные, достаточно малые величины.

Заметим, что из ограниченности операторов A, L и оценок (3.1) вытекает ограниченность операторов $\tilde{A}$, $\tilde{L}$.

В данном пункте по приближенной четверке, при $\alpha\sim\mu$, то есть, когда параметр регуляризации выбирается равным погрешности в задании операторов:

для совместного случая доказывается сходимость решения возмущенной вариационной задачи к решению точной стационарной задачи со скоростью $O(\mu+\varepsilon)$;

для несовместного случая – сходимость решения конструированной по приближенным данным вариационной задачи к решению точной стационарной задачи со скоростью $O(\mu+\varepsilon)$.

Предположим, что при заданных правых частях $f_0\in F$ и $g_0\in G$ система

$$\begin{cases} Ax=f_0, \\ Lx=g_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

является совместной. Пусть вместо точных данных f_0 и g_0 известны их приближения $\tilde{f}_0\in F$, $\tilde{g}_0\in G$ такие, что

$$\left\|\tilde{f}_0-f_0\right\|\le\varepsilon\left\|f_0\right\|,\quad \left\|\tilde{g}_0-g_0\right\|\le\varepsilon\left\|g_0\right\|. \tag{3.4}$$

Рассмотрим вариационную задачу $\left(\tilde{V};\ \tilde{f}_0,\ \tilde{g}_0\right)$: найти минимум $\tilde{x}_{0\alpha}$ функционала

$$\tilde{\Phi}_{0\alpha}(x)=\left\|\tilde{A}x-\tilde{f}_0\right\|^2+\alpha\left\|\tilde{L}x-\tilde{g}_0\right\|^2,\qquad x\in H \tag{3.5}$$

при $\alpha>0$ и исследовать его близость с решением системы (3.3).

В дальнейшем неоднократно будем обращаться к выбору параметра регуляризации α. Поэтому для удобства изложений условий теорем и лемм приведем следующее определение. Будем говорить, что параметр регуляризации α удовлетворяет **условию согласованности**, если он определяется равенством

$$\alpha = \frac{m}{q\gamma}\mu\,, \tag{3.4}$$

где m и q – произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$m \ge m_0, \qquad 0 < q < 1, \tag{3.5}$$

$$m_0 = 2\left(1 + \|A\| + \|L\|\right). \tag{3.6}$$

Положим

$$m_1 = \frac{1}{(1-q)\gamma}\left(1 + \gamma\left\|A^+\right\| + \left\|L^*L\right\|\left\|A^+\right\|\right), \tag{3.7}$$

$$m_2 = \frac{1+\|L\|}{(1-q)\gamma}. \tag{3.8}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. ***Пусть система* (3.3) *является совместной и имеет место основное условие. Если параметр регуляризации удовлетворяет условию согласованности, то при*** $\alpha \to 0$ ***справедлива оценка***

$$\left\|\tilde{x}_{0\alpha} - x_0\right\| \le \left(m_1 + m_2\right)\mu\left\|x_0\right\| + m_1\left\|\tilde{f}_0 - f_0\right\| + m_2\left\|\tilde{g}_0 - g_0\right\|, \tag{3.9}$$

где $\tilde{x}_{0\alpha}$ ***– решение вариационной задачи*** $\left(\tilde{V};\ \tilde{f}_0,\ \tilde{g}_0\right)$, x_0 ***– решение системы* (3.3)*, а постоянные*** m_1 ***и*** m_2 ***определены* (3.7) *и* (3.8).**

Доказательство теоремы 3.1 приводится в п.3.3.

Положим

$$\tilde{f}_\alpha = \tilde{P}_\alpha \tilde{f}, \quad \tilde{\tilde{f}}_\alpha = \left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\tilde{f}_\alpha, \quad \tilde{g}_\alpha = \tilde{L}\tilde{\tilde{f}}_\alpha + \tilde{S}_\alpha\left(\tilde{g} - \tilde{L}\tilde{\tilde{f}}_\alpha\right),$$

$$\tilde{P}_\alpha = \left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}\tilde{A}^*, \qquad \tilde{S}_\alpha = \left(\tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^* + \alpha E\right)^{-1} \tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^*,$$

где (3.10)

$$\tilde{L}_\alpha = \tilde{L}\tilde{Q}_\alpha, \qquad L_0 = LQ, \qquad \alpha\tilde{Q}_\alpha = \left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1},$$

а параметр $\alpha > 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. ***Пусть имеет место основное условие и параметр регуляризации удовлетворяет условию согласованности. Тогда вариационная задача***

$$\left\|\tilde{A}x - \tilde{f}_\alpha\right\|^2 + \alpha\left\|\tilde{L}x - \tilde{g}_\alpha\right\|^2 \to \min, \qquad x \in H \tag{3.11}$$

имеет единственное решение $\tilde{x}_\alpha$ ***и при*** $\alpha \to 0$ ***справедлива оценка***

$$\left\|\tilde{x}_\alpha - x_0\right\| \le m_3\alpha + m_4\mu + m_5\varepsilon ,$$

где x_0 ***– решение задачи*** $(S;\ f,\ g)$***, а*** $m_3,\ m_4,\ m_5$ ***– постоянные, которые определяются в ходе доказательства.***

Доказательство теоремы 3.2 приводится в п.3.3.

Аналогично теоремам 3.1 и 3.2 доказываются соответствующие утверждения для двойственных задач.

Теорема 3.3. ***Пусть система* (3.3) *является совместной и имеет место двойственное основное условие. Если параметр регуляризации удовлетворяет условию согласованности, то при*** $\alpha \to \infty$ ***справедлива оценка***

$$\left\|\tilde{x}_{0\alpha} - x_0\right\| \le \left(m_1' + m_2'\right)\mu\left\|x_0\right\| + m_1'\left\|\tilde{f}_0 - f_0\right\| + m_2'\left\|\tilde{g}_0 - g_0\right\|,$$

где $\tilde{x}_{0\alpha}$ ***– решение вариационной задачи*** $\left(\tilde{V}^*;\ \tilde{f}_0,\ \tilde{g}_0\right)$, x_0 ***– решение системы* (3.3), *а*** m_1' ***и*** m_2' ***– некоторые постоянные.***

Положим

$$\tilde{g}_\alpha' = \tilde{P}_\alpha'\tilde{g}, \qquad \tilde{\tilde{g}}_\alpha' = \left(\tilde{L}^*\tilde{L} + \alpha E\right)^{-1} \tilde{L}^*\tilde{g}_\alpha',$$

$$\tilde{f}_\alpha = \tilde{A}\tilde{\tilde{g}}_\alpha' + \tilde{S}_\alpha'\left(\tilde{f} - \tilde{A}\tilde{\tilde{g}}_\alpha'\right)$$

где $$\tilde{P}'_\alpha = \left(\tilde{L}\tilde{L}^* + \alpha E\right)^{-1} \tilde{L}\tilde{L}^*, \qquad \tilde{S}'_\alpha = \left(\tilde{A}_\alpha \tilde{A}^*_\alpha + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}_\alpha \tilde{A}^*_\alpha,$$
$$\tilde{A}_\alpha = \tilde{A}\tilde{Q}'_\alpha, \qquad A_0 = AQ_L, \qquad \alpha\tilde{Q}'_\alpha = \left(\tilde{L}^*\tilde{L} + \alpha E\right)^{-1},$$
а параметр $\alpha > 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.4. ***Пусть имеет место двойственное основное условие и параметр регуляризации удовлетворяет условию согласованности. Тогда вариационная задача***
$$\left\|\tilde{A}x - \tilde{f}'_\alpha\right\|^2 + \alpha\left\|\tilde{L}x - \tilde{g}'_\alpha\right\|^2 \to \min, \qquad x \in H$$
имеет единственное решение $\tilde{x}'_\alpha$ ***и при*** $\alpha \to \infty$ ***справедлива оценка***
$$\left\|\tilde{x}'_\alpha - x'_0\right\| \le m'_3\alpha + m'_4\mu + m'_5\varepsilon,$$
где x'_0 ***– решение задачи*** $\left(S^*;\ f,\ g\right)$, ***а*** m'_3, m'_4, m'_5 ***– некоторые постоянные.***

3.2. Вспомогательные утверждения. В данном пункте докажем некоторые вспомогательные утверждения, используемые в доказательстве основных теорем.

Положим
$$R_\alpha = A^*A + \alpha L^*L, \qquad \tilde{R}_\alpha = \tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha\tilde{L}^*\tilde{L}.$$

Лемма 3.1. ***Пусть имеет место основное условие и параметр регуляризации удовлетворяет условию согласованности. Тогда справедливы оценки***
$$\left\|R_\alpha^{-1}\left(\tilde{R}_\alpha - R_\alpha\right)\right\| \le q, \tag{3.12}$$
$$\left\|\tilde{R}_\alpha^{-1}\right\| \le \frac{1}{(1-q)\gamma\alpha}, \tag{3.13}$$
$$\left\|\tilde{R}_\alpha^{-1}A^*\right\| \le m_1, \tag{3.14}$$
$$\left\|\tilde{R}_\alpha^{-1}\tilde{A}^*\right\| \le m_2, \tag{3.15}$$

где постоянные q***,*** m_1***,*** m_2 ***определены в* (3.5), (3.7), (3.8), *а*** γ ***– постоянная из условия взаимной дополнительности операторов.***

Доказательство леммы 3.1. Вначале покажем обратимость оператора $\tilde{R}_\alpha$ при каждом $\alpha > 0$. Из основного условия вытекает ограниченная обратимость оператора R_α при каждом $\alpha > 0$. Кроме того, из условия взаимной дополнительности операторов A и L будем иметь

$$\left\| R_\alpha x \right\| \geq \alpha\gamma \left\| x \right\| \quad \text{для всех } x \in H .$$

Отсюда, из самосопряженности оператора R_α и теоремы 2 [41, с. 204] вытекает оценка

$$\left\| R_\alpha^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\alpha\gamma} . \tag{3.16}$$

Переходя к нормам в тождестве

$$\tilde{R}_\alpha - R_\alpha = \left(\tilde{A}^* - A^* \right)\left(\tilde{A} - A \right) + \left(\tilde{A}^* - A^* \right) A + A^* \left(\tilde{A} - A \right) +$$

$$+\alpha\left[\left(\tilde{L}^* - L^* \right)\left(\tilde{L} - L \right) + \left(\tilde{L}^* - L^* \right) L + L^* \left(\tilde{L} - L \right) \right],$$

в силу (3.1) и (3.4) при всех α: $0 < \alpha \leq 1$, получим

$$\left\| \tilde{R}_\alpha - R_\alpha \right\| \leq m_0 \mu .$$

Отсюда, из (3.16) и (3.4) будем иметь

$$\left\| \tilde{R}_\alpha^{-1} \left(\tilde{R}_\alpha - R_\alpha \right) \right\| \leq \left\| \tilde{R}_\alpha^{-1} \right\| \left\| \tilde{R}_\alpha - R_\alpha \right\| \leq \frac{1}{\gamma\alpha} hM = \frac{1}{\gamma \dfrac{hM}{\gamma q}} hM = q . \tag{3.17}$$

Оценка (3.12) доказана.

Докажем оценку (3.13). Из оценки (3.17) и условия $0 < q < 1$, в силу теоремы Банаха [41, с. 206] вытекает обратимость оператора $E + R_\alpha^{-1} \left(\tilde{R}_\alpha - R_\alpha \right)$ и справедливость оценки

$$\left\| \left[E + R_\alpha^{-1} \left(\tilde{R}_\alpha - R_\alpha \right) \right]^{-1} \right\| \le \frac{1}{1-q}. \tag{3.18}$$

Переходя к нормам в тождестве

$$\tilde{R}_\alpha^{-1} = \left[E + R_\alpha^{-1} \left(\tilde{R}_\alpha - R_\alpha \right) \right]^{-1} R_\alpha^{-1}$$

и используя оценку (3.18), получим справедливость оценки (3.13).

Оценка (3.13) доказана.

Докажем оценку (3.14). Переходя к нормам в тождестве

$$\tilde{R}_\alpha^{-1} A^* = \tilde{R}_\alpha^{-1} \left[A^* \left(A - \tilde{A} \right) + \left(A^* - \tilde{A}^* \right) \tilde{A} \right]^{-1} A^+ + A^+ - \alpha \tilde{R}_\alpha^{-1} \tilde{L}^* \tilde{L} A^+$$

и учитывая оценку (3.13), получим

$$\left\| \tilde{R}_\alpha^{-1} A^* \right\| \le \left\| \tilde{R}_\alpha^{-1} \right\| \left\| A - \tilde{A} \right\| \left(\|A\| + \|\tilde{A}\| \right) \left\| A^+ \right\| +$$

$$+ \left\| A^+ \right\| + \alpha \left\| \tilde{R}_\alpha^{-1} \right\| \left\| \tilde{L}^* \tilde{L} \right\| \left\| A^+ \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{(1-q)\gamma\alpha} \left[\mu \left(1 + 2\|A\| \right) + \alpha\mu \left(1 + 2\|L\| \right) + \alpha \left\| L^* L \right\| \right] \left\| A^+ \right\| + \left\| A^+ \right\| =$$

$$= \frac{m\mu}{(1-q)\gamma\alpha} \left\| A^+ \right\| + \left\| A^+ \right\| + \frac{1}{(1-q)\gamma} \left\| L^* L \right\| \left\| A^+ \right\| =$$

$$= \frac{q}{1-q} \left\| A^+ \right\| + \left\| A^+ \right\| + \frac{1}{(1-q)\gamma} \left\| L^* L \right\| \left\| A^+ \right\| =$$

$$= \frac{1}{(1-q)\gamma} \left(\gamma + \left\| L^* L \right\| \right) \left\| A^+ \right\| = m_1 .$$

Оценка (3.14) доказана.

Докажем оценку (3.15). Переходя к нормам в тождестве

$$\tilde{R}_\alpha^{-1} \tilde{A}^* = \tilde{R}_\alpha^{-1} \left(\tilde{A}^* - A^* \right) + \tilde{R}_\alpha^{-1} A^*,$$

из оценок (3.13) и (3.14) получим справедливость оценки (3.15).

Лемма 3.1 доказана.

Положим

$$n_1 = \left(1 + \frac{q\gamma}{m}\left(1 + 2\|A\|\right)\right)\left\|A^+\right\|,\ n_3 = n_1\left\|A^+\right\|,$$

$$n_2 = \frac{q\gamma}{m} + \left(1 + \frac{q\gamma}{m}\left(1 + 2\|A\|\right)\right)\left\|A^+\right\|,\ n_4 = n_2,$$

$$n_5 = n_1\left\|A^+\right\|^2 + n_2 n_3,\ n_6 = n_2\left(n_4 + 1\right).$$

Лемма 3.2. ***Пусть имеет место основное условие и параметр регуляризации удовлетворяет условию согласованности. Тогда справедливы оценки***

$$\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} A\right\| \le n_1, \quad \left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1} A^*\right\| \le n_1, \tag{3.19}$$

$$\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}\right\| \le n_2, \quad \left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}^*\right\| \le n_2, \tag{3.20}$$

$$\left\|\tilde{P}_\alpha - AA^+\right\| \le n_3\alpha + n_4\mu, \tag{3.21}$$

$$\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}^*\tilde{P}_\alpha - A^+\right\| \le n_5\alpha + n_6\mu. \tag{3.22}$$

Доказательство леммы 3.2. Докажем первое из соотношений (3.19). Так как $A = AA^*\left(A^*\right)^+$, то имеем

$$\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} A = \left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} AA^*\left(A^*\right)^+ =$$

$$= \left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}\tilde{A}^*\left(A^*\right)^+ + .$$

$$+\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1}\left[A\left(A^* - \tilde{A}^*\right) + \left(A - \tilde{A}\right)A^* - \left(A - \tilde{A}\right)\left(A^* - \tilde{A}^*\right)\right]\left(A^*\right)^+.$$

Переходя к нормам в полученном представлении и учитывая (3.1), (3.4) и соотношения

$$\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1}\right\| \le \frac{1}{\alpha}, \quad \left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\tilde{A}^*\right\| \le 1, \tag{3.23}$$

получим

$$\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} A\right\| \le \left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\tilde{A}^*\right\|\left\|A^+\right\| + \left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1}\right\| \cdot$$

$$\cdot\left(\left\|A-\tilde{A}\right\|\left\|A^*-\tilde{A}^*\right\| + \left\|A-\tilde{A}\right\|\left\|A^*\right\| + \left\|A\right\|\left\|A^*-\tilde{A}^*\right\|\right)\left\|\left(A^*\right)^+\right\| \le$$

$$\le \left\|A^+\right\| + \frac{1}{\alpha}\left(\mu^2 + 2\left\|A\right\|\mu\right)\left\|A^+\right\| \le \left\|A^+\right\| + \frac{q\gamma}{m}\left(1 + 2\left\|A\right\|\right)\left\|A^+\right\| = n_1.$$

Первое из соотношений (3.19) доказано. Второе из соотношений (3.19) доказывается аналогично.

Докажем первое из соотношений (3.20). Так как

$$\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1}\tilde{A} = \left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1}\left(\tilde{A} - A\right) + \left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} A,$$

то, учитывая (3.1), (3.19) и (3.23), получим

$$\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\right\| \le \left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1}\right\|\left\|\tilde{A} - A\right\| +$$

$$+\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} A\right\| \le \frac{\mu}{\alpha} + n_1 = \frac{q\gamma}{m} + n_1 = n_2.$$

Первое из соотношений (3.20) доказано. Второе из соотношений (3.20) доказывается аналогично.

Докажем оценку (3.21). Переходя к нормам в равенстве

$$\tilde{P}_\alpha - AA^+ = -\alpha\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} AA^+ +$$

$$+\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\left(\tilde{A}^* - A^*\right)\left(E - AA^+\right)$$

и учитывая оценки (3.19) и (3.20), получим

$$\left\|\tilde{P}_\alpha - AA^+\right\| \le \alpha\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} A\right\|\left\|A^+\right\| +$$

$$+\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}\right\|\left\|\tilde{A}^* - A^*\right\|\left\|E - AA^+\right\| \le$$

$$\le \alpha\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} A\right\|\left\|A^+\right\| + \mu\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}\right\| \le \alpha n_1\left\|A^+\right\| + \mu n_2 .$$

Соотношение (3.21) доказано.

Докажем соотношение (3.22). Имеем

$$\left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}^*\tilde{P}_\alpha - A^+ = -\alpha\left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}^*\left(AA^*\right)^+ +$$

$$+\left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}^*\left[\left(\tilde{P}_\alpha - AA^+\right) + \left(A - \tilde{A}\right)A^+\right].$$

Переходя к нормам в полученном равенстве и учитывая (3.1), (3.19), (3.20), (3.21), получим

$$\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}^*\tilde{P}_\alpha - A^+\right\| = \alpha\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}^*\right\|\left\|\left(AA^*\right)^+\right\| +$$

$$+\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}^*\right\|\left(\left\|\tilde{P}_\alpha - AA^+\right\| + \left\|A - \tilde{A}\right\|\left\|A^+\right\|\right) \le$$

$$\le \left(n_1\left\|A^+\right\|^2 + n_2 n_3\right)\alpha + n_2\left(n_4 + 1\right)\mu .$$

Соотношение (3.22) доказано.

Лемма 3.2 доказана.

Положим

$$k_1 = n_1\left\|A^+\right\|\left\|L\right\|, \quad k_2 = n_2\left\|L\right\| + 1,$$

$$k_3 = \left\|L_0^+\right\| + \left\|L_0^+\right\|\left(2\left\|L_0 + 1\right\|\right)\left(k_1 + \frac{k_2 q\gamma}{m}\right), \tag{3.24}$$

$$k_4 = k_1 + k_3 + \frac{k_2 q\gamma}{m}, \quad k_5 = k_1 k_4 + k_3\left\|L_0^+\right\|, \quad k_6 = k_2 k_4.$$

Лемма 3.3. ***Пусть имеет место основное условие и параметр регуляризации удовлетворяет условию согласованности. Тогда справедливы соотношения***

$$\left\|\tilde{L}_\alpha - L_0\right\| \le k_1\alpha + k_2\mu, \tag{3.25}$$

$$\left\|\left(\tilde{L}_\alpha\tilde{L}_\alpha^* + \alpha E\right)^{-1} L_0\right\| \le k_3, \tag{3.26}$$

$$\left\|\left(\tilde{L}_\alpha\tilde{L}_\alpha^* + \alpha E\right)^{-1} \tilde{L}_\alpha\right\| \le k_4, \tag{3.27}$$

$$\left\|\tilde{S}_\alpha - L_0L_0^+\right\| \le k_5\alpha + k_6\mu, \tag{3.28}$$

где постоянные k_i $\left(i = \overline{1,\,6}\right)$ определены в (3.24).

Доказательство леммы 3.3. Докажем соотношение (3.25). Переходя к нормам в равенстве

$$\tilde{Q}_\alpha - Q = \alpha\left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1} A^*\left(A^*\right)^+ + \left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}^*\left(A - \tilde{A}\right)Q$$

и принимая во внимание оценки (3.1), (3.19), (3.20) и равенство $\|Q\| = 1$, будем иметь

$$\left\|\tilde{Q}_\alpha - Q\right\| \le n_1\left\|A^+\right\|\alpha + n_2\mu .$$

Отсюда получим

$$\left\|\tilde{L}_\alpha - L_0\right\| \le \left\|\tilde{L} - L\right\|\left\|\tilde{Q}_\alpha\right\| + \|L\|\left\|\tilde{Q}_\alpha - Q\right\| \le n_1\left\|A^+\right\|\|L\|\alpha + \left(n_2\|L\| + 1\right)\mu .$$

Оценка (3.25) доказана.

Докажем оценку (3.26). Из (3.25) получим

$$\left\|\tilde{L}_\alpha\tilde{L}_\alpha^* - L_0L_0^*\right\| \le \left\|\tilde{L} - L\right\|\left\|\tilde{Q}_\alpha\right\| + \|L\|\left\|\tilde{Q}_\alpha - Q\right\| \le$$

$$\le n_1\left\|A^+\right\|\|L\|\alpha + \left(n_2\|L\| + 1\right)\mu . \tag{3.29}$$

Так как оператор $L_0 = LQ : H \to G$ нормально разрешимый, то он представим в виде $L_0 = L_0 L_0^* \left(L_0^*\right)^+$. Поэтому, учитывая (3.4), (3.29) и оценку $\left\|\tilde{S}_\alpha\right\| \le 1$, будем иметь

$$\left\|\left(\tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^* + \alpha E\right)^{-1} L_0\right\| \le$$

$$\le \left\|\left(\tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^* + \alpha E\right)^{-1}\right\| \left\|L_0 L_0^* - \tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^*\right\| \left\|\left(L_0^*\right)^+\right\| + \left\|\tilde{S}_\alpha\right\| \left\|\left(L_0^*\right)^+\right\| \le$$

$$\le \left\|L_0^+\right\| + \left\|L_0^+\right\| \left(2\left\|L_0\right\| + 1\right)\left(k_1 + \frac{k_2 q \gamma}{m}\right),$$

где $\tilde{S}_\alpha$ определен в (3.10). Оценка (3.26) доказана.

Докажем оценку (3.27). Переходя к нормам в равенстве

$$\left(\tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^* + \alpha E\right)^{-1} \tilde{L}_\alpha = \left(\tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^* + \alpha E\right)^{-1} \left(\tilde{L}_\alpha - L_0\right) + \left(\tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^* + \alpha E\right)^{-1} L_0$$

и учитывая (3.25) и (3.26), получим

$$\left\|\left(\tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^* + \alpha E\right)^{-1} \tilde{L}_\alpha\right\| \le$$

$$\le \left\|\left(\tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^* + \alpha E\right)^{-1}\right\| \left\|\tilde{L}_\alpha - L_0\right\| + \left\|\left(\tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^* + \alpha E\right)^{-1} L_0\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha}\left(k_1\alpha + k_2\mu\right) + k_3 = k_1 + k_3 + \frac{k_2 q \gamma}{m}.$$

Оценка (3.27) доказана.

Докажем оценку (3.28). Имеем

$$\left\|\tilde{S}_\alpha - L_0 L_0^+\right\| =$$

$$= \left\|\left(\tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^* + \alpha E\right)^{-1} \tilde{L}_\alpha \left(\tilde{L}_\alpha^* - L_0^*\right)\left(E - L_0 L_0^+\right) - \alpha\left(\tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^* + \alpha E\right)^{-1} L_0 L_0^+\right\| \le$$

$$\le k_4\left(k_1\alpha + k_2\mu\right) + \alpha k_3 \left\|L_0^+\right\| = \left(k_1 k_4 + k_3\left\|L_0^+\right\|\right)\alpha + k_2 k_4 \mu.$$

Оценка (3.28) доказана.

Лемма 3.3 доказана.

Положим

$$a_1 = n_3, \quad a_2 = n_4, \quad a_3 = 1, \tag{3.30}$$

$$b_1 = 2n_5 + n_2\left\|A^+\right\|, \quad b_2 = 2n_6 + 2\left\|A^+\right\|, \quad b_3 = \left\|A^+\right\|, \tag{3.31}$$

$$\begin{cases} c_1 = \left(\|L\|+1\right)\left(2b_1 + \left\|A^+\right\|k_5\right)\|f\| + k_5\|g\|, \\ c_2 = \left[\left(\|L\|+1\right)\left(2b_2 + \left\|A^+\right\|k_6\right) + 2\left\|A^+\right\|\right]\|f\| + k_6\|g\|, \\ c_3 = 2\left(\|L\|+1\right)b_3\|f\| + \|g\|. \end{cases} \tag{3.32}$$

Лемма 3.4. ***Пусть имеет место основное условие и параметр регуляризации удовлетворяет условию согласованности. Тогда справедливы соотношения***

$$\left\|\tilde{f}_\alpha - f_0\right\| \le \left(a_1\alpha + a_2\mu + a_3\varepsilon\right)\|f\|, \tag{3.33}$$

$$\left\|\tilde{\tilde{f}}_\alpha - A^+ f\right\| \le \left(b_1\alpha + b_2\mu + b_3\varepsilon\right)\|f\|, \tag{3.34}$$

$$\left\|\tilde{g}_\alpha - g_0\right\| \le c_1\alpha + c_2\mu + c_3\varepsilon, \tag{3.35}$$

где постоянные a_i, b_i, c_i $\left(i = \overline{1,\, 3}\right)$ определены в (3.30) – (3.32).

Доказательство леммы 3.4. Докажем неравенство (3.30). Имеем

$$\tilde{f}_\alpha - f_0 = \left(\tilde{P}_\alpha + AA^+\right)f + \tilde{P}_\alpha\left(\tilde{f} - f\right).$$

Переходя здесь к нормам, учитывая (3.1), (3.21) и неравенство $\left\|\tilde{P}_\alpha\right\| \le 1$, получим

$$\left\|\tilde{f}_\alpha - f_0\right\| \le \left(n_3\alpha + n_4\mu + \varepsilon\right)\|f\|.$$

Неравенство (3.33) доказано.

Докажем неравенство (3.34). Так как $A^+ = A^*\left(AA^*\right)^+$, то имеем

$$\tilde{\tilde{f}}_\alpha - A^+ f = -\alpha\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1} A^*\left(AA^*\right)^+ f +$$

$$+\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\left[\left(\tilde{P}_\alpha - AA^+\right)+\left(A-\tilde{A}\right)A^+\right]\tilde{f} + A^+\left(\tilde{f}-f\right).$$

Переходя к нормам, учитывая (3.1), (3.20) и (3.21), получим

$$\left\|\tilde{\tilde{f}}_\alpha - A^+ f\right\| \le \left[\left(2n_5 + n_2\left\|A^+\right\|\right)\alpha + \left(2n_6 + 2\left\|A^+\right\|\right)\mu + \left\|A^+\right\|\varepsilon\right]\|f\|.$$

Неравенство (3.34) доказано.

Докажем неравенство (3.35). Имеем

$$\tilde{g}_\alpha - g_0 = \tilde{S}_\alpha\left[\left(\tilde{g}-g\right)+\tilde{L}\left(A^+ f - \tilde{\tilde{f}}_\alpha\right)\right] + \tilde{L}\left(\tilde{\tilde{f}}_\alpha - A^+ f\right) +$$

$$+\left(\tilde{S}_\alpha - L_0L_0^+\right)\left(g - \tilde{L}A^+ f\right) + \left(\tilde{L}-L\right)A^+ f + L_0L_0^+\left(L-\tilde{L}\right)A^+ f\ .$$

Переходя к нормам, учитывая (3.1), (3.2), (3.28) и неравенство $\left\|\tilde{S}_\alpha\right\| \le 1$, получим

$$\left\|\tilde{g}_\alpha - g_0\right\| \le \left[\left(\|L\|+1\right)\left(2b_1 + \left\|A^+\right\|k_5\right)\|f\| + k_5\|g\|\right]\alpha +$$

$$+\left[\left(\left(\|L\|+1\right)\left(2b_2 + \left\|A^+\right\|k_6\right) + 2\left\|A^+\right\|\right)\|f\| + k_6\|g\|\right]\mu +$$

$$+\left[2\left(\|L\|+1\right)b_3\|f\| + \|g\|\right]\varepsilon\ .$$

Неравенство (3.35) доказано.

Лемма 3.4 доказана.

3.3. Доказательство теоремы 3.1. Вначале заметим, что из условия взаимной дополнительности операторов A, L и совместности системы (3.3) следует однозначная разрешимость этой системы. Поэтому решение x_0 системы (3.3) является единственным.

Нетрудно проверить справедливость тождества

$$\tilde{x}_{0\alpha} - x_0 = \tilde{R}_\alpha^{-1}\tilde{A}^*\left[\left(\tilde{f}_0 - f_0\right) - \left(\tilde{A} - A\right)x_0\right] +$$

$$+\alpha\tilde{R}_\alpha^{-1}\tilde{L}^*\left[\left(\tilde{g}_0 - g_0\right) - \left(\tilde{L} - L\right)x_0\right].$$

Переходя к нормам в этом тождестве и учитывая (3.1), (3.15) и (3.17), будем иметь

$$\left\|\tilde{x}_{0\alpha} - x_0\right\| = \left\|\tilde{R}_\alpha^{-1}\tilde{A}^*\right\|\left[\left\|\tilde{f}_0 - f_0\right\| + h\left\|x_0\right\|\right] +$$

$$+\left\|\tilde{R}_\alpha^{-1}\right\|\left\|\tilde{L}^*\right\|\left[\left\|\tilde{g}_0 - g_0\right\| + h\left\|x_0\right\|\right] \le$$

$$\le m_2\left\|\tilde{f}_0 - f_0\right\| + \frac{1+\|L\|}{(1-q)\gamma}\left\|\tilde{g}_0 - g_0\right\| +$$

$$+\left(m_2 + \frac{1+\|L\|}{(1-q)\gamma}\right)h\left\|x_0\right\|.$$

Отсюда и из обозначений (3.7) и (3.8) следует справедливость оценки (3.9).

Теорема 3.1 доказана.

Доказательство теоремы 3.2. Согласно теореме 2.3 стационарная задача $\left(S;\ f,\ g\right)$ с произвольными правыми частями $f \in F$ и $g \in G$ эквивалентна стационарной задаче $\left(S;\ f_0,\ g_0\right)$, где

$$f_0 = AA^+f, \quad g_0 = L_0L_0^+\left(g - LA^+f\right) + LA^+f\ . \tag{3.36}$$

При этом система (3.3), правая часть которой определена равенствами (3.36), является совместной. Поэтому доказательство рассматриваемой теоремы можно привести к доказательству теоремы 3.1.

Пусть x_0 – решение задачи $\left(S;\ f,\ g\right)$. В силу сделанного замечания, x_0 является и решением задачи $\left(S;\ f_0,\ g_0\right)$. Из условия взаимной дополнительности операторов A и L вытекает единственность этого решения.

Так как

$$\tilde{x}_\alpha = \tilde{R}_\alpha^{-1}\left(\tilde{A}^*\tilde{f}_\alpha + \alpha\tilde{L}^*\tilde{g}_\alpha\right) = \tilde{R}_\alpha^{-1}\left(\tilde{A}^* f_0 + \alpha\tilde{L}^* g_0\right) +$$

$$+\tilde{R}_\alpha^{-1}\tilde{A}^*\left(\tilde{f}_\alpha - f_0\right) + \alpha\tilde{R}_\alpha^{-1}\tilde{L}^*\left(\tilde{g}_\alpha - g_0\right),$$

то разность $\tilde{x}_\alpha - x_0$ можно представить в виде

$$\tilde{x}_\alpha - x_0 = \tilde{R}_\alpha^{-1}\tilde{A}^*\left[\left(\tilde{f}_\alpha - f_0\right) + \left(A - \tilde{A}\right)x_0\right] +$$

$$+\alpha\tilde{R}_\alpha^{-1}\tilde{L}^*\left[\left(\tilde{g}_\alpha - g_0\right) + \left(L - \tilde{L}\right)x_0\right].$$

Переходя к нормам в полученном равенстве и принимая во внимание (3.1), (3.14), (3.15), (3.33), (3.35), имеем

$$\left\|\tilde{x}_\alpha - x_0\right\| \le \left\|\tilde{R}_\alpha^{-1}\tilde{A}^*\right\|\left(\left\|\tilde{f}_\alpha - f_0\right\| + \left\|A - \tilde{A}\right\|\left\|x_0\right\|\right) +$$

$$+\alpha\left\|\tilde{R}_\alpha^{-1}\right\|\left\|\tilde{L}^*\right\|\left(\left\|\tilde{g}_\alpha - g_0\right\| + \left\|L - \tilde{L}\right\|\left\|x_0\right\|\right) \le m_3\alpha + m_4\mu + m_5\varepsilon,$$

где
$$m_3 = m_2 a_1\|f\| + \frac{\|L\|+1}{(1-q)\gamma}c_1,$$

$$m_4 = m_2 a_2\|f\| + \frac{\|L\|+1}{(1-q)\gamma}c_2 + \left(m_2 + \frac{\|L\|+1}{(1-q)\gamma}\right)\|x_0\|,$$

$$m_5 = m_2 a_3\|f\| + \frac{\|L\|+1}{(1-q)\gamma}c_3.$$

Теорема 3.2 доказана.

Теоремы 3.3 и 3.4 доказываются аналогично.

4. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОРЯДОК СХОДИМОСТИ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА

Завершим данную главу рассмотрением классической регуляризации А.Н. Тихонова [104].

Рассмотрим задачи нахождения решения (псевдорешения) с минимальной нормой уравнения

$$Ax = f \tag{4.1}$$

и минимума функционала А.Н. Тихонова

$$\|Ax - f\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min, \quad x \in H, \tag{4.2}$$

где $A: H \to F$ – линейный ограниченный оператор, $f \in F$ – заданная правая часть, а H и F – гильбертовы пространства.

Будем считать, что вместо точного оператора A и правой части f нам известны уровни их погрешности μ: $0 < \mu \le 1$ и $\varepsilon > 0$, то есть множества $\{\tilde{A}\}$ – линейных операторов $\tilde{A}: H \to G$ и $\{\tilde{f}\}$ – правых частей $\tilde{f} \in F$, удовлетворяющих условиям

$$\|\tilde{A} - A\| \le \mu, \quad \|\tilde{f} - f\| \le \varepsilon\|f\|. \tag{4.3}$$

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 4.1. а) ***Для того чтобы для всех*** $f \in F$ ***уравнение*** **(4.1)** ***имело псевдорешение с минимальной нормой, необходимо и достаточно нормальная разрешимость оператора*** A***;***

б) ***для того чтобы для всех*** $f \in F$ ***функционал*** **(4.2)** ***имел единственный минимум, сходящийся при*** $\alpha \to 0$ ***, необходимо и достаточно нормальная разрешимость оператора*** A**.**

Всюду в данном параграфе будем предполагать, что оператор A нормально разрешимый.

Псевдообратный оператор для оператора A обозначим A^+, а ортогональный проектор на ядро $\ker A$ оператора A – через Q.

Все псевдорешения уравнения (4.1) представляются формулой

$$x = A^{+} f + Qy\,, \tag{4.4}$$

где $y \in H$ – произвольный элемент, а нормальное псевдорешение – псевдорешение с минимальной нормой – формулой

$$x_0 = A^{+} f\,. \tag{4.5}$$

Единственный минимум функционала А.Н. Тихонова (4.2) представляется формулой

$$x_\alpha = \left(A^* A + \alpha E\right)^{-1} A^* f\,. \tag{4.6}$$

Для операторов $\left(A^* A + \alpha E\right)^{-1}$ и $\left(A^* A + \alpha E\right)^{-1} A^*$ справедливы разложения в степенные ряды

$$\left(A^* A + \alpha E\right)^{-1} = \alpha^{-1} Q + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \alpha^k \left[\left(A^* A\right)^{+}\right]^{k+1}, \tag{4.7}$$

$$\left(A^* A + \alpha E\right)^{-1} A^* = A^{+} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha^k \left[\left(A^* A\right)^{+}\right]^{k} A^{+}\,. \tag{4.8}$$

Сходимость рядов (4.7) и (4.8) обеспечивается условием $0 < \alpha < \rho_0^{-1}$, где ρ_0 – спектральный радиус оператора $\left(A^* A\right)^{+}$.

Оценка скорости сходимости регуляризованного решения x_α, определенного равенством (4.6) при $\alpha \to 0$, к x_0 – нормальному псевдорешению уравнения (4.1), определенному равенством (4.5), приводится в следующей теореме.

Теорема 4.2. ***Справедлива оценка***

$$\left\| x_\alpha - x_0 \right\| \le \left\| A^{+} \right\|^3 \alpha\,. \tag{4.9}$$

Действительно, переходя к нормам в тождестве

$$\left(A^*A+\alpha E\right)^{-1}A^*-A^+=-\alpha\left(A^*A+\alpha E\right)^{-1}A^*AA^+\left(A^*A\right)^+$$

и учитывая оценки

$$\left\|\left(A^*A+\alpha E\right)^{-1}A^*A\right\|\le 1,\qquad \left\|A^+\left(A^*A\right)^+\right\|\le\left\|A^+\right\|^3,$$

получим справедливость оценки (4.9).

Положим

$$\tilde{x}_\alpha=\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\tilde{f}\,, \tag{4.10}$$

$$\tilde{\tilde{x}}_\alpha=\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\tilde{f}_\alpha, \tag{4.11}$$

$$\tilde{f}_\alpha=\left(\tilde{A}\tilde{A}^*+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\tilde{A}^*\tilde{f}\,. \tag{4.12}$$

Основным результатом данного параграфа является следующее утверждение:

Теорема 4.3. ***При*** $\alpha=\mu$ ***справедливы оценки:***

$$\left\|\tilde{x}_\alpha-x_0\right\|_{\alpha=\mu}\le\left(m_1\mu+m_2\varepsilon\right)\|f\|\,, \tag{4.13}$$

если $f\in R(A)$***;***

$$\left\|\tilde{\tilde{x}}_\alpha-x_0\right\|_{\alpha=\mu}\le\left(m_3\mu+m_4\varepsilon\right)\|f\|, \tag{4.14}$$

если $f\notin R(A)$***, где*** $\tilde{x}_\alpha$ ***и*** $\tilde{\tilde{x}}_\alpha$ ***– определены равенствами (4.10) – (4.12).***

Доказательству теоремы 4.3 предпошлем две леммы.

Заметим, что приведенные в данном параграфе утверждения можно получить из § 1 и § 2 настоящей главы, полагая $L=E$ и $g=0$. Однако постоянные m_i $\left(i=\overline{1,4}\right)$, участвующие в оценках (4.13) и (4.14), в случае классической регуляризации А.Н. Тихонова, можно оценить более точно.

Постоянные m_i $\left(i=\overline{1,4}\right)$ определяются ниже в ходе доказательства теоремы.

Оптимальный порядок $O(\mu+\varepsilon)$ сходимости метода регуляризации А. Н. Тихонова для уравнений с нормально разрешимым оператором при $\alpha=k\mu\to 0$, где $k>0$ – некоторая постоянная, получен одновременно и независимо С. Джумаевым [31] и В. А. Морозовым, С. Ф. Гилязовым [62]. Этому окончательному результату предшествовали исследования многих авторов, в которых максимальным порядком являлся $O\left(\mu^{2/3}+\varepsilon\right)$ при $\alpha\sim\mu$. Следующий перечень работ, относящийся этой теме, является далеко не полным: [16, 17 – 19, 20, 24, 26, 27, 32, 38, 40, 51, 60, 101, 104, 109, 113] и др.

Лемма 4.1. ***При $\alpha=\mu$ справедливы оценки:***

$$\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}A^*\right\|\le n_1,\quad \left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^*+\alpha E\right)^{-1}A\right\|\le n_1, \tag{4.15}$$

$$\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\right\|\le n_2,\quad \left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^*+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\right\|\le n_2, \tag{4.16}$$

где
$$n_1=2\left(1+\|A\|\right)\left\|A^+\right\|,\quad n_2=n_1+1.$$

Доказательство леммы 4.1. Докажем первое из оценок (4.15). Так как оператор A нормально разрешимый, то $A^*=A^*AA^+$. Поэтому справедливо представление

$$\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}A^*=\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\tilde{A}A^+ +$$

$$+\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\left[A^*\left(A-\tilde{A}\right)+\left(A^*-\tilde{A}^*\right)A-\left(A^*-\tilde{A}^*\right)\left(A-\tilde{A}\right)\right]A^+.$$

Переходя здесь к нормам, учитывая неравенства

$$\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\right\|\le\frac{1}{\alpha},\quad \left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\tilde{A}\right\|\le 1$$

и полагая $\alpha=\mu$, получим

$$\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}A^*\right\|\le\left\|A^+\right\|+\frac{1}{\alpha}\left(\left\|A^*\right\|\mu+\left\|A\right\|\mu+\mu^2\right)\left\|A^+\right\|\le$$

$$\le\left\|A^+\right\|+\left(2\left\|A\right\|+\mu\right)\left\|A^+\right\|\le 2\left(\left\|A\right\|+1\right)\left\|A^+\right\|=n_1.$$

Первая из оценок (4.15) доказана. Вторая из оценок (4.15) доказывается аналогично.

Так как

$$\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\right\|\le\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\right\|\left\|\tilde{A}^*-A^*\right\|+\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}A^*\right\|,$$

то используя (4.3) и (4.15), получим справедливость оценки (4.16). Вторая из оценок (4.16) доказывается аналогично.

Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. ***При*** $\alpha=\mu$ ***справедливы оценки:***

$$\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^*+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\tilde{A}^*-AA^+\right\|\le n_3\mu, \tag{4.17}$$

$$\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\tilde{A}-A^+A\right\|\le n_3\mu, \tag{4.18}$$

где

$$n_3=\left(2n_2+n_1\left\|A\right\|\right).$$

Доказательство леммы 4.2. В силу нормальной разрешимости оператора A, имеем

$$\left(\tilde{A}\tilde{A}^*+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\tilde{A}^*-AA^+=-\alpha\left(\tilde{A}\tilde{A}^*+\alpha E\right)^{-1}AA^++$$

$$+\left(\tilde{A}\tilde{A}^*+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\left[\left(\tilde{A}^*-A^*\right)-\left(\tilde{A}^*-A^*\right)AA^+\right].$$

Переходя здесь к нормам, учитывая оценки (4.3), (4.15), (4.16) и полагая $\alpha=\mu$, получим

$$\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^*+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\tilde{A}^*-AA^+\right\|=\alpha\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^*+\alpha E\right)^{-1}A\right\|\left\|A^+\right\|+$$

$$+\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^*+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\right\|\left(\left\|\tilde{A}^*-A^*\right\|+\left\|\tilde{A}^*-A^*\right\|\left\|AA^+\right\|\right)\le .$$

$$\le \alpha n_1\left\|A^+\right\|+2\mu n_1=n_3\mu .$$

Оценка (4.17) доказана. Доказательство оценки (4.18) проводится аналогично.

Лемма 4.2 доказана.

Доказательство теоремы 4.3. Пусть $f\in R(A)$. Тогда $f=Ax_0$, где элемент x_0 определен в (4.5). Следовательно, имеем

$$\tilde{x}_\alpha-x_0=\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\tilde{f}-A^+f=$$

$$=\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\left[\left(\tilde{f}-f\right)-\left(A-\tilde{A}\right)A^+f\right]-$$

$$-\alpha\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}A^*\left(AA^*\right)^+f$$

Переходя здесь к нормам, полагая $\alpha=\mu$ и учитывая лемму 4.1, получим

$$\left\|\tilde{x}_\alpha-x_0\right\|\le\alpha\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}A^*\right\|\left\|\left(AA^*\right)^+f\right\|+$$

$$+\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\right\|\left(\left\|\tilde{f}-f\right\|+\left\|A-\tilde{A}\right\|\left\|A^+f\right\|\right)\le$$

$$\le\alpha n_1\left\|A^+\right\|^2\|f\|+n_2\left(\varepsilon\|f\|+\mu\left\|A^+\right\|\|f\|\right)=\left(m_1\mu+m_2\varepsilon\right)\|f\|,$$

где

$$m_1=n_1\left\|A^+\right\|^2+n_2\left\|A^+\right\|,\quad m_2=n_2 .$$

Оценка (4.13) доказана.

Докажем оценку (4.14). Пусть $f\notin R(A)$. Несложно проверяется тождество

$$\tilde{\tilde{x}}_\alpha - x_0 = \left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\tilde{f}_\alpha - A^+ f =$$

$$=\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\left(A-\tilde{A}\right)A^+ f + \left[\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\tilde{A}-A^+A\right]A^+ f +$$

$$+\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\left(\tilde{A}\tilde{A}^*+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\tilde{A}^*\left(\tilde{f}-f\right)+$$

$$+\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\left[\left(\tilde{A}\tilde{A}^*+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\tilde{A}^*-AA^+\right]f\ .$$

Переходя здесь к нормам, полагая $\alpha=\mu$, учитывая оценки (4.3), леммы 4.1 и 4.2, получим

$$\left\|\tilde{\tilde{x}}_\alpha - x_0\right\| = \left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\right\|\left\|A-\tilde{A}\right\|\left\|A^+ f\right\|+$$

$$+\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\tilde{A}-A^+A\right\|\left\|A^+ f\right\|+$$

$$+\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\right\|\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^*+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\tilde{A}^*\right\|\left\|\tilde{f}-f\right\|+$$

$$+\left\|\left(\tilde{A}^*\tilde{A}+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\right\|\left\|\left(\tilde{A}\tilde{A}^*+\alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\tilde{A}^*-AA^+\right\|\left\|f\right\|\le$$

$$\le n_2\mu\left\|A^+\right\|\left\|f\right\|+n_3\mu\left\|A^+\right\|\left\|f\right\|+n_2\varepsilon\left\|f\right\|+n_2n_3\mu\left\|f\right\|=\left(m_3\mu+m_4\varepsilon\right)\left\|f\right\|,$$

где
$$m_3=\left(n_2+n_3\right)\left\|A^+\right\|+n_2n_3,\qquad m_4=n_2\,.$$

Оценка (4.14) доказана.

Теорема 4.3 доказана.

ГЛАВА 3

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТИПА ГИЛЬБЕРТА. ПРОСТРАНСТВА ГЁЛЬДЕРА И ЛЕБЕГА

В настоящей главе изучается вопрос разрешимости и, в частности, однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа

$$(Ax)(t) = f(t) \tag{1.1}$$

– первого рода;

$$ax(t) + (Ax)(t) = f(t) \tag{1.2}$$

– второго рода и разработка быстрых алгоритмов решения соответствующих дискретизованных систем.

Здесь используются следующие обозначения:

$$A = T + K \tag{1.3}$$

– сингулярный интегральный оператор Гильберта нейтрального типа;

$$(Tx)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\, x(s)\,ds \tag{1.4}$$

– сингулярный интегральный оператор Гильберта, интеграл в котором понимается в смысле главного значения интеграла по Коши [64, с. 42-43];

$$K = K_1 + K_2 \tag{1.5}$$

– регулярный интегральный оператор нейтрального типа;

$$(K_1x)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_1(t-s)\,x(s)\,ds \tag{1.6}$$

– регулярный интегральный оператор с разностным ядром;

$$(K_2x)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_2(t+s)\,x(s)\,ds \tag{1.7}$$

– регулярный интегральный оператор с суммарным ядром;

$$k_1(\tau) = \sum_{m=-M}^{M} b_m e^{im\tau}, \quad k_2(\tau) = \sum_{m=-M}^{M} c_m e^{im\tau} \tag{1.8}$$

– регулярные части рассматриваемых уравнений;

$$a, \quad b_m, \quad c_m \qquad (m = -M, \ldots, M) \tag{1.9}$$

– произвольные комплексные числа, а M – произвольное натуральное число;

$$f(t) \in H^\alpha, \qquad x(t) \in H^\alpha \tag{1.10}$$

– заданная и искомая функции, соответственно;

$$H^\alpha = H^\alpha[-\pi, \pi] = \left\{ f(t) : \left| f(t+\tau) - f(t) \right| \le H_{\alpha, f} \left| \tau \right|^\alpha \right\} \tag{1.11}$$

– пространство Гёльдера 2π -периодических комплекснозначных функций;

$$\| f \|_{H^\alpha} = \| f \|_C + H_{\alpha, f} \tag{1.12}$$

– норма в пространстве H^α;

$$\| f \|_C = \max_{-\pi \le t \le \pi} \left| f(t) \right| \tag{1.13}$$

– норма в пространстве непрерывных функций $C = C[0, 2\pi]$;

$$H_{\alpha, f} = \sup_{-\pi \le t \ne s \le \pi} \frac{\left| f(t) - f(s) \right|}{\left| t - s \right|^\alpha} \tag{1.14}$$

– постоянная Гёльдера функции $f(t)$;

$$\left| f(t) - f(s) \right| \le H_{\alpha, f} \left| t - s \right|^\alpha \tag{1.15}$$

– условие Гёльдера с показателем α;

$$L_2 = L_2[-\pi, \pi] = \left\{ f(t) : \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) \right|^2 dt < +\infty \right\} \tag{1.16}$$

– пространство Лебега 2π -периодических комплекснозначных функций суммируемых с квадратом;

$$\| f \|_{L_2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) \right|^2 dt} \tag{1.17}$$

– норма в пространстве L_2.

2. ЧАСТИЧНЫЕ СУММЫ ФУРЬЕ И ФЕЙЕРА

2.1. Свойства частичных сумм Фурье и сумм Фейера. Пусть $f(t)$ – суммируемая функция на отрезке $[-\pi, \pi]$. Положим

$$f_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)\,dt, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Числа f_k называются **коэффициентами Фурье** функции $f(t)$, а ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikt} \tag{2.2}$$

– рядом Фурье функции $f(t)$, при этом если ряд (2.2) сходится в том или ином смысле, то будем писать

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikt}, \tag{2.3}$$

если же не установлена сходимость, то пишем формальное равенство

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikt}. \tag{2.4}$$

В дальнейшем будем считать, что данная функция $f(t)$ продолжена периодически на всю числовую с периодом 2π.

Определим для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ тригонометрические многочлены

$$(S_n f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikt}, \tag{2.5}$$

называемые **частичными суммами** ряда Фурье.

Для получения интегрального представления частичных сумм произведем их преобразование. С этой целью подставим в $\left(S_n f\right)(t)$ вместо f_k их интегральные выражения (2.1):

$$\left(S_n f\right)(t)=\sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iks} f(s)\,ds\right)e^{ikt}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-s)}ds\,. \quad (2.6)$$

Вычислим подынтегральную сумму. Если $t-s\neq 2m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$, то $e^{i(t-s)}\neq 1$ и, следовательно,

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-s)}=e^{-in(t-s)}+e^{-i(n-1)(t-s)}+\ldots+e^{in(t-s)}=$$

$$=\frac{e^{i(n+1)(t-s)}-e^{-in(t-s)}}{e^{i(t-s)}-1}=\frac{e^{-i\frac{t-s}{2}}\left(e^{i(n+1)(t-s)}-e^{-in(t-s)}\right)}{e^{-i\frac{t-s}{2}}\left(e^{i(t-s)}-1\right)}=$$

$$=\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-s)}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-s)}}{e^{i\frac{t-s}{2}}-e^{-i\frac{t-s}{2}}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{(2n+1)(t-s)}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}=\frac{\sin\frac{(2n+1)(s-t)}{2}}{\sin\frac{s-t}{2}},$$

то есть

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-s)}=\frac{\sin\frac{(2n+1)(s-t)}{2}}{\sin\frac{s-t}{2}}\,. \quad (2.7)$$

Если $t-s=2m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$, то $e^{i(t-s)}=1$ и, следовательно,

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-s)}=\sum_{k=-n}^{n}1=2n+1\,.$$

Такой же результат получается из (2.7) при предельном переходе $t-s \to 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Поэтому формулу (2.7) можно использовать и в случае $t-s = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, понимая при этом, что ее предельное значение при $t-s \to 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Из (2.6) и (2.7), получаем

$$\left(S_n f\right)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\frac{\sin\frac{(2n+1)(s-t)}{2}}{\sin\frac{s-t}{2}}ds .$$

Произведя в полученном интеграле замену переменной $s-t=z$ и учитывая 2π-периодичность функции $f(t)$, получаем интегральное представление общего члена частичной суммы ряда Фурье

$$\left(S_n f\right)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+z)\frac{\sin\frac{(2n+1)z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}dz . \tag{2.8}$$

Функция

$$D_n(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{(2n+1)z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} \tag{2.9}$$

называется **ядром Дирихле.**

Наряду с частичными суммами (2.5) рассмотрим их средние арифметические:

$$\left(\sigma_m f\right)(t) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}\left(S_n f\right)(t), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{2.10}$$

которые называются **суммами Фейера.**

Используя тригонометрическое тождество

$$\sum_{n=0}^{m-1}\sin\frac{(2n+1)z}{2} = \frac{\sin^2\frac{mz}{2}}{\sin\frac{z}{2}},$$

получим интегральное представление сумм Фейера:

$$\left(\sigma_m f\right)(t)=\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t+z\right)\frac{\sin\frac{\left(2n+1\right)z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f\left(t+z\right)}{\sin\frac{z}{2}}\left(\sum_{n=0}^{m-1}\sin\frac{\left(2n+1\right)z}{2}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{mz}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)^2 f\left(t+z\right)dz,\qquad m\in\mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Полученный интеграл называется **интегралом Фейера,** а функция

$$\Phi_m\left(z\right)=\frac{1}{2m\pi}\left(\frac{\sin\frac{mz}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)^2 \tag{2.12}$$

– ядром Фейера.

Таким образом, для частичных сумм ряда Фурье и сумм Фейера получены следующие интегральные представления

$$\left(S_n f\right)(t)=\int_{-\pi}^{\pi} D_n\left(z\right) f\left(t+z\right)dz, \tag{2.13}$$

$$\left(\sigma_n f\right)(t)=\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n\left(z\right) f\left(t+z\right)dz. \tag{2.14}$$

Отметим некоторые свойства ядра Дирихле (2.9) и Фейера (2.12).

Свойство 2.1. Для всех $n=0, 1, 2,\ldots$ имеет место равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n\left(z\right)dz=1.$$

Справедливость этого равенства следует из (2.7).

Свойство 2.2. Для всех $n \in \mathbb{N}$ функция $\Phi_n(t)$ является четной

$$\Phi_n(-t) = \Phi_n(t)\,. \tag{2.15}$$

Свойство 2.3. Для всех $x \in [-\pi, \pi]$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\Phi_n(t) \geq 0\,. \tag{2.16}$$

Справедливость равенств (2.15) (2.16) следует из определения ядра Фейера – функции (2.12).

Свойство 2.4. Для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 1. \tag{2.17}$$

Если $f(t) \equiv 1$, то коэффициентами Фурье являются

$$f_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k = 0, \\ 0, & \text{если} \quad k \neq 0. \end{cases}$$

Тогда $(S_n f)(t) \equiv 1$ для всех $t \in [-\pi, \pi]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и, следовательно, $(\sigma_n f)(t) \equiv 1$ для всех $t \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда и из (2.14) следует справедливость (2.17). Утверждение доказано.

Свойство 2.5. Для любого фиксированного $\delta : 0 < \delta < \pi$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \eta_n(\delta) = 0\,, \tag{2.18}$$

где

$$\eta_n(\delta) \equiv \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t)\,dt\,. \tag{2.19}$$

Действительно, если $\delta \le t \le \pi$, то имеет место неравенство $\sin\frac{t}{2} \ge \frac{\delta}{2}$. Поэтому

$$\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \le \frac{1}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} = \left(\frac{2}{\delta}\right)^2. \tag{2.20}$$

Из (2.12) и (2.20) получаем справедливость соотношения (2.18):

$$\int_\delta^\pi \Phi_n(t)\,dt = \frac{1}{2n\pi}\int_\delta^\pi \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt \le$$

$$\le \frac{1}{2n\pi}\int_\delta^\pi \left(\frac{2}{\delta}\right)^2 dt = \frac{2(\pi-\delta)}{n\pi\delta^2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Утверждение доказано.

2.2. Достаточные условия сходимости ряда Фурье. Важным вопросом, связанным с рядами Фурье, является вопрос их сходимости. Поэтому, с точки зрения применения этих рядов к решению тех или иных задач, существенным является установление условий, при выполнении которых гарантируется сходимость рядов Фурье в каком-либо смысле: в среднем, в точке, всюду, почти всюду, равномерная и так далее.

Одним из достаточных признаков сходимости ряда Фурье в данной точке является признак Дини [43, с. 399].

Признак Дини. ***Пусть*** $f(t)$ ***– суммируемая функция. Если при каждом фиксированном*** t ***существует интеграл***

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt$$

при каком-либо $\delta > 0$***, то частичные суммы*** $S_n f$ ***ряда Фурье функции*** $f(t)$ ***сходятся в этой точке*** t ***к*** $f(t)$***.***

Признак Дини обобщается и для случая, когда t является точкой разрыва первого рода.

Пусть $f(t)$ – ограниченная 2π-периодическая функция, имеющая лишь разрывы первого рода. Если $f(t)$ имеет в каждой точке левую и правую производные, то при каждом t справедливо соотношение

$$\left(S_n f\right)(t) \to \frac{1}{2}\left(f(t+0)+f(t-0)\right) \ (n\to\infty).$$

Если в точке t функция $f(t)$ является непрерывной, то

$$f(x+0)=f(x-0)=f(x)$$

и, следовательно,

$$\left(S_n f\right)(x) \to f(x) \ (n\to\infty).$$

Непрерывность функции не является достаточной для сходимости ряда Фурье. Существуют непрерывные функции, для которых ряд Фурье сходится не во всех точках.

Рассмотрим теперь вопрос равномерной сходимости ряда Фурье. Очевидно, что если функция $f(t)$ разрывная, то сходимость ее ряда Фурье не может быть равномерной, так как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций является непрерывной функцией. Отсюда следует, что непрерывность функции $f(t)$ – необходимое условие равномерной сходимости ряда Фурье (но, отнюдь, не достаточное). Сформулируем достаточный признак равномерной сходимости ряда Фурье, аналогичный признаку Дини.

Пусть ограниченная суммируемая функция $f(t)$ равномерно по $t\in E\subset[-\pi,\pi]$ удовлетворяет условию Дини, то есть для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\left|f(t+s)-f(t)\right|}{|s|}ds<\varepsilon,\quad t\in E.$$

Тогда ряд Фурье функции $f(t)$ сходится к этой функции равномерно на E.

2.3. Ряды Фурье непрерывной функции. Теорема Фейера. Непрерывная функция однозначно определяется своим рядом Фурье, то есть, если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – две непрерывные функции, для которых выполняются равенства их коэффициентов Фурье:

$$f_{1k} = f_{2k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.21}$$

то они тождественно равны

$$f_1(t) \equiv f_2(t). \tag{2.22}$$

Действительно, из непрерывности функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ следует их принадлежность пространству L_2. Так как в этом пространстве система функций $\varphi_k(t) = e^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z}$ является полной ортогональной системой, то для разности этих функций $f = f_1 - f_2$ имеет место равенство Парсеваля:

$$\|f\|_{L_2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2. \tag{2.23}$$

Из равенства (2.21) получаем

$$f_k = f_{1k} - f_{2k} = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому из (2.23) следует равенство

$$\|f\|_{L_2} = 0. \tag{2.24}$$

Равенство (2.24) означает, что функция $f(t)$ почти всюду равна нулю. Но функция $f(t)$ как разность двух непрерывных функций является непрерывной, поэтому она тождественно равна нулю: $f(t) \equiv 0$. Полученное равенство эквивалентно равенству (2.22). Что и требовалось доказать.

Как было отмечено выше, не для всякой непрерывной функции $f(t)$ ее ряд Фурье является сходящимся, и поэтому нельзя эту функцию получить непосредственным суммированием ее ряда Фурье. В теореме Фейера [43, с. 405] дается способ восстановления непрерывной функции по ее частичным суммам Фурье.

Теорема Фейера. ***Если $f(t)$ – непрерывная 2π-периодическая функция, то последовательность $\{\sigma_n f\}$ ее сумм Фейера сходится к самой функции $f(t)$ равномерно на всей числовой оси.***

Доказательство. Докажем равномерное приближение сумм Фейера $\sigma_n f$ к $f(t)$ при $n \to \infty$. Действительно, из непрерывности и периодичности функции $f(x)$ вытекает ее ограниченность и равномерная непрерывность. Поэтому существует такое число $M > 0$, что для всех $t \in [-\pi, \pi]$ выполняется неравенство

$$|f(t)| \le M, \quad t \in [-\pi, \pi]. \tag{2.25}$$

Кроме того, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|t'' - t'| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(t'') - f(t')| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (|t'' - t'| < \delta). \tag{2.26}$$

Для завершения доказательства следует оценить разность

$$f(t) - (\sigma_n f)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(t+s)] \Phi_n(s)\, ds. \tag{2.27}$$

Введем обозначения:

$$J_- = \int_{-\pi}^{-\delta} [f(t) - f(t+s)] \Phi_n(s)\, ds, \tag{2.28}$$

$$J_0 = \int_{-\delta}^{\delta} \left[f(t) - f(t+s) \right] \Phi_n(s)\, ds, \tag{2.29}$$

$$J_+ = \int_{\delta}^{\pi} \left[f(t) - f(t+s) \right] \Phi_n(s)\, ds. \tag{2.30}$$

Из (2.19), (2.25), (2.28) и (2.30) будем иметь

$$\left| J_- \right| \le 2M\eta_n(\delta), \qquad \left| J_+ \right| \le 2M\eta_n(\delta). \tag{2.31}$$

Число n_0 выберем настолько большим, чтобы при $n \ge n_0$ и данном $\delta > 0$ выполнялось неравенство

$$2M\eta_n(\delta) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.32}$$

Из (2.26) и (2.29) будем иметь

$$\left| J_0 \right| \le \int_{-\delta}^{\delta} \left| f(t) - f(t+s) \right| \Phi_n(s)\, ds <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)\, dt \le \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\, dt = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.33}$$

Переходя к модулю в равенстве (2.27) и используя оценки (2.31) – (2.33), получим

$$\left| f(x) - \left(\sigma_n f \right)(t) \right| \le \left| J_- \right| + \left| J_0 \right| + \left| J_+ \right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

равномерно по $t \in [-\pi, \pi]$. Из полученного неравенства, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, следует утверждение теоремы.

Теорема Фейера доказана.

3. ПРИЗНАК АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

3.1. Аппроксимация гёльдеровых функций непрерывно дифференцируемыми функциями. Пространство гёльдеровых 2π-периодических функций не является сепарабельным, и множество всех тригонометрических полиномов, порожденное системой функций $\varphi_k(t)=e^{ikt}$, $k\in\mathbb{Z}$, не является плотным в этом пространстве. Поэтому представляет интерес изучение вопроса о возможности аппроксимации функций гёльдерова пространства тригонометрическими полиномами по норме этого пространства и выявление условия, при выполнении которого возможна такая аппроксимация.

Важным моментом в изучении поставленного вопроса является следующее утверждение.

Лемма 3.1. ***Пусть*** $f(t)\in H^{\alpha}[0,2\pi]$. ***Для представления функции*** $f(t)$ ***как предела последовательности непрерывно дифференцируемых функций в пространстве*** $H^{\alpha}[0,2\pi]$, ***необходимо и достаточно выполнение условия***

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{0<|t-s|<\delta}\frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^{\alpha}}=0. \tag{3.1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функцию $f(t)$ можно представить как предел последовательности непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $H^{\alpha}[0,2\pi]$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такая непрерывно дифференцируемая функция $g(t)$, что

$$\|f-g\|_{H^{\alpha}[0,2\pi]}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.2}$$

Из непрерывной дифференцируемости функции $g(t)$ следует существование числа $K>0$, для которого справедливо неравенство

$$|g(t)-g(t')|\le K|t-t'| \quad \text{для любых} \quad -\pi\le t\ne t'\le\pi. \tag{3.3}$$

По заданному $\varepsilon > 0$ выберем величину $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось условие

$$K\delta^{1-\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.4}$$

Тогда для всех $-\pi \le t \ne t' \le \pi$, удовлетворяющих условию $|t-t'| < \delta$, в силу (3.2) – (3.4), будем иметь

$$\frac{|f(t)-f(t')|}{|t-t'|^{\alpha}} \le \frac{|f(t)-g(t)-f(t')+g(t')|}{|t-t'|^{\alpha}} + \frac{|g(t)-g(t')|}{|t-t'|^{\alpha}} \le$$

$$\le \|f-g\|_{H^{\alpha}[0,2\pi]} + \frac{K|t-t'|}{|t-t'|^{\alpha}} =$$

$$= \|f-g\|_{H^{\alpha}[0,2\pi]} + K|t-t'|^{1-\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \tag{3.5}$$

Таким образом, переходя к пределу и супрермуму в (3.5), получим

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{0<|t-t'|<\delta} \frac{|f(t)-f(t')|}{|t-t'|^{\alpha}} \le \varepsilon\,, \tag{3.6}$$

справедливое для всех $\varepsilon > 0$. В силу произвольности ε, из соотношения (3.6) вытекает справедливость равенства (3.1).

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет условию (3.1). Рассмотрим семейство функций

$$f_{\varepsilon}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\varepsilon}(t-\varepsilon) f(s)\,ds, \qquad \varepsilon > 0\,, \tag{3.7}$$

где
$$\omega_{\varepsilon}(u) = \begin{cases} c_{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-u^2}}, & \text{если} \quad |u| < \varepsilon, \\ 0, & \text{если} \quad |u| \ge \varepsilon, \end{cases}$$

а число c_ε выбирается из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(u)\,du = 1: \tag{3.8}$$

$$c_\varepsilon = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - u^2} \right) du \right)^{-1}. \tag{3.9}$$

Произведя замену $u = \varepsilon v$, заметим, что интеграл в правой части (3.9) существует и отличен от нуля при всех $\varepsilon > 0$:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - u^2} \right) du \right)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{-1}^{1} \exp\left(-\frac{1}{1 - v^2} \right) dv \right).$$

Функция $f_\varepsilon(t)$, определенная равенством (3.7), является бесконечно дифференцируемой на всей числовой оси. Заменой переменной $(s = t + u)$ функцию $f_\varepsilon(t)$ можно представить в виде

$$f_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(u)\, f(u+t)\,du, \qquad \varepsilon > 0.$$

Покажем справедливость предельного соотношения

$$\left\| f_\varepsilon - f \right\|_{H^\alpha[0,2\pi]} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.10}$$

Действительно, в силу равенства (3.8), получим представление

$$f_\varepsilon(t) - f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(u)\left[f(u+t) - f(t) \right] du.$$

Переходим к модулю в этом равенстве

$$\left| f_\varepsilon(t) - f(t) \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(u) \left| f(u+t) - f(t) \right| du \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(u)\,du \cdot \sup_{\substack{-\pi \le t \le \pi \\ |u| < \varepsilon}} \left| f(u+t) - f(t) \right| \le H^\alpha(f) \cdot \varepsilon^\alpha. \tag{3.11}$$

Оценим следующее отношение:

$$\frac{\left|f_\varepsilon(t)-f(t)-f_\varepsilon(t')+f(t')\right|}{\left|t-t'\right|^\alpha}\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{\infty}\omega_\varepsilon(u)\frac{\left|f(u+t)-f(t)-f(u+t')+f(t')\right|}{\left|t-t'\right|^\alpha}du\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{\infty}\omega_\varepsilon(u)du\cdot\sup_{\substack{-\pi\le t\ne t'\le\pi\\ |u|<\varepsilon}}\frac{\left|f(u+t)-f(t)-f(u+t')+f(t')\right|}{\left|t-t'\right|^\alpha}. \qquad (3.12)$$

Из условия леммы (равенство (3.1)) следует, что для любого $\sigma>0$ можно найти $\delta>0$, а из условия $\left|t-t'\right|<\delta$ вытекает неравенство

$$\left|f(t)-f(t')\right|<\frac{\sigma}{2}\left|t-t'\right|^\alpha. \qquad (3.13)$$

Пусть $\left|t-t'\right|<\delta$. Тогда из (3.13) для всех u получим неравенство

$$\left|f(u+t)-f(u+t')\right|<\frac{\sigma}{2}\left|t-t'\right|^\alpha,$$

и отсюда следует

$$\left|f(u+t)-f(t)-f(u+t')+f(t')\right|\le$$

$$\le\left|f(u+t)-f(u+t')\right|+\left|f(t)-f(t')\right|<\sigma\left|t-t'\right|^\alpha. \qquad (3.14)$$

Из (3.12), в силу (3.14), будем иметь

$$\frac{\left|f_\varepsilon(t)-f(t)-f_\varepsilon(t')+f(t')\right|}{\left|t-t'\right|^\alpha}\le\sup_{t\ne t'}\frac{\sigma\left|t-t'\right|^\alpha}{\left|t-t'\right|^\alpha}=\sigma. \qquad (3.15)$$

Пусть теперь $\left|t-t'\right|\ge\delta$. Число $\varepsilon_0>0$ выберем из условия

$$\varepsilon_0^\alpha=\frac{\sigma}{2}\delta^\alpha. \qquad (3.16)$$

В силу неравенства (3.11) при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ будем иметь

$$\frac{\left|f_\varepsilon(t)-f(t)-f_\varepsilon(t')+f(t')\right|}{\left|t-t'\right|^\alpha}\le$$

$$\le\frac{\left|f_\varepsilon(t)-f(t)\right|}{\left|t-t'\right|^\alpha}+\frac{\left|f_\varepsilon(t')-f(t')\right|}{\left|t-t'\right|^\alpha}<$$

$$<2\cdot\frac{H^\alpha(f)\varepsilon^\alpha}{\delta^\alpha}=2\cdot\frac{\frac{\sigma}{2}\cdot\delta^\alpha}{\delta^\alpha}=\sigma. \tag{3.17}$$

Таким образом, при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, для всех $t\ne t'$, из (3.15) и (3.17) вытекает справедливость оценки

$$\frac{\left|f_\varepsilon(t)-f(t)-f_\varepsilon(t')+f(t')\right|}{\left|t-t'\right|^\alpha}<\sigma. \tag{3.18}$$

Отсюда при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ следует

$$H^\alpha\left(f_\varepsilon-f\right)<\sigma,\qquad\left(0<\varepsilon<\varepsilon_0\right). \tag{3.19}$$

Из (3.11), (3.16), (3.18) и (3.19) получим справедливость оценки

$$\left\|f_\varepsilon-f\right\|_{H^\alpha[0,2\pi]}<\sigma\quad\text{при}\quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0.$$

Отсюда, в силу произвольности $\sigma>0$, вытекает соотношение (3.10).

Лемма 3.1 доказана.

3.2. Аппроксимация гельдеровых функций тригонометрическими полиномами. Признак аппроксимируемости гёльдеровых функций пространства $H^\alpha[0,2\pi]$ тригонометрическими полиномами приводится в следующем утверждении.

Теорема 3.1. ***Пусть*** $f(t)\in H^\alpha[0,2\pi]$. ***Для сходимости последовательности*** $\{\sigma_n f\}$ ***– частичных сумм Фейера к самой функции*** $f(t)$

в пространстве $H^{\alpha}[0,2\pi]$ ***необходимо и достаточно выполнение условия* (3.1).**

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность частичных сумм Фейера $\{\sigma_n f\}$ сходится к функции $f(t)$ по норме пространства $H^{\alpha}[0,2\pi]$, то есть

$$\left\| f-\sigma_n f \right\|_{H^{\alpha}[0,2\pi]} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty . \tag{3.20}$$

Докажем справедливость соотношения (3.1). Суммы Фейера по построению являются непрерывно дифференцируемыми функциями. Тогда из условия необходимости леммы 3.1 следует справедливость (3.1).

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть имеет место равенство (3.1). Докажем справедливость соотношения (3.20).

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Так как $f(t)$ является непрерывной 2π -периодической функцией, то в силу теоремы Фейера найдется такое число n_0, что при $n \ge n_0$ выполняется неравенство

$$\left\| f-\sigma_n f \right\|_{H^{\alpha}[0,2\pi]} < \frac{\varepsilon}{2} . \tag{3.21}$$

По неравенству треугольника для всех $t \ne t'$ будем иметь

$$\frac{\left| f(t)-(\sigma_n f)(t)-f(t')+(\sigma_n f)(t') \right|}{|t-t'|^{\alpha}} \le$$

$$\le \frac{|f(t)-f(t')|}{|t-t'|^{\alpha}} + \frac{\left|(\sigma_n f)(t)-(\sigma_n f)(t')\right|}{|t-t'|^{\alpha}} . \tag{3.22}$$

В силу равенства (3.1) по данному $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$, что при $|t - t'| < \delta$ равномерно по x выполняется неравенство

$$\frac{|f(x+t)-f(x+t')|}{|t-t'|^{\alpha}} < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{для всех } x . \tag{3.23}$$

Так как $\left(\sigma_n f\right)(t)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x+t\right)\Phi_n\left(x\right)dx$, то из (3.22) и (3.23) будем иметь

$$\frac{\left|\left(\sigma_n f\right)(t)-\left(\sigma_n f\right)(t')\right|}{\left|t-t'\right|^{\alpha}}\le\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|f\left(x+t\right)-f\left(x+t'\right)\right|}{\left|t-t'\right|^{\alpha}}\Phi_n\left(x\right)dx\le$$

$$\le\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n\left(x\right)dx\cdot\sup_{\substack{-\pi\le x\le\pi\\ 0<\left|t-t'\right|<\delta}}\frac{\left|f\left(x+t\right)-f\left(x+t'\right)\right|}{\left|t-t'\right|^{\alpha}}<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.24}$$

Складывая неравенства (3.21), (3.23) и (3.24), получим окончательную оценку

$$\left\|f-\sigma_n f\right\|_{H^{\alpha}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon,$$

которая и завершает доказательство достаточности.

Теорема 3.1 доказана.

4. ИНВАРИАНТНОСТЬ СРЕЗОК РЯДА ФУРЬЕ

Пусть $f\left(t\right)\in H^{\alpha}$. Ряд Фурье функции $f\left(t\right)$ обозначим

$$f\left(t\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k e^{ikt}, \tag{4.1}$$

где

$$f_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-iks}f\left(s\right)ds,\qquad k\in\mathbb{Z} \tag{4.2}$$

– коэффициенты Фурье функции $f\left(t\right)$.

Каждого из остатков ряда Фурье (4.1)

$$g_{n,+\infty}\left(t\right)=\sum_{m=n}^{\infty}f_k e^{ikt}, \tag{4.3}$$

$$g_{n,-\infty}\left(t\right)=\sum_{m=-\infty}^{n}f_k e^{ikt} \tag{4.4}$$

назовём **срезкой ряда Фурье**, где n – произвольное целое число.

При доказательстве принадлежности образа сингулярного интегрального оператора Гильберта данному классу Гёльдера H^{α} используется следующее утверждение.

Теорема 4.1. ***Пусть*** $f(t) \in H^{\alpha}$ ***– произвольная функция. Тогда для любого целого*** n ***каждая из срезок*** **(4.3)** ***и*** **(4.4)** ***является гёльдеровой функцией данного класса:***

$$g_{n,+\infty}(t) \in H^{\alpha}, \quad g_{n,-\infty}(t) \in H^{\alpha}. \tag{4.5}$$

Доказательство теоремы 4.1. Покажем вначале равномерную сходимость ряда Фурье функции $f(t)$ к этой функции. С этой целью обратимся к признаку Дини [43, с. 403]:

Если на некотором множестве $E \subset [-\pi, \pi]$ ***суммируемая функция*** $f(t)$ ***ограничена и для любого*** $\varepsilon > 0$ ***существует такое*** $\delta > 0$***, что***

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(t+\tau) - f(t)|}{|\tau|} d\tau < \varepsilon$$

одновременно для всех $t \in E$***, то ряд Фурье функции*** $f(t)$ ***сходится к этой функции равномерно на*** E***.***

Проверим выполнение условий этой теоремы для нашей ситуации.

Так как функция $f(t)$ принадлежит пространству Гёльдера, то она непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и, следовательно, ограничена на этом отрезке. Первое условие признака Дини выполнено.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ – произвольное. Величину δ выберем из условия $0 < \delta < \sqrt[\alpha]{\dfrac{\alpha\varepsilon}{2H_{\alpha,f}}}$, где $H_{\alpha,f}$ – постоянная Гёльдера функции $f(t) \in H^{\alpha}$. Тогда

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\left| f(t+\tau) - f(t) \right|}{|\tau|} d\tau \le \int_{-\delta}^{\delta} \frac{H_{\alpha,f} |\tau|^{\alpha}}{|\tau|} d\tau = \frac{2H_{\alpha,f}}{\alpha} \delta^{\alpha} < \varepsilon$$

одновременно для всех $t \in [-\pi, \pi]$. Второе условие признака Дини выполнено.

Таким образом, нами проверено выполнение обоих условий признака Дини. Следовательно, ряд Фурье (4.1) сходится к функции $f(t)$ равномерно на $[-\pi, \pi]$, то есть имеет место равенство (4.1).

Докажем вначале справедливость утверждения теоремы при $n = 0$:

$$g_{0,+\infty} \in H^{\alpha}. \tag{4.6}$$

Полагая $\zeta = e^{it}$ и $\varphi(\zeta) = f(t)$, равенство (1.5) запишем в виде

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \zeta^k. \tag{4.7}$$

Очевидно включение $\varphi(\zeta) \in H^{\alpha}$.

Из теоремы Племеля – Привалова [64, с. 58] следует, что интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \qquad |z| < 1 \tag{4.8}$$

внутри единичного круга $|z| < 1$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha : 0 < \alpha < 1$ и имеет непрерывное продолжение $\Phi^{+}(z)$ на единичную окружность $|z| = 1$, также удовлетворяющее условию Гёльдера:

$$\Phi^{+}(z) = \begin{cases} \Phi(z), & \text{если} \quad |z| < 1, \\ \lim\limits_{\substack{w \to z \\ |w| < 1}} \Phi(w), & \text{если} \quad |z| = 1. \end{cases}$$

Получим формулы для представления граничных значений интеграла типа Коши при $|z|=1$, а именно, докажем равенство

$$\Phi^{+}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k\,, \qquad |z|=1\,. \tag{4.9}$$

Для произвольных z и ζ : $|z|<1$ и $|\zeta|=1$ имеет место разложение в ряд

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{\zeta^m}\,. \tag{4.10}$$

Подставим (4.7) и (4.10) в (4.8):

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{\zeta^m}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\zeta^k d\zeta\,. \tag{4.11}$$

Ряды в правых частях (4.7) и (4.10) сходятся равномерно по ζ : $|\zeta|=1$ и, следовательно, в (4.11) можно поменять порядок суммирования с интегрированием:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{\infty} z^m\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\int_{|\zeta|=1}\zeta^{k-m-1}d\zeta\,. \tag{4.12}$$

Произведя замену $\zeta=e^{it}$, вычислим полученный интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\zeta^{k-m-1}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)t}dt=\begin{cases}0, & \text{если} \quad k\neq m,\\ 1, & \text{если} \quad k\neq m.\end{cases}. \tag{4.13}$$

Из равенств (4.12) и (4.13) получим

$$\Phi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \qquad |z|<1\,.$$

Покажем, что срезка ряда (4.7) (при $\zeta=e^{it}$)

$$\varphi_{0,+\infty}(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k\zeta^k, \qquad |\zeta|=1 \tag{4.14}$$

сходится равномерно на единичной окружности $|\zeta|=1$. Для этого следует установить, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n \ge N(\varepsilon)$ и всех $m=0, 1, 2, \ldots$, вытекает оценка

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} f_k \zeta^k\right| < \varepsilon . \tag{4.15}$$

Действительно, из равномерной сходимости ряда (1.5) вытекает, что по заданному $\varepsilon>0$ можно найти такой номер $N_1(\varepsilon)$, что при $n \ge N_1(\varepsilon)$ и всех $m_1, m_2 = 0, 1, 2, \ldots$, вытекает оценка

$$\left| f(t) - \sum_{k=-(n+m_1)}^{n+m_2} f_k e^{ikt} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.16}$$

одновременно для всех $t \in [-\pi, \pi]$. Положим $N(\varepsilon)=N_1(\varepsilon)+1$. Тогда при $n \ge N(\varepsilon)$ и всех $m=0, 1, 2, \ldots$, в силу (4.16), будем иметь

$$\left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n-1} f_k e^{ikt} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n+m} f_k e^{ikt} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этих оценок при $\zeta = e^{it}$ получим

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} f_k \zeta^k\right| = \left|\sum_{k=n}^{n+m} f_k e^{ikt}\right| = \left|\sum_{k=-n}^{n+m} f_k e^{ikt} - f(t) - \sum_{k=-n}^{n-1} f_k e^{ikt} + f(t)\right| \le$$

$$\le \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n+m} f_k e^{ikt} \right| + \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n-1} f_k e^{ikt} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Оценка (4.15) доказана. Таким образом, ряд (4.14) сходится равномерно на единичной окружности $|\zeta|=1$.

Рассмотрим теперь ряд

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \qquad |z| \le 1 . \tag{4.17}$$

Докажем равномерную сходимость этого ряда на замкнутом круге $|z| \le 1$.

При $z = 0$ ряд (4.17) очевидно сходится. Если $z \ne 0$, то введя обозначения

$$\zeta = \frac{z}{|z|}, \qquad a_k = f_k \zeta^k, \qquad b_k = |z|^k, \qquad S_{n,k} = \sum_{l=0}^{k} a_{n+l}, \tag{4.18}$$

запишем ряд (4.17) в виде

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k. \tag{4.19}$$

Оценим частичную сумму ряда (4.19) с помощью преобразования Абеля [34, с. 15].

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное. В силу равномерной сходимости ряда (4.14) на единичной окружности $|\zeta| = 1$ можно найти такой номер $N_2(\varepsilon)$, что при $n \ge N_2(\varepsilon)$ и всех $p = 1, 2, \ldots$, выполнено неравенство

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k \zeta^k \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.20}$$

или в обозначениях (4.18)

$$\left| S_{n,k} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, p. \tag{4.21}$$

Нетрудно проверить справедливость следующей цепочки равенств и неравенств:

$$\left| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k} \right| = \left| \sum_{k=1}^{p} \left(S_{n,k} - S_{n,k-1} \right) b_{n+k} \right| = \left| \sum_{k=1}^{p} S_{n,k} b_{n+k} - \sum_{k=1}^{p} S_{n,k-1} b_{n+k} \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{p-1} S_{n,k} \left(b_{n+k} - b_{n+k+1} \right) + S_{n,p} b_{n+p} - S_{n,0} b_{n+1} \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{p-1} \left| S_{n,k} \right| \left(b_{n+k} - b_{n+k+1} \right) + \left| S_{n,p} \right| b_{n+p} + \left| S_{n,0} \right| b_{n+1} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{p-1} \left(b_{n+k} - b_{n+k+1} \right) + b_{n+p} + b_{n+1} \right) \max_{0\le k\le p} \left| S_{n,k} \right| = 2b_{n+1} \max_{0\le k\le p} \left| S_{n,k} \right| . \quad (4.22)$$

Так как $|z| \le 1$, то $b_{n+1} = |z|^{n+1} \le 1$. Из (4.20) – (4.22) следует, что

$$\left| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k} \right| < 2b_{n+k} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon . \tag{4.23}$$

Переходя в (4.23) к старым обозначениям, получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{p} f_k z^k \right| < \varepsilon, \qquad |z| \le 1$$

для всех $n \ge N_2(\varepsilon)$ и $p = 1, 2, \ldots$. Равномерная сходимость ряда (4.17) на единичном круге $|z| \le 1$ доказана.

Для завершения доказательства включения (4.6) заметим, что функция $\Phi^+(z)$, $|z| \le 1$ является непрерывным продолжением функции $\Phi(z)$, $|z| < 1$. С другой стороны, внутри единичного круга $|z| < 1$ имеет место равенство $\Phi_0(z) = \Phi(z)$. Учитывая полученное равенство и непрерывность функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi_0(z)$, получаем тождество

$$\Phi_0(z) = \Phi(z), \qquad |z| \le 1 .$$

Отсюда и из теоремы Племеля – Привалова [64] вытекает справедливость включения (4.6).

Таким образом, утверждение теоремы 1.1 при $n = 0$ доказано.

Пусть теперь $n \in \mathbb{Z}$ – произвольное. Очевидны равенства

$$g_{n,+\infty}(t) = g_{0,+\infty}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k e^{ikt}, \qquad \text{если} \qquad n > 0 , \tag{4.24}$$

$$g_{n,+\infty}(t) = g_{0,+\infty}(t) + \sum_{k=-n}^{-1} f_k e^{ikt}, \qquad \text{если} \qquad n < 0 . \tag{4.25}$$

Функция $g_{0,+\infty}(t)$ принадлежит пространству H^α, а функции

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_k e^{ikt} \quad (n>0) \quad \text{и} \quad \sum_{k=-n}^{-1} f_k e^{ikt} \quad (n<0) \tag{4.26}$$

удовлетворяют условию Липшица и поэтому подавно принадлежат H^α. Отсюда, из (4.24) – (4.26), следует включение $g_{n,+\infty}(t) \in H^\alpha$ при любом $n \in \mathbb{Z}$.

Справедливость включения $g_{n,-\infty}(t) \in H^\alpha$ при любом $n \in \mathbb{Z}$ следует из равенства

$$g_{n,-\infty}(t) = f(t) - g_{n+1,+\infty}(t), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

так как разность двух функций из пространства H^α является функцией этого пространства.

Теорема 4.1. доказана.

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В данном пункте получена формула, представляющая значения операторов A и $aE + A$, определенными равенствами (1.3) – (1.9) в пространствах Гёльдера и Лебега.

Лемма 5.1. ***Если***

$$x(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt}, \tag{5.1}$$

то имеют место формальные равенства

$$(Ax)(t) \sim i \sum_{k=-\infty}^{-M-1} x_k e^{ikt} + \sum_{k=-M}^{-1} \left[(i+b_k) x_k + c_k x_{-k} \right] e^{ikt} + (b_0 + c_0) x_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M} \left[c_k x_{-k} + (-i+b_k) x_k \right] e^{ikt} - i \sum_{k=M+1}^{\infty} x_k e^{ikt}. \tag{5.2}$$

Доказательство леммы 5.1. Справедливость равенства (5.2) установим поэтапно.

Покажем вначале справедливость равенства

$$(Tx)(t) \sim i\sum_{k=-\infty}^{-1} x_k e^{ikt} - i\sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{ikt}. \tag{5.3}$$

Полагая

$$r_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{u}{2} e^{iku}\,du, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{5.4}$$

докажем, что

$$r_k = i \operatorname{sign} k, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{5.5}$$

Действительно, непосредственным вычислением проверяется равенство

$$\operatorname{ctg}\frac{u}{2} e^{iu} = \operatorname{ctg}\frac{u}{2} + i + ie^{iu}. \tag{5.6}$$

Умножим равенство (5.6) на $e^{i(k-1)u}$:

$$\operatorname{ctg}\frac{u}{2} e^{iku} = \operatorname{ctg}\frac{u}{2} e^{i(k-1)u} + ie^{i(k-1)u} + ie^{iku},$$

затем проинтегрируем по u на отрезке $[-\pi, \pi]$ и с учетом обозначения (5.4) получим

$$r_k = r_{k-1} + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-1)u}\,du + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iku}\,du, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{5.7}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imu}\,du = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m = 0, \\ 0, & \text{если} \quad m \neq 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Отсюда и из (5.4) при $k = 0$ получим

$$r_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{u}{2}\,du = 0. \tag{5.9}$$

Из соотношений (5.7) – (5.9) будем иметь

$$r_k = i, \qquad k \geq 1; \qquad r_k = -i, \qquad k \leq -1. \tag{5.10}$$

Полученные равенства завершают доказательство соотношения (5.5).

Произведя замену $t - s = u$ и учитывая (5.10), будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{t-s}{2} e^{iks} ds = -\frac{1}{2\pi} e^{ikt} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{u}{2} e^{iku} du = -ie^{ikt} \operatorname{sign} k .$$

Таким образом, применяя оператор T к формальному равенству (5.1), получим

$$(Tx)(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{t-s}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{iks} ds =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{u}{2} e^{iku} du = -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt} \operatorname{sign} k . \tag{5.11}$$

Равенство (5.3) доказано.

Далее, имеем

$$(K_1 x)(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_1(t-s) x(s) ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-M}^{M} b_k e^{ik(t-s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m e^{ims} ds =$$

$$= \sum_{k=-M}^{M} b_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m e^{imt} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-m)s} ds = \sum_{k=-M}^{M} b_k x_k e^{ikt} , \tag{5.12}$$

$$(K_2 x)(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_2(t+s) x(s) ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-M}^{M} c_k e^{ik(t+s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m e^{ims} ds =$$

$$= \sum_{k=-M}^{M} c_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m e^{imt} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+m)s} ds = \sum_{k=-M}^{M} c_k x_{-k} e^{ikt} . \tag{5.13}$$

Сложив формальные равенства (5.11) – (5.13), получим справедливость (5.2).

Лемма 5.1 доказана.

Теорема 5.1. ***Пусть***

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt}\ . \tag{5.14}$$

Тогда

$$ax(t)+(Ax)(t)=(a+i)\sum_{k=-\infty}^{-M-1} x_k e^{ikt}+$$

$$+\sum_{k=-M}^{-1}\Big[\big(a+i+b_k\big)x_k+c_k x_{-k}\Big]e^{ikt}+\big(a+b_0+c_0\big)x_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\Big[c_k x_{-k}+\big(a-i+b_k\big)x_k\Big]e^{ikt}+(a-i)\sum_{k=M+1}^{\infty} x_k e^{ikt}\ ; \tag{5.15}$$

причем, если:

а) $x(t)\in H^{\alpha}$***, то*** $ax(t)+(Ax)(t)\in H^{\alpha}$***;***

б) $x(t)\in L_2$***, то*** $ax(t)+(Ax)(t)\in L_2$***.***

Доказательство. а) Если функция $x(t)$ из (5.14) принадлежит H^{α}, то в силу теоремы 4.1 срезки $\sum\limits_{k=-\infty}^{-M-1} x_k e^{ikt}$ и $\sum\limits_{k=M+1}^{\infty} x_k e^{ikt}$ принадлежат пространству H^{α}. Следовательно, два крайних слагаемых в правой части (5.15) принадлежат H^{α}. Три средние слагаемые удовлетворяют условию Липшица. Отсюда следует справедливость включения

$$ax(t)+(Ax)(t)\in H^{\alpha}.$$

б) Пусть $x(t)\in L_2$. Включение срезок $\sum\limits_{k=-\infty}^{-M-1} x_k e^{ikt}$ и $\sum\limits_{k=M+1}^{\infty} x_k e^{ikt}$ пространству L_2 следует из того, что их нормы $\sum\limits_{k=-\infty}^{-M-1}\left|x_k\right|^2$ и $\sum\limits_{k=M+1}^{\infty}\left|x_k\right|^2$ являются остатками абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left|x_k\right|^2$ – нормы элемента $x(t)$ в L_2. Следовательно, две крайние слагаемые в правой части (5.15) принадлежат L_2, а три средние слагаемые являются непрерывными функциями и поэтому их сумма принадлежит L_2.

Теорема 5.1 доказана.

6. СВЯЗЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМИ СИСТЕМАМИ

Наряду с уравнениями (1.1) и (1.2) рассмотрим бесконечные системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} ix_k = f_k, & -\infty < k \le -M-1, \\ (i+b_k)x_k + c_k x_{-k} = f_k, & -M \le k \le -1, \\ (b_0+c_0)x_0 = f_0, & k=0, \\ c_k x_{-k} + (-i+b_k)x_k = f_k, & 1 \le k \le M, \\ -ix_k = f_k, & M+1 \le k < +\infty, \end{cases} \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} (a+i)x_k = f_k, & -\infty < k \le -M-1, \\ (a+i+b_k)x_k + c_k x_{-k} = f_k, & -M \le k \le -1, \\ (a+b_0+c_0)x_0 = f_0, & k=0, \\ c_k x_{-k} + (a-i+b_k)x_k = f_k, & 1 \le k \le M, \\ (a-i)x_k = f_k, & M+1 \le k < +\infty, \end{cases} \tag{6.2}$$

которые соответствуют уравнениям (1.1) и (1.2).

Будем говорить, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = f, \qquad f = \left(f_k\right)_{k=-\infty}^{\infty} \tag{6.3}$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$\int_{-\pi}^{\pi} k(t, s)x(s)ds = f(t), \tag{6.4}$$

где $(f_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ – коэффициенты Фурье функции $f(t)$, если решение $(x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ бесконечной системы (6.3) является коэффициентами Фурье решения $x(t)$ интегрального уравнения (6.4) и, наоборот, коэффициенты Фурье решения интегрального уравнения $x(t)$ являются решением бесконечной системы $(x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$.

Теорема 6.1. а) ***Бесконечная система*** **(6.1)** ***эквивалентна интегральному уравнению*** **(1.1)*;***

б) ***Бесконечная система*** **(6.2)** ***эквивалентна интегральному уравнению*** **(1.2).**

Доказательство теоремы 6.1. Достаточно доказать пункт б), так как уравнение (1.1) и система (6.1) получаются из (1.2) и (6.2) при $a = 0$.

Пусть $x(t)$ является решением уравнения (1.2) для данной правой части $f(t)$. Коэффициенты Фурье этих функций обозначим $(x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ и $(f_k)_{k=-\infty}^{\infty}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt}, \qquad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikt}. \tag{6.5}$$

Подставим (6.5) в (1.2) и, с учетом теоремы 5.1, получаем тождество

$$(a+i)\sum_{k=-\infty}^{-M-1} x_k e^{ikt} + \sum_{k=-M}^{-1}\left[\left(a+i+b_k\right)x_k + c_k x_{-k}\right]e^{ikt} +$$

$$+\left(a+b_0+c_0\right)x_0 + \sum_{k=1}^{M}\left[c_k x_{-k} + \left(a-i+b_k\right)x_k\right]e^{ikt} +$$

$$+(a-i)\sum_{k=M+1}^{\infty} x_k e^{ikt} \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikt}. \tag{6.6}$$

Из полученного тождества вытекает, что $\left(x_k\right)_{k=-\infty}^{\infty}$ является решением системы (6.2) для правой части $\left(f_k\right)_{k=-\infty}^{\infty}$. Верно и обратное, если $\left(x_k\right)_{k=-\infty}^{\infty}$ решение (6.2) для правой части $\left(f_k\right)_{k=-\infty}^{\infty}$, то имеет место тождество (6.6). Это означает, что $x(t)$ является решением уравнения (1.2) для данной правой части $f(t)$.

Теорема 6.1 доказана.

Для исследования вопроса разрешимости уравнений (1.1) и (1.2) важную роль играет информация о спектре операторов

$$A: H^{\alpha} \to H^{\alpha}, \quad A: L_2 \to L_2, \tag{6.7}$$

$$aE + A: H^{\alpha} \to H^{\alpha}, \quad aE + A: L_2 \to L_2. \tag{6.8}$$

Обозначим:

$\sigma_{L_2}(A)$ и $\sigma_{H^{\alpha}}(A)$ – спектры операторов (6.7),

$\sigma_{L_2}(aE + A)$ и $\sigma_{H^{\alpha}}(aE + A)$ – спектры операторов (6.8),

$$\sigma_0 = \left\{\pm i,\, b_0 + c_0,\, \lambda_{0,k} : k = 1, 2, \ldots, M\right\},$$

$$\sigma_a = \left\{a \pm i,\, a + b_0 + c_0,\, \lambda_{a,k} : k = 1, 2, \ldots, M\right\},$$

$$\lambda_{0,k} = \frac{1}{2}\left(b_{-k} + b_k \pm \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k}\right),$$

$$\lambda_{a,k} = \frac{1}{2}\left(2a + b_{-k} + b_k \pm \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k}\right).$$

Информация о спектрах операторов (6.7) и (6.8) даётся ниже.

Теорема 6.2. ***Справедливы равенства***

$$\sigma_{L_2}(A) = \sigma_{H^\alpha}(A) = \sigma_0, \tag{6.9}$$

$$\sigma_{L_2}(aE + A) = \sigma_{H^\alpha}(aE + A) = \sigma_a; \tag{6.10}$$

причем каждый элемент σ_0 ***является собственным значением оператора*** A***, а каждый элемент*** σ_a ***– собственным значением оператора*** $aE + A$ ***в каждом из пространств*** H^α ***и*** L_2***.***

Доказательство теоремы 6.2. Рассмотрим семейство уравнений

$$Ax(t) - \lambda x(t) = f(t), \tag{6.11}$$

зависящее от комплексного параметра λ. Разлагая заданную правую часть и искомое решение в ряды Фурье (6.5) и подставляя в (6.11), получим бесконечную систему

$$\begin{cases} (i-\lambda)x_k = f_k, & -\infty < k \le -M-1, \\ (i+b_k-\lambda)x_k + c_k x_{-k} = f_k, & -M \le k \le -1, \\ (b_0+c_0-\lambda)x_0 = f_0, & k = 0, \\ c_k x_{-k} + (-i+b_k-\lambda)x_k = f_k, & 1 \le k \le M, \\ -(i+\lambda)x_k = f_k, & M+1 \le k < +\infty. \end{cases} \tag{6.12}$$

Если $\lambda \notin \sigma_0$, то покажем однозначную разрешимость уравнения (1.1) для каждого $f(t) \in H^\alpha$ и $f(t) \in L_2$, то есть в каждом из пространств H^α и L_2.

Пусть $\lambda \notin \sigma_0$. Тогда

$$\lambda \ne \pm i, \quad \lambda \ne b_0 + c_0, \quad \Delta_k \equiv (i + b_{-k} - \lambda)(-i + b_k - \lambda) - c_{-k}c_k \ne 0$$

и, следовательно, из (6.12) находим коэффициенты Фурье искомого решения $x(t)$ уравнения (6.11):

$$x_k = \frac{1}{i-\lambda} f_k, \qquad -\infty < k \le -M-1, \tag{6.13}$$

$$x_k = \frac{1}{\Delta_k}\left[\left(-i+b_{-k}-\lambda\right) f_k - c_k f_{-k}\right], \qquad k=-M,\ldots,-1, \tag{6.14}$$

$$x_0 = \frac{1}{b_0+c_0-\lambda} f_0, \qquad k=0, \tag{6.15}$$

$$x_k = \frac{1}{\Delta_k}\left[-c_k f_{-k} + \left(i+b_{-k}-\lambda\right) f_k\right], \qquad k=1,\ldots,M, \tag{6.16}$$

$$x_k = -\frac{1}{i+\lambda} f_k, \qquad M+1 \le k < +\infty. \tag{6.17}$$

Если $f(t)\in H^{\alpha}$, то согласно равенствам (6.13) – (6.17) и пункту а) теоремы 5.1 справедливо включение $x(t)\in H^{\alpha}$; если же $f(t)\in L_2$, то согласно пункту б) этой теоремы справедливо включение $x(t)\in L_2$.

Пусть $\lambda\in\sigma_0$. Покажем, что λ является собственным значением оператора A. Для этого достаточно указать собственную функцию $x(t)$, отвечающую собственному значению λ:

1) если $\lambda = i$, то $x(t)=e^{ikt}$ для любого $k:-\infty<k\le -M-1$;

2) если $\lambda=-i$, то $x(t)=e^{ikt}$ для любого $k:M+1\le k<+\infty$;

3) если $\lambda=b_0+c_0$, то $x(t)=C=\mathrm{const}$;

4) если $\lambda=\dfrac{1}{2}\left(b_{-k}+b_k+\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right)$, то

$$x(t) = 2c_{-k}e^{-ikt} - \left(b_{-k} - b_k + i2 - \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k} \right) e^{ikt}$$

при $$\left|c_{-k}\right| + \left|b_{-k} - b_k + i2 - \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k}\right| \neq 0,$$

$$x(t) = \left(b_k - b_{-k} - i2 - \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k} \right) e^{-ikt} - 2c_k e^{ikt}$$

при $$\left|c_{-k}\right| + \left|b_{-k} - b_k + i2 - \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k}\right| = 0,$$

$$\left|c_k\right| + \left|b_k - b_{-k} - i2 - \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k}\right| \neq 0,$$

$x(t) = C_1 e^{-ikt} + C_2 e^{ikt}$, C_1 и C_2 – произвольные постоянные

при $$\left|c_{-k}\right| + \left|b_{-k} - b_k + i2 - \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k}\right| = 0,$$

$$\left|c_k\right| + \left|b_k - b_{-k} - i2 - \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k}\right| = 0;$$

5) если $\lambda = \frac{1}{2}\left(b_{-k} + b_k - \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k} \right)$, то

$$x(t) = 2c_{-k}e^{-ikt} - \left(b_{-k} - b_k + i2 + \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k} \right) e^{ikt}$$

при $$\left|c_{-k}\right| + \left|b_{-k} - b_k + i2 + \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k}\right| \neq 0,$$

$$x(t) = \left(b_k - b_{-k} - i2 + \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k} \right) e^{-ikt} - 2c_k e^{ikt}$$

при $$\left|c_{-k}\right|+\left|b_{-k}-b_k+i2+\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right|=0,$$

$$\left|c_k\right|+\left|b_k-b_{-k}-i2+\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right|\neq 0,$$

$x(t)=C_1e^{-ikt}+C_2e^{ikt}$, C_1 и C_2 – произвольные постоянные

при $$\left|c_{-k}\right|+\left|b_{-k}-b_k+i2+\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right|=0,$$

$$\left|c_k\right|+\left|b_k-b_{-k}-i2+\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right|=0.$$

Равенства (6.9) доказаны. Доказательство равенств (6.10) проводится аналогично. Приведём лишь его завершающую часть.

Пусть $\lambda\in\sigma_a$. Покажем, что λ является собственным значением оператора $aE+A$. Для этого достаточно указать собственную функцию $x(t)$, отвечающую собственному значению λ:

1) если $\lambda=a+i$, то $x(t)=e^{ikt}$ для любого $k:-\infty<k\leq -M-1$;

2) если $\lambda=a-i$, то $x(t)=e^{ikt}$ для любого $k:M+1\leq k<+\infty$;

3) если $\lambda=a+b_0+c_0$, то $x(t)=C=\text{const}$;

4) если $\lambda=\frac{1}{2}\left(2a+b_{-k}+b_k+\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right)$, то

$$x(t)=2c_{-k}e^{-ikt}-\left(b_{-k}-b_k+i2-\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right)e^{ikt}$$

при $$\left|c_{-k}\right|+\left|b_{-k}-b_k+i2-\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right|\neq 0,$$

$$x(t)=\left(b_k-b_{-k}-i2-\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right)e^{-ikt}-2c_ke^{ikt}$$

при $$\left|c_{-k}\right|+\left|b_{-k}-b_k+i2-\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right|=0,$$

$$\left|c_k\right|+\left|b_k-b_{-k}-i2-\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right|\neq 0,$$

$x(t)=C_1e^{-ikt}+C_2e^{ikt}$, C_1 и C_2 – произвольные постоянные

при $$\left|c_{-k}\right|+\left|b_{-k}-b_k+i2-\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right|=0,$$

$$\left|c_k\right|+\left|b_k-b_{-k}-i2-\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right|=0;$$

5) если $\lambda=\frac{1}{2}\left(2a+b_{-k}+b_k-\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right)$, то

$$x(t)=2c_{-k}e^{-ikt}-\left(b_{-k}-b_k+i2+\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right)e^{ikt}$$

при $$\left|c_{-k}\right|+\left|b_{-k}-b_k+i2+\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right|\neq 0,$$

$$x(t)=\left(b_k-b_{-k}-i2+\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right)e^{-ikt}-2c_ke^{ikt}$$

при $$\left|c_{-k}\right|+\left|b_{-k}-b_k+i2+\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right|=0,$$

$$\left|c_k\right|+\left|b_k-b_{-k}-i2+\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right|\neq 0,$$

$x(t)=C_1e^{-ikt}+C_2e^{ikt}$, C_1 и C_2 – произвольные постоянные при $$\left|c_{-k}\right|+\left|b_{-k}-b_k+i2+\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right|=0,$$

$$\left|c_k\right|+\left|b_k-b_{-k}-i2+\sqrt{\left(b_{-k}-b_k+i2\right)^2+4c_{-k}c_k}\right|=0.$$

Теорема 6.2 доказана.

7. РАЗРЕШИМОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящем параграфе займемся проблемой разрешимости и однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений Гильберта (1.1) и (1.2) в пространстве HL. Символ HL будет обозначать любое из пространств H^α и L_2. Согласно теореме 6.1, данный вопрос полностью заменяется исследованием совместности и определенности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (6.1) и (6.2). Ниже приводим утверждения о разрешимости уравнения (1.2). Если в них положить $a=0$, то получим аналогичные утверждения и для уравнения (1.1). Для формулировки указанных утверждений понадобятся следующие матрицы второго порядка

$$B_k=\begin{bmatrix} a+i+b_{-k} & c_{-k} \\ c_k & a-i+b_k \end{bmatrix}, \qquad k=1,\ldots,M$$

и их определители

$$\Delta_k=\det\left(B_k\right)=\left(a+i+b_{-k}\right)\left(a-i+b_k\right)-c_{-k}c_k \qquad k=1,\ldots,M .$$

Будем предполагать, что число a, входящее в уравнение (1.2), удовлетворяет условиям

$$a\neq i \quad \text{и} \quad a\neq -i. \tag{7.1}$$

Согласно теореме 6.2, уравнение (1.2) является однозначно разрешимым в пространстве HL, если $0\notin\sigma_a$. На языке коэффициентов уравнения это утверждение можно формулировать следующим образом:

Теорема 7.1. ***Для однозначной разрешимости уравнения*** **(1.2)** ***для любой*** $f(t) \in HL$ ***необходимо и достаточно выполнение условий***

$$a + b_0 + c_0 \neq 0\,, \tag{7.2}$$

$$\Delta_k \neq 0, \qquad k = 1, \ldots, M\,. \tag{7.3}$$

Доказательство теоремы 7.1 приводится в § 8.

Если $0 \in \sigma_a$, то некоторые из неравенств (7.2) и (7.3) заменяются равенствами. В этом случае для разрешимости уравнения (1.2) накладываются требования к правой части $f(t) \in HL$, а для однозначной разрешимости – и к искомому решению $x(t) \in HL$.

Теорема 7.2. ***Пусть имеют место условия*** **(7.3)** ***и***

$$a + b_0 + c_0 = 0\,. \tag{7.4}$$

Тогда для разрешимости уравнения **(1.2)** ***для данной*** $f(t) \in HL$ ***необходимо и достаточно выполнение равенства***

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0\,, \tag{7.5}$$

причём, если уравнение **(1.2)** ***разрешимо, то для любого комплексного числа*** d_0 ***существует только одно решение*** $x(t) \in HL$***, удовлетворяющее условию***

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,dt = d_0\,. \tag{7.6}$$

Доказательство теоремы 7.2 приводится в § 8.

Рассмотрим случай, когда для некоторых $k \in \{1, \ldots, M\}$ выполняется равенство

$$\Delta_k = 0, \qquad k \in \{1, \ldots, M\}\,. \tag{7.7}$$

Для формулировки утверждений о разрешимости уравнения (1.2) в этом случае для каждого значения k, для которого имеет место условие (7.7), нужно знать тривиальность или нетривиальность элементов соответствующих матриц B_k. Этот факт диктует вводить в рассмотрение 10 различных ситуаций:

$$\left(A_{k,1}\right) \quad a+i+b_{-k}=0, \quad c_{-k}=0, \quad c_k=0, \quad a-i+b_k=0;$$

$$\left(A_{k,2}\right) \quad a+i+b_{-k}\neq 0, \quad c_{-k}=0, \quad c_k=0, \quad a-i+b_k=0;$$

$$\left(A_{k,3}\right) \quad a+i+b_{-k}=0, \quad c_{-k}\neq 0, \quad c_k=0, \quad a-i+b_k=0;$$

$$\left(A_{k,4}\right) \quad a+i+b_{-k}=0, \quad c_{-k}=0, \quad c_k\neq 0, \quad a-i+b_k=0;$$

$$\left(A_{k,5}\right) \quad a+i+b_{-k}=0, \quad c_{-k}=0, \quad c_k=0, \quad a-i+b_k\neq 0;$$

$$\left(A_{k,6}\right) \quad a+i+b_{-k}\neq 0, \quad c_{-k}\neq 0, \quad c_k=0, \quad a-i+b_k=0;$$

$$\left(A_{k,7}\right) \quad a+i+b_{-k}=0, \quad c_{-k}=0, \quad c_k\neq 0, \quad a-i+b_k\neq 0;$$

$$\left(A_{k,8}\right) \quad a+i+b_{-k}\neq 0, \quad c_{-k}=0, \quad c_k\neq 0, \quad a-i+b_k=0;$$

$$\left(A_{k,9}\right) \quad a+i+b_{-k}=0, \quad c_{-k}\neq 0, \quad c_k=0, \quad a-i+b_k\neq 0;$$

$$\left(A_{k,10}\right) \quad a+i+b_{-k}\neq 0, \quad c_{-k}\neq 0, \quad c_k\neq 0, \quad a-i+b_k\neq 0.$$

Если для данного k определитель $\Delta_k=0$, то имеет место одна и только одна из ситуаций $\left(A_{k,\,j}\right)$, $j=1,\ldots,10$. Каждой из этих ситуаций соответствует свое условие разрешимости, которые перечислим ниже:

$$\left(B_{k,1}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}dt = 0, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = 0\,;$$

$$\left(B_{k,2}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = 0\,;$$

$$\left(B_{k,3}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = 0\,;$$

$$\left(B_{k,4}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}dt = 0\,;$$

$$\left(B_{k,5}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}dt = 0\,;$$

$$\left(B_{k,6}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = 0\,;$$

$$\left(B_{k,7}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}dt = 0\,;$$

$$\left(B_{k,8}\right) \qquad \frac{c_k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}dt - \frac{a+i+b_{-k}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = 0\,;$$

$$\left(B_{k,9}\right) \qquad \frac{a-i+b_k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}dt - \frac{c_{-k}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = 0\,;$$

$$\left(B_{k,10}\right) \qquad \frac{c_k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}dt - \frac{a+i+b_{-k}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = 0$$

или

$$\left(B_{k,\,10}\right) \qquad \frac{a-i+b_k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}dt-\frac{c_{-k}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt=0\,.$$

Если выполнены условия разрешимости уравнения (1.2) – ситуации $\left(B_{k,\,j}\right)$, $j=1,\dots,10$, то уравнение имеет бесчисленно много решений. Для того чтобы отделить конкретное решение, на решение накладываются условия. Каждая из этих ситуаций $\left(A_{k,\,j}\right)$, $j=1,\dots,10$ требует свои условия на решение $x(t)$ уравнения (1.2). Пусть d_k^- и d_k^+ – произвольные комплексные числа. Рассмотрим условия:

$$\left(C_{k,\,1}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{ikt}dt=d_k^-, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-ikt}dt=d_k^+\ ;$$

$$\left(C_{k,\,2}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-ikt}dt=d_k^+\ ;$$

$$\left(C_{k,\,3}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{ikt}dt=d_k^-;$$

$$\left(C_{k,\,4}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-ikt}dt=d_k^+\ ;$$

$$\left(C_{k,\,5}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{ikt}dt=d_k^-;$$

$$\left(C_{k,\,6}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{ikt}dt=d_k^- \quad \text{или} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-ikt}dt=d_k^+\ ;$$

$$\left(C_{k,\,7}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{ikt}dt=d_k^- \quad \text{или} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-ikt}dt=d_k^+\ ;$$

$$\left(C_{k,\,8}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-ikt}dt = d_k^+ \ ;$$

$$\left(C_{k,\,9}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{ikt}dt = d_k^- \ ;$$

$$\left(C_{k,\,10}\right) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{ikt}dt = d_k^- \quad \text{или} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-ikt}dt = d_k^+ \ .$$

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 7.3. ***Пусть имеет место условие*** **(7.2)** ***и для некоторых*** $k \in \{1,\ldots,M\}$ ***– условие*** **(7.7).** ***Тогда для разрешимости уравнения*** **(1.2)** ***для данной*** $f(t) \in HL$ ***в ситуации*** $\left(A_{k,\,j}\right)$***, необходимо и достаточно выполнение равенства*** $\left(B_{k,\,j}\right)$***; причём, если уравнение*** **(1.2)** ***разрешимо, то для любых комплексных чисел*** d_k^- ***и*** d_k^+ ***существует только одно решение*** $x(t) \in HL$***, удовлетворяющее условию*** $\left(C_{k,\,j}\right)$, $j \in \{1,\ldots,10\}$.

Доказательство теоремы 7.3 приводится в § 8.

Теорема 7.4. ***Пусть имеет место условие*** **(7.4)** ***и для некоторых*** $k \in \{1,\ldots,M\}$ ***– условие*** **(7.7).** ***Тогда для разрешимости уравнения*** **(1.2)** ***для данной*** $f(t) \in HL$ ***в ситуации*** $\left(A_{k,\,j}\right)$***, необходимо и достаточно выполнение равенства*** $\left(B_{k,\,j}\right)$ ***и*** **(7.5)*****; причём, если уравнение*** **(1.2)** ***разрешимо, то для любых комплексных чисел*** d_0, d_k^- ***и*** d_k^+ ***существует только одно решение*** $x(t) \in HL$***, удовлетворяющее условию*** $\left(C_{k,\,j}\right)$, $j \in \{1,\ldots,10\}$ ***и*** **(7.6).**

Доказательство теоремы 7.4 приводится в § 8.

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 7.1 – 7.4

Доказательство теоремы 7.1. В силу теоремы 6.1 однозначная разрешимость интегрального уравнения (1.2) эквивалентна определенности (то есть совместности и единственности решения) бесконечной системы (6.2). Поэтому вместо интегрального уравнения (1.2) можно рассматривать бесконечную систему (6.2).

Необходимость. Пусть система (1.2) является определенной. Тогда, во-первых, однозначно разрешимо третье уравнение системы (6.2), которое эквивалентно условию (7.2). Во-вторых, для любого $k \in \{1,\ldots,M\}$ каждая из систем второго порядка, составленная из второго и четвертого уравнений системы (6.2), является определенной. Это означает нетривиальность определителя этой системы – выполнения условия (7.3). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть имеют место условия (7.2) и (7.3). Из условия (7.2) вытекает, что неизвестное x_0 системы (6.2) находится однозначно. Из условий (7.3) вытекает однозначная разрешимость систем второго порядка, составленных из второго и четвертого уравнений системы (6.2), то есть однозначно определяются неизвестные x_k, $k = \pm 1,\ldots,\pm M$. Из условия (7.1) вытекает, что и остальные неизвестные системы (6.2) определяются однозначно. Следовательно, и интегральное уравнение (1.2) разрешимо однозначно. Достаточность доказана.

Теорема 7.1 доказана.

Рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 7.1, будут использованы и при доказательствах оставшихся теорем. При необходимости на эти рассуждения будем указывать, но не будем повторять.

Доказательство теоремы 7.2. Пусть выполнены условия (7.1) и (7.2). Тогда из системы (6.2) однозначно определяются все неизвестные: x_k, $k \neq 0$.

В силу условия (7.4) уравнение, содержащее неизвестное x_0, имеет вид $0 \cdot x_0 = f_0$. Необходимым и достаточным условием разрешимости этого уравнения является условие $f_0 = 0$, которое эквивалентно (7.5).

Таким образом, при выполнении условий (7.3) и (7.4) система (6.2) является совместной и значения всех неизвестных, кроме x_0, определяются однозначно. Неизвестное x_0, как свободное переменное, может принимать любые значения.

Пусть уравнение (1.2) разрешимо при данной $f(t) \in HL$ и дано $d_0 \in \mathbb{C}$. Тогда полагая $d_0 = x_0$ однозначно определим решение системы (6.2). Ряд Фурье, составленный из этих коэффициентов, сходится и его сумма $x(t)$ является единственным решением уравнения (1.2), удовлетворяющим условию (7.6).

Теорема 7.2 доказана.

Доказательство теорем 7.3 и 7.4. Пусть для некоторых номеров $k \in \{1, \ldots, M\}$ выполняется условие (7.7). Из соответствующих уравнений системы (6.2) составим систему второго порядка

$$\begin{cases} (a + i + b_{-k}) x_{-k} + c_{-k} x_k = f_{-k}, \\ c_k x_{-k} + (a - i + b_k) x_k = f_k. \end{cases} \tag{8.1}$$

Так как определитель системы (8.1) равен нулю, то не для всяких f_{-k} и f_k она является совместной. Для определения совместности системы (8.1) необходимо рассматривать ситуации $(A_{k,\, j})$, $j = 1, \ldots, 10$.

Если имеет место ситуация $(A_{k,1})$, то (8.1) принимает вид

$$\begin{cases} 0 x_{-k} + 0 x_k = f_{-k}, \\ 0 x_{-k} + 0 x_k = f_k. \end{cases} \tag{8.2}$$

Необходимым и достаточным условием совместности системы (8.2) являются равенства $f_{-k} = 0$ и $f_k = 0$, которые в развернутом виде записываются как $\left(B_{k,1}\right)$.

Если имеет место условие $\left(B_{k,1}\right)$, то система (8.2) является совместной, при этом неизвестные x_{-k} и x_k, как свободные переменные, могут принимать произвольные значения. Если определить значения этих неизвестных, полагая $x_{-k} = d_k^-$ и $x_k = d_k^+$, то однозначно определяется решение системы (6.2). Ряд Фурье, составленный из этих коэффициентов, сходится, и его сумма $x(t)$ является единственным решением уравнения (1.2), удовлетворяющим условиям $\left(C_{k,1}\right)$.

Если имеет место ситуация $\left(A_{k,2}\right)$, то (8.1) принимает вид

$$\begin{cases} (a+i+b_{-k})x_{-k} + 0x_k = f_{-k}, \\ \qquad\qquad 0x_{-k} + 0x_k = f_k. \end{cases} \tag{8.3}$$

Так как $a+i+b_{-k} \neq 0$, то неизвестное x_{-k} определяется однозначно из первого уравнения системы (8.3) для любого f_{-k}. Поэтому совместность системы (8.3) сводится к совместности второго уравнения. Для совместности второго уравнения системы необходимо и достаточно выполнение равенства $f_k = 0$, которое в развернутом виде записываются как $\left(B_{k,2}\right)$.

Если имеет место условие $\left(B_{k,2}\right)$, то неизвестное x_k, как свободное переменное, может принимать произвольное значение. Если определить значение этого неизвестного, полагая $x_k = d_k^+$, то однозначно определяется решение системы (6.2). Ряд Фурье, составленный из этих коэффициентов, сходится, и его сумма $x(t)$ является единственным решением уравнения (1.2), удовлетворяющим условиям $\left(C_{k,\,2}\right)$.

Если имеет место ситуация $\left(A_{k,\,6}\right)$, то (8.1) принимает вид

$$\begin{cases} \left(a+i+b_{-k}\right)x_{-k}+c_{-k}x_k = f_{-k}, \\ \qquad\qquad\quad 0x_{-k} \quad +0x_k = f_k. \end{cases} \tag{8.4}$$

Так как $a+i+b_{-k}\neq 0$ и $c_{-k}\neq 0$, то необходимым и достаточным условием совместности системы (8.4) является равенство $f_k=0$, которое в развернутом виде записываются как $\left(B_{k,\,6}\right)$. Одно из неизвестных, не важно какое, определяется из первого уравнения системы (8.4) для любого f_{-k}.

Если имеет место условие $\left(B_{k,\,6}\right)$, то одно из неизвестных x_{-k} или x_k, как свободное переменное, может принимать произвольное значение. Если определить значение одного из них, полагая $x_{-k}=d_k^-$ или $x_k=d_k^+$, то другое однозначно определяется из первого уравнения системы (8.4). Ряд Фурье, составленный из этих коэффициентов, сходится, и его сумма $x(t)$ является единственным решением уравнения (1.2), удовлетворяющим условиям $\left(C_{k,\,6}\right)$.

Остальные ситуации рассматриваются аналогично.

Условие (7.2) рассмотрено в доказательстве теоремы 7.1, а (7.4) – в доказательстве теоремы 7.2.

Теоремы 7.3 и 7.4 доказаны.

9. ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Исследуем задачи численного решения сингулярных интегральных уравнений типа Гильберта (1.1) и (1.2). Ответы на вопросы разрешимости, в частности, однозначной разрешимости уравнения (1.1), получаются из ответов на аналогичные вопросы для уравнения (1.2) при $a=0$, то есть уравнение (1.1) можно рассматривать как частный случай уравнения (1.2). Однако дискретные аналоги уравнений (1.1) и (1.2) отличаются существенно и, следовательно, численные алгоритмы решения дискретных уравнений принципиально отличаются между собой.

Наряду с уравнениями (1.1) и (1.2) рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений

$$A_N x_N = f_N, \tag{9.1}$$

$$A_N^{(a)} x_N^{(a)} = f_N^{(a)}, \tag{9.2}$$

где

$$A_N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N, \tag{9.3}$$

$$A_N^{(a)} : \mathbb{C}^{2N} \to \mathbb{C}^{2N} \tag{9.4}$$

дискретные операторы – квадратные матрицы порядка N и $2N$;

$$f_N \in \mathbb{C}^N, \qquad f_N^{(a)} \in \mathbb{C}^{2N}, \tag{9.5}$$

$$x_N \in \mathbb{C}^N, \qquad x_N^{(a)} \in \mathbb{C}^{2N} \tag{9.6}$$

заданные и искомые векторы, которые определены ниже.

9.1. Сеточные функции и дискретные операторы. Пусть $N \geq 2$ – произвольное число. Положим

$$h_N = \frac{2\pi}{N}. \tag{9.7}$$

Точка

$$s_{0,N} \in \left[-h_N, -0{,}5h_N\right] \tag{9.8}$$

выбирается произвольно.

Данному числу N сопоставим две равномерные сетки $\{s;N\}$ и $\{t;N\}$, принадлежащие отрезку $[0,\, 2\pi]$:

$$s_{m,N} = s_{0,N} + mh_N, \qquad m = 1,\dots,N\,, \tag{9.9}$$

$$t_{m,N} = t_{0,N} + mh_N, \qquad m = 1,\dots,N\,, \tag{9.10}$$

где

$$t_{0,N} = s_{0,N} + 0{,}5h_N\,. \tag{9.11}$$

Точки $s_{0,N}$ и $t_{0,N}$, введенные в (9.8) и (9.11), называются **нулевыми узлами** сеток $\{s;N\}$ и $\{t;N\}$, а h_N – **шагом** этих сеток. Следуя И. К. Лифанову [55 с.265], множество узлов сеток (9.9) и (9.10) назовём **каноническим разбиением** отрезка $[0,\, 2\pi]$.

Рассмотрим операторы $\Phi_{\{s;N\}}$ и $\Phi_{\{t;N\}}$, ставящие на сетках $\{s;N\}$ и $\{t;N\}$ каждой функции $x(t)\in H^{\alpha}$ сеточные функции

$$\Phi_{\{s;N\}}x = \Big(x\big(s_{1,N}\big),\, x\big(s_{2,N}\big),\dots,x\big(s_{N,N}\big)\Big)^{\mathrm{T}}, \tag{9.12}$$

$$\Phi_{\{t;N\}}x = \Big(x\big(t_{1,N}\big),\, x\big(t_{2,N}\big),\dots,x\big(t_{N,N}\big)\Big)^{\mathrm{T}}. \tag{9.13}$$

Для компактности записи вводим следующие обозначения

$$\xi^{(-)}_{m,N} = t_{1,N} - s_{m+1,N}, \qquad m = 0,1,\dots,N-1, \tag{9.14}$$

$$\xi^{(+)}_{m,N} = t_{1,N} + s_{m+1,N}, \qquad m = 0,1,\dots,N-1. \tag{9.15}$$

Дискретный аналог A_N сингулярного интегрального оператора (1.3) определим равенством

$$A_N = T_N + K_{1,N} + K_{2,N}\,, \tag{9.16}$$

где T_N , $K_{1,N}$ и $K_{2,N}$ – дискретные аналоги операторов (1.4), (1.6) и (1.7):

T_N – циркулянтная матрица с первой строкой

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{N}\operatorname{ctg}\frac{\xi_{0,N}^{(-)}}{2} & \frac{1}{N}\operatorname{ctg}\frac{\xi_{1,N}^{(-)}}{2} & \ldots & \frac{1}{N}\operatorname{ctg}\frac{\xi_{N-1,N}^{(-)}}{2} \end{bmatrix}; \qquad (9.17)$$

$K_{1,N}$ – циркулянтная матрица с первой строкой

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{N}k_1\left(\xi_{0,N}^{(-)}\right) & \frac{1}{N}k_1\left(\xi_{1,N}^{(-)}\right) & \ldots & \frac{1}{N}k_1\left(\xi_{N-1,N}^{(-)}\right) \end{bmatrix}; \qquad (9.18)$$

$K_{2,N}$ – перциркулянтная матрица с первой строкой

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{N}k_2\left(\xi_{0,N}^{(+)}\right) & \frac{1}{N}k_2\left(\xi_{1,N}^{(+)}\right) & \ldots & \frac{1}{N}k_2\left(\xi_{N-1,N}^{(+)}\right) \end{bmatrix}; \qquad (9.19)$$

функции $k_1(t)$ и $k_2(t)$ определены равенствами (1.8).

Пусть $x(t)\in H^\alpha$. Тогда $(Tx)(t)\in H^\alpha$. Рассмотрим значения функции $(Tx)(t)$ в узлах сетки $\{t,\, N\}$

$$\left\{(Tx)\left(t_{1,N}\right),\quad (Tx)\left(t_{2,N}\right),\quad \ldots,\quad (Tx)\left(t_{N,N}\right)\right\}. \qquad (9.20)$$

Полученное множество значений (9.20) можно представить как образ элемента $(Tx)(t)\in H^\alpha$ при действии оператора $\Phi_{\{t;N\}}$:

$$\Phi_{\{t;N\}}(Tx)=\left((Tx)\left(t_{1,N}\right), (Tx)\left(t_{2,N}\right),\ldots, (Tx)\left(t_{N,N}\right)\right)^{\mathrm{T}}. \qquad (9.21)$$

Рассмотрим теперь множество значений функции $x(t)\in H^\alpha$ в узлах сетки $\{s,\, N\}$

$$\left\{x\left(s_{1,N}\right),\quad x\left(s_{2,N}\right),\quad \ldots,\quad x\left(s_{N,N}\right)\right\}. \qquad (9.22)$$

Полученное множество значений (9.22) можно представить как образ элемента $x(t) \in H^{\alpha}$ при действии оператора $\Phi_{\{s;N\}}$:

$$\Phi_{\{s;N\}} x = \left(x\left(s_{1,N}\right), x\left(s_{2,N}\right), \ldots, x\left(s_{N,N}\right) \right)^{\mathrm{T}}. \tag{9.23}$$

К полученному вектору применим дискретный оператор T_N и полученный вектор сравним с вектором (9.21). В [14, с. 35] доказана справедливость оценки

$$\left| \left(\Phi_{\{t;N\}} (Tx) \right)_m - \left(T_N \Phi_{\{s;N\}} x \right)_m \right| = O\left(N^{-\alpha} \ln N \right), \quad m = 1, \ldots, N, \tag{9.24}$$

где $\left(\Phi_{\{t;N\}} (Tx) \right)_m$ и $\left(T_N \Phi_{\{s;N\}} x \right)_m$ являются m-ми координатами векторов $\Phi_{\{t;N\}} (Tx)$ и $T_N \Phi_{\{s;N\}} x$.

Для двух регулярных интегралов, составляющих сингулярный интегральный оператор типа Гильберта, справедливы следующие оценки

$$\left| \left(\Phi_{\{t;N\}} (K_1 x) \right)_m - \left(K_{1,N} \Phi_{\{s;N\}} x \right)_m \right| = O\left(N^{-\alpha} \right), \qquad m = 1, \ldots, N, \tag{9.25}$$

$$\left| \left(\Phi_{\{t;N\}} (K_2 x) \right)_m - \left(K_{2,N} \Phi_{\{s;N\}} x \right)_m \right| = O\left(N^{-\alpha} \right), \qquad m = 1, \ldots, N. \tag{9.26}$$

Из соотношений (9.24) – (9.26) следуют оценки аппроксимации

$$\left| \left(\Phi_{\{t;N\}} (Ax) \right)_m - \left(A_N \Phi_{\{s;N\}} x \right)_m \right| = O\left(N^{-\alpha} \ln N \right), \quad m = 1, \ldots, N,$$

$$\left\| \Phi_{\{t;N\}} A - A_N \Phi_{\{s;N\}} \right\|_{L_{2,N}} = O\left(N^{-\alpha} \ln N \right), \tag{9.27}$$

где

$$\| A \|_{L_{2,N}} = \sup_{\| y \|_{L_{2,N}} = 1} \| Ay \|_{L_{2,N}} \tag{9.28}$$

$$\| y \|_{L_{2,N}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\left|y_m\right|^2} \tag{9.29}$$

– дискретный аналог нормы в L_2; $y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_N\right)^{\mathrm{T}}$.

9.2. Преобразование Фурье дискретных операторов. Дискретные операторы T_N, $K_{1,N}$ и $K_{2,N}$, определенные в § 1 своими первыми строками (9.17) – (9.19), являются циркулянтными и перциркулянтными матрицами. Для решения систем, матрицы которых - циркулянтные, перциркулянтные или нейтрального типа в §§ 1 – 3 главы 1 предложены быстрые алгоритмы, основанные на методе Фурье [21, 23, 75]. Так как элементы матриц T_N, $K_{1,N}$ и $K_{2,N}$ являются тригонометрическими выражениями, то удаётся вычислить аналитически произведения

$$F_N^* T_N F_N, \quad F_N^* K_{1,N} F_N \quad \text{и} \quad F_N^* K_{2,N} F_N,$$

где F_N – матрица Фурье порядка N определена равенством (1.1.19).

Лемма 9.1. ***Для любого*** $N \ge 2$ ***справедливо равенство***

$$F_N^* T_N F_N = \operatorname{diag}\left(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}\right), \tag{9.30}$$

где

$$\lambda_0 = 0; \qquad \lambda_k = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)}, \quad k = 1, \ldots, N-1. \tag{9.31}$$

Доказательство леммы 9.1. Полагая

$$a_m = \frac{1}{N}\operatorname{ctg}\frac{t_{1,N} - s_{m+1,N}}{2}, \quad m = 0, \ldots, N-1,$$

первую строку матрицы T_N можно записать в виде $\left[a_0 \ \ a_1 \ \ \ldots \ \ a_{N-1}\right]$. Согласно равенству (1.29, теорема 1.7, глава 1), имеем

$$F_N^* T_N F_N = \operatorname{diag}\left(\varphi_N\left(w_0\right), \varphi_N\left(w_1\right), \ldots, \varphi_N\left(w_{N-1}\right)\right),$$

где $$\varphi_N(w) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m w^m .$$

Вычислим значения $\varphi_N(w_k)$: $k = 0,\dots,N-1$. По определению точек $s_{m,N}$ и $t_{m,N}$ имеем

$$t_{1,N} - s_{m+1,N} = \frac{(1-2m)\pi}{N}, \quad m = 0,\dots,N-1,$$

поэтому

$$a_m = \frac{1}{N}\operatorname{ctg}\frac{(1-2m)\pi}{2N}, \quad m = 0,\dots,N-1. \tag{9.32}$$

Если положить $a_N = a_0$ (это равенство получается из (9.32) при $m = N$), то числа таблицы $a_1, a_2, \dots a_{N-1}, a_N$ обладают свойством нечетности относительно середины таблицы, то есть

$$a_{N+1-m} = -a_m, \quad m = 1,\dots,N . \tag{9.33}$$

Рассмотрим, далее, по отдельности случаи четного и нечетного N.

Пусть $N = 2N_1$ – четное число.. Тогда в силу (9.33), имеем

$$\varphi_N(w) = \sum_{m=1}^{N_1} a_m \left(w^m - w^{N-m+1}\right). \tag{9.34}$$

Используя очевидное равенство

$$w_k^m - w_k^{N-m+1} = 2\sin\frac{(2m-1)k\pi}{N} e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)},$$

которое справедливо для всех $k = 0,\dots,N-1$ и $m = 1,\dots,N_1$, получим

$$\varphi_N(w_k) = -\frac{1}{N_1} e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)} \sum_{m=1}^{N_1} \operatorname{ctg}\frac{(2m-1)\pi}{2N} \sin\frac{(2m-1)k\pi}{N} . \tag{9.35}$$

Положим

$$b(k)=\sum_{m=0}^{N_1-1}\operatorname{ctg}(2m+1)\alpha_N \sin k(2m+1)\delta_N\ , \tag{9.36}$$

$$c(k)=\sum_{m=0}^{N_1-1}\cos 2k\left(\alpha_N+m\delta_N\right), \tag{9.37}$$

$$\alpha_N=\frac{\pi}{2N}, \qquad \delta_N=\frac{\pi}{N}\ . \tag{9.38}$$

Тогда

$$b(k+1)-b(k)=$$

$$=\sum_{m=0}^{N_1-1}\left[\sin(k+1)(2m+1)\delta_N-\sin k(2m+1)\delta_N\right]\operatorname{ctg}(2m+1)\alpha_N=$$

$$=2\sum_{m=0}^{N_1-1}\sin\left(\alpha_N+m\delta_N\right)\cos(2k+1)\left(\alpha_N+m\delta_N\right)\frac{\cos\left(\alpha_N+m\delta_N\right)}{\sin\left(\alpha_N+m\delta_N\right)}=$$

$$=\sum_{m=0}^{N_1-1}\cos 2(k+1)\left(\alpha_N+m\delta_N\right)+\sum_{m=0}^{N_1-1}\cos 2k\left(\alpha_N+m\delta_N\right)=$$

$$=c(k+1)+c(k)\ . \tag{9.39}$$

Для нахождения значения $c(k)$ используем тождество

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\delta)+\ldots+\cos\left(\alpha+(n-1)\delta\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\cos\left(\alpha+\dfrac{n-1}{2}\delta\right)\sin\dfrac{n\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}, & \text{если} \quad \sin\dfrac{\delta}{2}\neq 0,\\[2ex] n\cos\alpha, & \text{если} \quad \sin\dfrac{\delta}{2}=0,\end{cases} \tag{9.40}$$

которое справедливо для всех α, δ и k. Из (9.37) следует $c(0)=N_1$, а из (9.40) при $k=1,\ldots,N-1$, имеем равенства

$$c(k)=\frac{\cos\left(2k\alpha_N+\frac{N_1-1}{2}2k\delta_N\right)\sin\frac{2kN_1\delta_N}{2}}{\sin\frac{2k\delta_N}{2}}=\frac{\sin kN\delta_N}{2\sin k\delta_N}, \qquad (9.41)$$

где величина δ_N определена в (9.38). Так как при $k=1,\ldots,N-1$ выполняются соотношения

$$kN\delta_N=k\pi, \qquad 0<k\delta_N=\frac{k\pi}{N}<\pi,$$

то $$\sin kN\delta_N=0; \qquad \sin k\delta_N\neq 0, \quad k=1,\ldots,N-1,$$

и, следовательно, из (9.41) получим

$$c(1)=c(2)=\ldots=c(N-1)=0. \qquad (9.42)$$

Из (9.39) с учетом (9.42) имеем

$$b(1)=b(2)=\ldots=b(N-1). \qquad (9.43)$$

Вычислим значение $b(1)$. Из (9.36) следует

$$b(1)=\sum_{m=0}^{N_1-1}\operatorname{ctg}(\alpha_N+m\delta_N)\sin 2(\alpha_N+m\delta_N)=$$

$$=\sum_{m=0}^{N_1-1}\left[1+\cos 2(\alpha_N+m\delta_N)\right]=N_1+\frac{\sin N_1\delta_N}{\sin\delta_N}=N_1. \qquad (9.44)$$

Из (9.43) и (9.44) получим

$$b(k)=N_1, \qquad k=1,\ldots,N-1. \qquad (9.45)$$

Подставляя (9.43) и (9.45) в (9.35), будем иметь

$$\varphi_N(w_0)=0; \qquad \varphi_N(w_k)=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)}, \quad k=1,\ldots,N-1.$$

Справедливость равенства (9.31) доказана.

Пусть $N = 2N_1 + 1$ – нечетное число. При $m = N_1 + 1$ из равенства (9.32) следует

$$a_m = a_{N_1+1} = -\frac{1}{N}\operatorname{ctg}\frac{(1+2N_1)\pi}{2N} = -\frac{1}{N}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0 .$$

Полученное равенство означает справедливость равенства (9.34) и в случае нечетного N. Дальнейшее доказательство повторяет доказательства случая четного N.

Лемма 9.1 доказана.

Лемма 9.2. ***Для любого*** $N \geq 2M + 1$***, где*** M ***– старшая степень тригонометрических полиномов* (1.8)*, справедливо равенство***

$$F_N^* K_{1,N} F_N = \operatorname{diag}\left(\mu_{1,0},\ \mu_{1,1},\ \ldots,\ \mu_{1,N-1}\right), \tag{9.46}$$

где

$$\mu_{1,n} = \begin{cases} b_0, & \text{если} \quad n = 0, \\ b_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{N}}, & \text{если} \quad n = 1,\ldots,M, \\ 0, & \text{если} \quad n = M+1,\ldots,M+M_0, \\ b_{N-n} e^{i\frac{(N-n)\pi}{N}}, & \text{если} \quad n = M+M_0+1,\ldots,2M+M_0. \end{cases} \tag{9.47}$$

Доказательство леммы 9.2. По условию леммы $N \geq 2M + 1$. Поэтому найдется такое $M_0 \geq 0$, что $N = 2M + 1 + M_0$.

Полагая

$$a_{1,m} = \frac{1}{N} k_1\left(\xi_{m,N}^{(-)}\right), \quad m = 0,\ldots,N-1,$$

с учетом равенства (9.14), получим

$$a_{1,m} = \frac{1}{N} k_1\left(\frac{(1-2m)\pi}{N}\right), \quad m = 0,\ldots,N-1. \tag{9.48}$$

Принимая во внимание определение функции (1.8), из (9.48), будем иметь

$$a_{1,m} = \frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} b_k e^{i\frac{k(1-2m)\pi}{N}}, \quad m = 0,\ldots,N-1. \tag{9.49}$$

Согласно равенству (1.29, теорема 1.7, глава 1), имеем

$$F_N^* K_{1,N} F_N = \mathrm{diag}\Big(\varphi_{1,N}\left(w_0\right),\ \varphi_{1,N}\left(w_1\right),\ \ldots,\ \varphi_{1,N}\left(w_{N-1}\right)\Big),$$

где

$$\varphi_{1,N}\left(w\right) = \sum_{m=0}^{N-1} a_{1,m} w^m . \tag{9.50}$$

Вычислим значения $\varphi_{1,N}\left(w_n\right)$: $n = 0,\ldots,N-1$. Из (9.49) и (9.50) имеем

$$\varphi_{1,N}\left(w_n\right) = \sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} b_k e^{i\frac{k(1-2m)\pi}{N}} w_n^m = \frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} b_k \sum_{m=0}^{N-1} e^{i\frac{k(1-2m)\pi}{N}} e^{-i\frac{2mn\pi}{N}} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} b_k e^{i\frac{k\pi}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i\frac{2(k+n)\pi}{N}m} = \mu_{1,n},$$

где $\mu_{1,n}$ – определены в (9.47).

Равенство (9.46) доказано.

Для блочного представления $F_N^* K_{1,N} F_N$ введём обозначения

$$K_{1,1}^{(-)} = \begin{bmatrix} b_{-1}\overline{\chi} & & & & \\ & b_{-2}\overline{\chi}^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{-(M-1)}\overline{\chi}^{M-1} & \\ & & & & b_{-M}\overline{\chi}^{M} \end{bmatrix}, \tag{9.51}$$

где

$$\chi = e^{i\frac{\pi}{N}}; \tag{9.52}$$

$K_{2,2}^{(-)}$ – нулевая квадратная матрица порядка M_0 (при $M_0 = 0$ матрица $K_{2,2}^{(-)}$ будет отсутствовать);

$$K_{3,3}^{(-)} = \begin{bmatrix} b_M \chi^M & & & & \\ & b_{M-1}\chi^{M-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_2\chi^2 & \\ & & & & b_1\chi \end{bmatrix}; \tag{9.53}$$

в матрицах $K_{1,1}^{(-)}$ и $K_{3,3}^{(-)}$ все неотмеченные элементы равны нулю. Тогда

$$F_N^* K_{1,N} F_N = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{1,1}^{(-)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{2,2}^{(-)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{3,3}^{(-)} \end{bmatrix}.$$

Лемма 9.2 доказана.

Обозначим $\gamma_N = 2s_{0,N} + 2{,}5h_N$, где величины h_N и $s_{0,N}$ определены в (9.7) и (9.8).

Лемма 9.3. ***Для любого*** $N \geq 2M+1$***, где*** M ***– старшая степень тригонометрических полиномов*** **(1.8)*****, справедливо равенство***

$$F_N^* K_{2,N} F_N = \mathrm{pd}\left(\mu_{2,0},\ \mu_{2,1}, \ldots,\ \mu_{2,N-1}\right), \tag{9.54}$$

где

$$\mu_{2,n} = \begin{cases} c_0, & \text{если} \quad n = 0, \\ c_{-n} e^{-in\gamma_n}, & \text{если} \quad n = 1, \ldots, M, \\ 0, & \text{если} \quad n = M+1, \ldots, M+M_0, \\ c_{N-n} e^{-i(N-n)\gamma_n}, & \text{если} \quad n = M+M_0+1, \ldots, 2M+M_0. \end{cases} \tag{9.55}$$

Доказательство леммы 9.3. Как и в лемме 9.2, найдется такое $M_0 \geq 0$, что $N = 2M + 1 + M_0$.

Из (9.9), (9.10) и (9.15) следует равенство

$$\xi_{m,N}^{(+)} = 2s_{0,N} + (m + 2{,}5) h_N = \gamma_N + mh_N, \quad m = 0, \ldots, N-1, \tag{9.56}$$

Полагая $$a_{2,m} = \frac{1}{N} k_2\left(\xi_{m,N}^{(+)}\right), \quad m = 0, \ldots, N-1,$$

с учетом равенства (9.56), получим

$$a_{2,m} = \frac{1}{N} k_2\left(\gamma_N + mh_N\right), \quad m = 0, \ldots, N-1. \tag{9.57}$$

Принимая во внимание определение функции (1.8), из (9.57), будем иметь

$$a_{2,m} = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^{M} c_k e^{ik\left(\gamma_N + mh_N\right)}, \quad m = 0, \ldots, N-1. \tag{9.58}$$

Согласно равенству (2.12, теорема 2.5, глава 1), имеем

$$F_N^* K_{2,N} F_N = \mathrm{pd}\Big(w_0 \varphi_{2,N}\left(w_0\right),\ w_1 \varphi_{2,N}\left(w_1\right), \ldots,\ w_{N-1} \varphi_{2,N}\left(w_{N-1}\right)\Big),$$

где

$$\varphi_{2,N}(w) = \sum_{m=0}^{N-1} a_{2,N-1-m} w^m . \tag{9.59}$$

Вычислим значения $\varphi_{2,N}\left(w_n\right)$: $n = 0, \ldots, N-1$. Из (9.58) и (9.59) имеем

$$\varphi_{2,N}\left(w_n\right)=\sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M}c_k e^{ik\left(\gamma_N-h_N-mh_N\right)}e^{-imnh_N}=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M}c_k e^{ik\gamma_N}e^{-i(n+k)\gamma_N}\sum_{m=0}^{N-1}e^{-i(k+n)h_N\cdot m}=\mu_{2,n}\,,$$

где $\mu_{2,n}$ – определены в (9.55).

Равенство (9.54) доказано.

Для блочного представления $F_N^*K_{2,N}F_N$ введём обозначения

$$K_{1,3}^{(+)}=\begin{bmatrix} & & & & c_{-1}\bar{\omega}\\ & & & c_{-2}\bar{\omega}^2 & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & c_{-M+1}\bar{\omega}^{M-1} & & & \\ c_{-M}\bar{\omega}^M & & & & \end{bmatrix}, \tag{9.60}$$

где

$$\omega=e^{i\gamma_N}\,; \tag{9.61}$$

$K_{2,2}^{(+)}$ – нулевая квадратная матрица порядка M_0 (при $M_0=0$ матрица $K_{2,2}^{(+)}$ будет отсутствовать);

$$K_{3,1}^{(+)}=\begin{bmatrix} & & & & c_M\omega^M\\ & & & c_{M-1}\omega^{M-1} & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & c_2\omega^2 & & & \\ c_1\omega & & & & \end{bmatrix}; \tag{9.62}$$

в матрицах $K_{1,3}^{(+)}$ и $K_{3,1}^{(+)}$ все неотмеченные элементы равны нулю. Тогда

$$F_N^* K_{2,N} F_N = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{1,3}^{(+)} \\ 0 & 0 & K_{2,2}^{(+)} & 0 \\ 0 & K_{3,1}^{(+)} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Лемма 9.3 доказана.

Из доказанных лемм 9.1 – 9.3 вытекает основное утверждение данного параграфа:

Теорема 9.1. ***Для любого*** $N \geq 2M+1$***, где*** M ***– старшая степень тригонометрических полиномов*** **(1.8)*, справедливо равенство***

$$F_N^* A_N F_N = \begin{bmatrix} b_0 + c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{1,1} + K_{1,1}^{(-)} & 0 & K_{1,3}^{(+)} \\ 0 & 0 & \Lambda_{2,2} & 0 \\ 0 & K_{3,1}^{(+)} & 0 & \Lambda_{3,3} + K_{3,3}^{(-)} \end{bmatrix}, \qquad (9.63)$$

где b_0, c_0 ***– средние значения функций*** $k_1(t)$ ***и*** $k_2(t)$ **(1.18),** $K_{1,1}^{(-)}$, $K_{3,3}^{(-)}$, $K_{1,3}^{(+)}$ ***и*** $K_{3,1}^{(+)}$ ***– определены в*** **(9.51), (9.53), (9.60)** ***и*** **(9.62)*, соответственно, а***

$$\begin{cases} \Lambda_{1,1} = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \dots, \lambda_M\right), \\ \Lambda_{2,2} = \mathrm{diag}\left(\lambda_{M+1}, \dots, \lambda_{M+M_0}\right), \\ \Lambda_{3,3} = \mathrm{diag}\left(\lambda_{M+M_0+1}, \dots, \lambda_{M+M_0+M}\right), \end{cases} ;$$

числа λ_m, $m = 1, \dots, N-1$ ***– определены в*** **(9.31)*;*** $N = 2M + M_0 + 1$**.**

10. РЕШЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В данном параграфе разрабатываются быстрые алгоритмы решения дискретных уравнений, доказываются их однозначная разрешимость и сходимость решений дискретных уравнений к решениям уравнения (1.1) (соответствующие теоремам 7.1 – 7.4).

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений – дискретное уравнение первого рода (9.1):

$$A_N x_N = f_N , \tag{10.1}$$

где A_N – оператор из (9.3), матрица которого определена в (9.16); вектор (9.5) определяется равенством

$$f_N = \Phi_{\{t;N\}} f = \left(f\left(t_{1,N}\right), \dots ,\ f\left(t_{1,N}\right)\right)^{\mathrm{T}}$$

– заданная правая часть,

$$x_N = \Phi_{\{s;N\}} x$$

– искомое решение.

Положим

$$y_N = F_N^* x_N , \qquad g_N = F_N^* f_N . \tag{10.2}$$

Учитывая представление (9.16) матрицы A_N, свойства унитарности матрицы Фурье: $F_N^{-1} = F_N^*$ и обозначения (10.2), систему (10.1) запишем в виде

$$\left(F_N^* T_N F_N + F_N^* K_{1,N} F_N + F_N^* K_{2,N} F_N \right) y_N = g_N . \tag{10.3}$$

Матрица системы (10.3) имеет следующую структуру

$$F_N^* T_N F_N + F_N^* K_{1,N} F_N + F_N^* K_{2,N} F_N = \left[\begin{array}{c|c} b_0 + c_0 & 0 \\ \hline 0 & D_N \end{array} \right], \tag{10.4}$$

где

$$D_N = \left[\begin{array}{c|c|c} \Lambda_{1,1} + K_{1,1}^{(-)} & 0 & K_{1,3}^{(+)} \\ \hline 0 & \Lambda_{2,2} & 0 \\ \hline K_{3,1}^{(+)} & 0 & \Lambda_{3,3} + K_{3,3}^{(-)} \end{array}\right].$$

Диагональные блоки матрицы D_N являются квадратными и их порядки соответственно равны M, M_0, M $\left(N = 2M + M_0 + 1\right)$. Полученная структура матрицы позволяет представить систему (10.4) как отдельные уравнения с одним неизвестным и отдельные системы второго порядка с двумя неизвестными. А именно, в виде $M_0 + 1$ линейных уравнений первого порядка и M линейных систем второго порядка:

$$\left(b_0 + c_0\right)\left(y_N\right)_0 = \left(g_N\right)_0, \quad \left(k = 0\right), \tag{10.5}$$

$$\lambda_k \left(y_N\right)_k = \left(g_N\right)_k, \quad \left(k = M + 1, \ldots, M + M_0\right), \tag{10.6}$$

$$\begin{cases} \left(\lambda_k + b_{-k}\bar{\chi}^k\right)\left(y_N\right)_k + c_{-k}\bar{\omega}^k \left(y_N\right)_{N-k} = \left(g_N\right)_k, \\ c_k \omega^k \left(y_N\right)_k + \left(\lambda_{N-k} + b_k \chi^k\right)\left(y_N\right)_{N-k} = \left(g_N\right)_{N-k}, \end{cases} \tag{10.7}$$
$$\left(k = 1, \ldots, M\right),$$

где величины χ и ω определены в (9.52) и (9.61), а $\left(y_N\right)_k$ и $\left(g_N\right)_k$ – обозначения k-х координат векторов y_N и g_N.

10.1. Случай $b_0 + c_0 \neq 0$, $\Delta_k \neq 0$. Вначале исследуем вопрос однозначной разрешимости системы (10.1).

Так как $\Delta_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, M$, то существует такое $\delta_0 > 0$, что

$$\left|\Delta_k\right| \geq \delta_0, \quad k = 1, \ldots, M. \tag{10.8}$$

Нами предполагалось, что $N = 2M + M_0 + 1$. Число M, как старшая степень фиксированных многочленов (1.8), не зависит от параметра N – числа узлов сеток $\{s; N\}$ и $\{t; N\}$. Поэтому при возрастании N следует возрастание параметра $M_0 \equiv M_{0,N}$. Следовательно, по величине $\delta_0 > 0$ можно найти номер $N(\delta_0)$ такой, что для всех $k = 1, \ldots, M$ выполняются неравенства

$$\left| \left(1 - \exp\left(-i\frac{2k\pi}{N}\right)\right) b_k - \left(1 - \exp\left(i\frac{2k\pi}{N}\right)\right) b_{-k} \right| < \varepsilon\delta_0, \qquad (10.9)$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$ – фиксированное число.

Теорема 10.1. ***Пусть выполнены условия теоремы* 7.1 *и соотношения* (10.9). *Тогда для всех* $f \in H^\alpha$ *система* (10.1) *имеет единственное решение* $x_N = A_N^{-1} f_N$ *и справедлива оценка***

$$\left\| A_N^{-1} f_N - \Phi_{\{s;N\}} A^{-1} f \right\|_{L_{2,N}} = O\left(N^{-\alpha} \ln N\right). \qquad (10.10)$$

Доказательство теоремы 10.1. Имеем

$$A_N^{-1} f_N - \Phi_{\{s;N\}} A^{-1} f = A_N^{-1} \Phi_{\{t;N\}} f - \Phi_{\{s;N\}} A^{-1} f =$$

$$= A_N^{-1} \left(\Phi_{\{t;N\}} A - A_N \Phi_{\{s;N\}} \right) A^{-1} f\ . \qquad (10.11)$$

Переходя к нормам в (10.11), получим

$$\left\| A_N^{-1} f_N - \Phi_{\{s;N\}} A^{-1} f \right\|_{L_{2,N}} \le$$

$$\le \left\| A_N^{-1} \right\|_{L_{2,N}} \left\| \Phi_{\{t;N\}} A - A_N \Phi_{\{s;N\}} \right\|_{L_{2,N}} \left\| A^{-1} f \right\|_{L_{2,N}}. \qquad (10.12)$$

Если число δ_0 удовлетворяет условию (10.8), то

$$\left\| A_N^{-1} \right\|_{L_{2,N}} \le \max\left\{1,\ \frac{1}{\left|b_0 + c_0\right|},\ \frac{b}{\delta_0}\right\}, \tag{10.13}$$

где
$$b = \max\left\{ \left\| B_{k,N} \right\|_{L_{2,N}} : k = 1,\ldots,M \right\}.$$

Из (10.12), (10.13) и оценки аппроксимации (9.27) вытекает справедливость оценки (10.10).

Теорема 10.1 доказана.

Приведём пошаговый алгоритм быстрого решения системы (10.1), основанный на методt Фурье. Напомним, что [105, 107] умножение матрицы Фурье F_N, как и умножение обратной матрицы $F_N^{-1} = F_N^*$ на произвольный вектор x_N, осуществляется с затратой $O\left(N \log_2 N\right)$ арифметических операций умножения. Здесь N – порядок квадратной матрицы F_N и размерность вектора x_N. Для удобства дальнейшего изложения, первые строки матриц T_N, $K_{1,N}$ и $K_{2,N}$ (9.17) – (9.19) обозначим как столбцы:

$$q_n = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{N}\operatorname{ctg}\dfrac{\xi_{0,N}^{(-)}}{2} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{N}\operatorname{ctg}\dfrac{\xi_{N-1,N}^{(-)}}{2} \end{bmatrix},\ q_{1,n} = \begin{bmatrix} \dfrac{k_1\left(\xi_{0,N}^{(-)}\right)}{N} \\ \vdots \\ \dfrac{k_1\left(\xi_{N-1,N}^{(-)}\right)}{N} \end{bmatrix},\ q_{2,n} = \begin{bmatrix} \dfrac{k_2\left(\xi_{0,N}^{(+)}\right)}{N} \\ \vdots \\ \dfrac{k_2\left(\xi_{N-1,N}^{(+)}\right)}{N} \end{bmatrix}.$$

Шаг 1. Вычисляем матричные умножения $F_N^* T_N F_N$, $F_N^* K_{1,N} F_N$ и $F_N^* K_{2,N} F_N$; для этого достаточно вычислить $F_N q_N$, $F_N q_{1,N}$ и $F_N q_{2,N}$; в нашем случае эти вычисления не будут проведены, так как эти матрицы вычислены аналитически в (9.30), (9.47) и (9.55); сумма матриц $F_N^* T_N F_N$,

$F_N^* K_{1,N} F_N$ и $F_N^* K_{2,N} F_N$ определяет матрицу системы (10.3) и требует выполнение $2N$ операции сложения (здесь и всюду ниже все арифметические операции проводятся над комплексными числами).

Шаг 2. Вычисляем вектор $g_N = F_N^* f_N$;

Шаг 3. Решаем одно уравнение (10.5) и M_0 уравнений (10.6); после чего будут определены $\left(y_N\right)_0$ и $\left(y_N\right)_k$, $k = M+1,\ldots,M+M_0$; решаем M систем второго порядка (10.7), определители которых не равны нулю; после чего будут определены остальные неизвестные $\left(y_N\right)_k$, $k=1,\ldots,M$ и $k = M+M_0+1,\ldots,2M+M_0$.

Шаг 4. Вычисляем вектор $x_N = F_N y_N$.

Затраты, требующие для осуществления указанных действий, приводим в следующей таблице,

Номер шага	Количество арифметических операций
Шаг 1	$O(N)$
Шаг 2	$O\left(N\log_2 N\right)$
Шаг 3	$O(N)$
Шаг 4	$O\left(N\log_2 N\right)$
Всего:	$O\left(N\log_2 N\right)$

10.2. Случай $b_0 + c_0 = 0$, $\Delta_k \neq 0$. Пусть

$$b_0 + c_0 = 0, \qquad \Delta_k \neq 0, \quad k = 1,\ldots,M.$$

Из теоремы 7.2 при $a = 0$ получаем, что необходимым и достаточным условием разрешимости сингулярного интегрального уравнения (1.1) является условие (7.5), и для любого комплексного числа d_0 существует только одно решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,dt = d_0 .$$

Без ограничения общности можно считать, что $d_0 = 0$. Действительно, задачу нахождения решения уравнения (1.1) с неоднородным условием (10.5):

$$(Ax)(t) = f(t), \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,dt = d_0 \tag{10.14}$$

можно заменить эквивалентной задачей с однородным условием

$$(Ay)(t) = f(t), \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\,dt = 0 . \tag{10.15}$$

Решения задач (10.14) и (10.15) связаны равенством

$$x(t) \equiv y(t) + d_0, \qquad t \in [-\pi, \pi] .$$

Итак, пусть $d_0 = 0$. Задачу

$$(Ax)(t) = f(t), \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,dt = 0$$

запишем в виде одного операторного уравнения

$$\left(\tilde{A}x\right)(t) = \tilde{f}(t), \tag{10.16}$$

где

$$\left(\tilde{A}x\right)(t) = \begin{bmatrix} (Ax)(t) \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,dt \end{bmatrix}; \qquad \tilde{A} : H^{\alpha} \to H^{\alpha} \times \mathbb{C}, \tag{10.17}$$

$$\tilde{f}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{10.18}$$

Обозначив через $H_0^\alpha \subset H^\alpha$ – подпространство функций с нулевыми средними значениями; заметим, что оператор $\tilde{A}$ действует из H_0^α в $H_0^\alpha \times \{0\}$ и является ограниченно обратимым.

Наряду с (9.12) и (9.13) рассмотрим сеточные операторы

$$\tilde{\Phi}_{\{s;N\}} x = \begin{bmatrix} \Phi_{\{s,N\}} x \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \tilde{\Phi}_{\{s;N\}} : H^\alpha \to \mathbb{C}^{N+1}, \tag{10.19}$$

$$\tilde{\Phi}_{\{t;N\}} \begin{bmatrix} x \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{\{t;N\}} x \\ c \end{bmatrix}; \qquad \tilde{\Phi}_{\{t;N\}} : H^\alpha \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{N+1}. \tag{10.20}$$

Аппроксимируем уравнение (10.16) дискретным уравнением

$$\tilde{A}_N \tilde{x}_N = \tilde{f}_N , \tag{10.21}$$

где

$$\tilde{A}_N = \left[\begin{array}{c|c} A_N & 0 \\ \hline a_N^{\mathrm{T}} & 0 \end{array}\right], \qquad a_N^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{N}} & \ldots & \dfrac{1}{\sqrt{N}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^N , \tag{10.22}$$

$$\tilde{x}_N = \begin{bmatrix} x_N \\ x_{N,N} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{f}_N = \tilde{\Phi}_{\{t;N\}} \tilde{f} , \tag{10.23}$$

причем $x_{N,N}$ – дополнительное неизвестное, введенное И. К.Лифановым [52] и названное им **регуляризующим фактором**.

Покажем, что определенные равенствами (10.17) и (10.22) операторы $\tilde{A}$ и $\tilde{A}_N$ связаны соотношением

$$\left\| \tilde{A}_N \tilde{\Phi}_{\{s;N\}} x - \tilde{\Phi}_{\{t;N\}} \tilde{A} x \right\|_{L_{2,\,N+1}} = O\left(N^{-\alpha} \ln N \right) \tag{10.24}$$

для всех $x(t) \in H_0^\alpha$.

Действительно, так как

$$\tilde{A}_N \tilde{\Phi}_{\{s;N\}} x - \tilde{\Phi}_{\{t;N\}} \tilde{A} x = \begin{bmatrix} A_N \Phi_{\{s;N\}} x - \Phi_{\{t;N\}} A x \\ a_N^{\mathrm{T}} \Phi_{\{s;N\}} x \end{bmatrix},$$

то, переходя к нормам, получим оценку

$$\left\| \tilde{A}_N \tilde{\Phi}_{\{s;N\}} x - \tilde{\Phi}_{\{t;N\}} \tilde{A} x \right\|_{L_{2,\,N+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N+1} \left[\sum_{k=1}^{N} \left(A_N \Phi_{\{s;N\}} x - \Phi_{\{t;N\}} A x \right)_k^2 + \left(a_N^{\mathrm{T}} \Phi_{\{s;N\}} x \right)^2 \right]} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(A_N \Phi_{\{s;N\}} x - \Phi_{\{t;N\}} A x \right)_k^2} + \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^{N} x\left(s_{k,N} \right) \right| =$$

$$= \left\| A_N \Phi_{\{s;N\}} x - \Phi_{\{t;N\}} A x \right\|_{L_{2,\,N}} + \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^{N} x\left(s_{k,N} \right) \right|. \qquad (10.25)$$

Для первого слагаемого в правой части неравенства (10.25) имеет место оценка (9.27). Так как среднее значение функции $x(t) \in H_0^{\alpha}$ равно нулю, то для второго слагаемого правой части (10.25) справедлива оценка

$$\frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^{N} x\left(s_{k,N} \right) \right| = O\left(N^{-\alpha} \right). \qquad (10.26)$$

Справедливость оценки (10.24) доказана.

Разработаем быстрый алгоритм решения системы (10.21). Система (10.21) переопределенная и, вообще говоря, несовместная. Отметим, что уравнение (1.1) для случая $A \equiv T$, $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ рассмотрено в [52], где для устранения переопределенности и несовместности введено дополнительное неизвестное, названное регуляризующим фактором, а процесс решения этим способом – методом квазирегуляризации. Доказано, что регуляризующий фактор стремится к нулю при $N \to \infty$, то есть происходит процесс саморегуляризации. Ниже нами для решения системы (10.21) использован метод беспараметрной регуляризации сдвигом, рассмотренный в § 7 главы 1.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что векторы

$$\tilde{e}_N = (0, \ldots, 0,\ 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{N+1}, \tag{10.27}$$

$$\tilde{g}_N = \left(\frac{1}{\sqrt{N}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{N}},\ 0 \right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{N+1} \tag{10.28}$$

образуют нормированные базисы в ядре оператора $\tilde{A}_N$ и сопряженного оператора $\tilde{A}_N^*$:

$$\tilde{A}_N \tilde{e}_N = 0, \qquad \tilde{A}_N^* \tilde{g}_N = 0\,. \tag{10.29}$$

Полагая

$$\tilde{B}_N = \tilde{g}_N \tilde{e}_N^*, \tag{10.30}$$

рассмотрим непараметрическую регуляризацию сдвигом системы (10.21)

$$\tilde{C}_N \tilde{x}_N = \tilde{h}_N, \tag{10.31}$$

где

$$\tilde{C}_N = \tilde{A}_N + \tilde{B}_N, \quad \tilde{h}_N = \tilde{f}_N - \tilde{g}_N \tilde{g}_N^* \tilde{f}_N, \tag{10.32}$$

причем

$$\tilde{C}_N = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11}^{(N)} & \cdots & a_{1N}^{(N)} & \frac{1}{\sqrt{N}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1}^{(N)} & \cdots & a_{NN}^{(N)} & \frac{1}{\sqrt{N}} \\ \hdashline \frac{1}{\sqrt{N}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{N}} & 0 \end{array} \right], \qquad \tilde{A}_N = \begin{bmatrix} a_{11}^{(N)} & \cdots & a_{1N}^{(N)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1}^{(N)} & \cdots & a_{NN}^{(N)} \end{bmatrix}.$$

Справедлива следующая

Теорема 10.2. ***Пусть выполнены условия теоремы*** **7.2** ***и соотношения*** **(10.9).** ***Тогда для всех*** $\tilde{f}(t) \in H_0^{\alpha} \times \{0\}$ ***система*** **(10.31)** ***является совместной, имеет единственное решение*** $\tilde{x}_N = \tilde{C}_N^{-1} \tilde{h}_N$ ***и справедлива оценка***

$$\left\| \tilde{C}_N^{-1} \tilde{h}_N - \Phi_{\{s;N\}} \tilde{A}^{-1} \tilde{f} \right\|_{L_{2,N+1}} = O\left(N^{-\alpha} \ln N \right). \qquad (10.33)$$

Доказательство теоремы 10.2. Факт принадлежности вектора (10.32) образу дискретного оператора $\tilde{A}_N$ и обратимость оператора $\tilde{C}_N$ следует из теоремы 7.2. Из этой теоремы также получаем, что единственное решение системы (10.31) совпадает с нормальным псевдорешением системы (10.21):

$$\tilde{C}_N^{-1} \tilde{h}_N = \tilde{A}_N^{+} \tilde{f}_N. \qquad (10.34)$$

Для разработки алгоритма быстрого решения системы (10.31) методом Фурье вводим матрицу

$$\tilde{F}_N = \left[\begin{array}{c|c} F_N & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right], \qquad (10.35)$$

где F_N – матрица Фурье.

Представим систему (10.31) в виде

$$\left(\tilde{F}_N^{*} \tilde{C}_N \tilde{F}_N \right) \tilde{F}_N^{*} \tilde{x}_N = \tilde{F}_N^{*} \tilde{h}_N. \qquad (10.36)$$

Имеем

$$\tilde{F}_N^{*} \tilde{C}_N \tilde{F}_N = \left[\begin{array}{c|c} F_N^{*} A_N F_N & F_N^{*} a_N \\ \hline a_N^{\mathrm{T}} F_N & 0 \end{array} \right], \qquad (10.37)$$

$$a_N^{\mathrm{T}} F_N = \left(F_N^{*} a_N \right)^{\mathrm{T}} = (1,\ 0, \dots,\ 0) \in \mathbb{C}^N. \qquad (10.38)$$

Из (9.63), с учетом (10.37) и (10.38), получим

$$\tilde{F}_N^* \tilde{C}_N \tilde{F}_N = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & D_N & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \tag{10.39}$$

где

$$D_N = \left[\begin{array}{c|c|c} \Lambda_{1,1} + K_{1,1}^{(-)} & 0 & K_{1,3}^{(+)} \\ \hline 0 & \Lambda_{2,2} & 0 \\ \hline K_{3,1}^{(+)} & 0 & \Lambda_{3,3} + K_{3,3}^{(-)} \end{array}\right].$$

Из представления (10.39) следует, что первая и последняя неизвестные (координаты вектора $\tilde{F}_N^* \tilde{x}_N$) в уравнении (10.36) уже найдены. Остальные координаты находим из уравнений (10.6) и (10.7). Быстрое решение этих уравнений обсуждалось в доказательстве теоремы 10.1.

Докажем оценку (10.33). Аналогично оценке (10.13) получим

$$\left\| D_N^{-1} \right\| \le \max\left\{ 1, \ \frac{b}{\delta_0} \right\}, \tag{10.40}$$

где величины δ_0 и b удовлетворяют условиям (10.8) и (10.9). Из представления (10.39) и неравенства (10.40) вытекает оценка

$$\left\| \tilde{C}_N^{-1} \right\| \le m_0 \left\| D_N^{-1} \right\|, \tag{10.41}$$

где m_0 – некоторая постоянная, не зависящая от N.

Из оценок аппроксимации (10.24), (10.26) и с учетом (10.41) вытекает справедливость оценки (10.33).

Теорема 10.2 доказана.

Введем обозначения

$$\tilde{y}_N = \tilde{F}_N^* \tilde{x}_N, \qquad \tilde{z}_N = \tilde{F}_N^* \tilde{h}_N. \tag{10.42}$$

Из определения вектора $\tilde{z}_N$ (равенства (10.42), (10.23), (10.20), (10.18)), имеем

$$\left(\tilde{z}_N\right)_k = \left(F_n^* f_N\right)_k,\ k = 1,\dots,N-1;\ \left(\tilde{z}_N\right)_0 = 0,\ \left(\tilde{z}_N\right)_N = 0. \quad (10.43)$$

Эти обозначения позволяют представить систему (10.36) как самостоятельные линейные уравнения с одним и системы с двумя неизвестными:

$$\left(\tilde{y}_N\right)_N = \left(\tilde{z}_N\right)_0 = 0, \qquad k = 0, \quad (10.44)$$

$$\begin{cases} \left(\lambda_k + b_{-k}\overline{\chi}^k\right)\cdot\left(\tilde{y}_N\right)_k + c_{-k}\overline{\omega}^k\cdot\left(\tilde{y}_N\right)_{N-k} = \left(\tilde{z}_N\right)_k, \\ c_k\omega^k\cdot\left(\tilde{y}_N\right)_k + \left(\lambda_{N-k} + b_k\chi^k\right)\cdot\left(\tilde{y}_N\right)_{N-k} = \left(\tilde{z}_N\right)_{N-k}, \end{cases} \quad (10.45)$$
$$k = 1,\dots,M$$

$$\lambda_k\cdot\left(\tilde{y}_N\right)_k = \left(\tilde{z}_N\right)_k, \qquad k = M+1,\dots,M+M_0, \quad (10.46)$$

$$\left(\tilde{y}_N\right)_0 = \left(\tilde{z}_N\right)_N = 0, \qquad k = N. \quad (10.47)$$

Быстрый алгоритм решения системы (10.36).

Шаг 1. Полностью повторяем шаг 1 из пункта 10.1.

Шаг 2. Полностью повторяем шаг 2 из пункта 10.1.

Шаг 3. Решаем M систем второго порядка (10.45), определители которых не равны нулю; определяются неизвестные $\left(\tilde{y}_N\right)_k$, $k = 1,\dots,M$ и $k = M+M_0+1,\dots,2M+M_0$; M_0 уравнений (10.46); после чего будут определены $\left(\tilde{y}_N\right)_k$, $k = M+1,\dots,M+M_0$; из уравнений (10.44) и (10.47) находим $\left(\tilde{y}_N\right)_0 = 0$ и $\left(\tilde{y}_N\right)_N = 0$.

Шаг 4. Полностью повторяем шаг 4 из пункта 10.1.

Таблица затрат, требующихся для реализации данного алгоритма, полностью совпадает с таблицей затрат, приведенной в пункте 10.1.

10.3. Случай $b_0 + c_0 \neq 0$, $\Delta_k = 0$. Пусть $b_0 + c_0 \neq 0$ и при $k = 1$ определитель матрицы

$$B_k = \begin{bmatrix} i + b_{-k} & c_{-k} \\ c_k & -i + b_k \end{bmatrix},$$

определенной в § 7, равен нулю, а при остальных значениях k не равен нулю:

$$b_0 + c_0 \neq 0; \qquad \det B_1 = 0; \qquad \det B_k \neq 0, \quad k = 2, \ldots, M .$$

Как отмечено в § 7, такому значению k (при нашем предположении, при $k = 1$) соответствуют 10 ситуаций $\left(A_{1,1}\right) - \left(A_{1,10}\right)$ при $a = 0$. Необходимыми и достаточными условиями разрешимости сингулярного интегрального уравнения (1.1) в этих ситуациях, соответственно являются условия $\left(B_{1,1}\right) - \left(B_{1,10}\right)$ при $a = 0$. Условия $\left(C_{1,1}\right) - \left(C_{1,10}\right)$ обеспечивают единственность решения уравнения (1.1). Рассуждения, используемые при решении уравнения (1.1) в каждом из 10 ситуаций, повторяют друг друга. Поэтому достаточно рассмотрения одного из случаев $\left(A_{1,1}\right) - \left(A_{1,10}\right)$, например, ситуации $\left(A_{1,2}\right)$.

В силу теоремы 7.3 необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи

$$\left(Ax\right)\left(t\right) = f\left(t\right), \tag{10.48}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\left(s\right) e^{-is} ds = d_1^+, \tag{10.49}$$

для любого комплексного числа d_0, является выполнение условия

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right) e^{-it} dt = 0 .$$

Без ограничения общности можно считать, что $d_1^+ = 0$. Действительно, если к решению уравнения (10.48) с однородным условием

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)e^{-is}ds = 0 \tag{10.50}$$

добавить слагаемое $d_1^+ e^{it}$, то получим решение задачи (10.48), (10.49) для любого $d_1^+ \in \mathbb{C}$.

Итак, рассмотрим задачу нахождения решения уравнения (10.48), удовлетворяющего условию (10.50):

$$(Ax)(t) = f(t), \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)e^{-is}ds = 0. \tag{10.51}$$

Запишем задачу (10.51) в виде одного операторного уравнения

$$(\tilde{A}x)(t) = \tilde{f}(t), \tag{10.52}$$

где

$$(\tilde{A}x)(t) = \begin{bmatrix} (Ax)(t) \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x(s)e^{-is}ds \end{bmatrix}; \qquad \tilde{A}: H^\alpha \to H^\alpha \times \mathbb{C}, \tag{10.53}$$

$$\tilde{f}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix} \in H^\alpha \times \mathbb{C}.$$

Обозначим через $H_1^\alpha \subset H^\alpha$ – подпространство функций $x(t)$, таких, что среднее значение функции $x(t)e^{-it}$ равно нулю. В силу теоремы 7.3 оператор $\tilde{A}$ действует из H_1^α в $H_0^\alpha \times \{0\}$ и является ограниченно обратимым.

Аппроксимируем уравнение (10.52) дискретным уравнением

$$\tilde{A}_N \tilde{x}_N = \tilde{f}_N, \tag{10.54}$$

где

$$\tilde{A}_N = \left[\begin{array}{c|c} A_N & 0 \\ \hline b_N^* & 0 \end{array}\right], \qquad b_N^* = \left[\frac{1}{\sqrt{N}} e^{-is_{1,N}} \ \dots \ \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-is_{N,N}} \right] \in \mathbb{C}^N, \quad (10.55)$$

$$\tilde{x}_N = \begin{bmatrix} x_N \\ x_{N,N} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{f}_N = \tilde{\Phi}_{\{t;N\}} \tilde{f}. \quad (10.56)$$

Операторы $\tilde{A}$, $\tilde{A}_N$, $\tilde{\Phi}_{\{s;N\}}$ и $\tilde{\Phi}_{\{t;N\}}$, определенные в (10.53), (10.55), (10.19) и (10.20) соответственно, удовлетворяют соотношению

$$\left\| \tilde{A}_N \tilde{\Phi}_{\{s;N\}} x - \tilde{\Phi}_{\{t;N\}} \tilde{A} x \right\|_{L_{2,\,N+1}} = O\left(N^{-\alpha} \ln N \right)$$

для всех $x(t) \in H_1^\alpha$.

Действительно, так как

$$\tilde{A}_N \tilde{\Phi}_{\{s;N\}} x - \tilde{\Phi}_{\{t;N\}} \tilde{A} x = \begin{bmatrix} A_N \Phi_{\{s;N\}} x - \Phi_{\{t;N\}} A x \\ b_N^{\mathrm{T}} \Phi_{\{s;N\}} x \end{bmatrix},$$

то, переходя к нормам, получим оценку

$$\left\| \tilde{A}_N \tilde{\Phi}_{\{s;N\}} x - \tilde{\Phi}_{\{t;N\}} \tilde{A} x \right\|_{L_{2,\,N+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N+1} \left[\sum_{k=1}^{N} \left(A_N \Phi_{\{s;N\}} x - \Phi_{\{t;N\}} A x \right)_k^2 + \left(b_N^{\mathrm{T}} \Phi_{\{s;N\}} x \right)^2 \right]} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(A_N \Phi_{\{s;N\}} x - \Phi_{\{t;N\}} A x \right)_k^2} + \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^{N} e^{-is_{k,N}} x\left(s_{k,N} \right) \right| =$$

$$= \left\| A_N \Phi_{\{s;N\}} x - \Phi_{\{t;N\}} A x \right\|_{L_{2,\,N}} + \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^{N} e^{-is_{k,N}} x\left(s_{k,N} \right) \right|. \quad (10.57)$$

Для первого слагаемого в правой части неравенства (10.57) имеет место оценка (9.27). Так как среднее значение функции $x(t)e^{-it}$ равно нулю, то для второго слагаемого правой части (10.57), справедлива оценка

$$\frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N} e^{-is_{k,N}} x\left(s_{k,N}\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{-is_{k,N}} x\left(s_{k,N}\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)e^{-is}ds\right| = O\left(N^{-\alpha}\right). \qquad (10.58)$$

Вектор $\tilde{e}_N$ из (10.27) образует нормированный базис в ядре оператора $\tilde{A}_N$. Несложно проверяется, что вектор

$$\tilde{g}_N = \begin{bmatrix} b_N \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N+1}, \qquad b_N = \begin{bmatrix} N^{-1/2}e^{is_{1,N}} \\ \vdots \\ N^{-1/2}e^{is_{N,N}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N}$$

образует нормированный базис в ядре сопряженного оператора $\tilde{A}_N^*$:

$$\tilde{A}_N\tilde{e}_N = 0, \qquad \tilde{A}_N^*\tilde{g}_N = 0. \qquad (10.59)$$

Дальнейшие наши действия связаны с методом беспараметрной регуляризации сдвигом. Положим

$$\tilde{B}_N = \tilde{g}_N\tilde{e}_N^*.$$

Рассмотрим вместо системы (10.54) регуляризванную систему

$$\tilde{C}_N\tilde{x}_N = \tilde{h}_N, \qquad (10.60)$$

где

$$\tilde{C}_N = \tilde{A}_N + \tilde{B}_N, \quad \tilde{h}_N = \tilde{f}_N - \tilde{g}_N\tilde{g}_N^*\tilde{f}_N, \qquad (10.61)$$

причем

$$\tilde{C}_N = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(N)} & \dots & a_{1N}^{(N)} & \frac{1}{\sqrt{N}} e^{is_{1,N}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1}^{(N)} & \dots & a_{NN}^{(N)} & \frac{1}{\sqrt{N}} e^{is_{N,N}} \\ \hline \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-is_{1,N}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-is_{N,N}} & 0 \end{array}\right].$$

Приведем формулировку теоремы разрешимости дискретного уравнения и сходимости его решения.

Теорема 10.3. ***Пусть выполнены условия теоремы* 7.3 *и соотношения* (10.9). *Тогда для всех* $\tilde{f}(t) \in H_0^{\alpha} \times \{0\}$ *система* (10.31) *является совместной, имеет единственное решение* $\tilde{x}_N = \tilde{C}_N^{-1} \tilde{h}_N$ *и справедлива оценка***

$$\left\| \tilde{C}_N^{-1} \tilde{h}_N - \Phi_{\{s;N\}} \tilde{A}^{-1} \tilde{f} \right\|_{L_{2,N+1}} = O\left(N^{-\alpha} \ln N\right). \tag{10.62}$$

Доказательство теоремы 10.3. Справедливость включения вектора (10.61) $\tilde{h}_N \in R\left(\tilde{A}_N\right)$ и существование обратной матрицы $\tilde{C}_N^{-1}$ вытекает из теоремы 7.3. Из этой теоремы также получаем, что единственное решение системы (10.60) совпадает с нормальным псевдорешением системы (10.54):

$$\tilde{C}_N^{-1} \tilde{h}_N = \tilde{A}_N^{+} \tilde{f}_N .$$

Для разработки алгоритма быстрого решения системы (10.60) методом Фурье используем матрицу (10.35).

Представим систему (10.60) в виде

$$\left(\tilde{F}_N^* \tilde{C}_N \tilde{F}_N\right) \tilde{F}_N^* \tilde{x}_N = \tilde{F}_N^* \tilde{h}_N . \tag{10.63}$$

Имеем

$$\tilde{F}_N^* \tilde{C}_N \tilde{F}_N = \left[\begin{array}{c|c} F_N^* A_N F_N & F_N^* b_N \\ \hline b_N^* F_N & 0 \end{array}\right], \tag{10.64}$$

$$F_N^* b_N = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{is_{1,N}} \end{bmatrix}, \quad b_N^* F_N = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & e^{-is_{1,N}} \end{bmatrix}. \tag{10.65}$$

Из (9.63), с учетом (10.64) и (10.65), получим

$$\tilde{F}_N^* \tilde{C}_N \tilde{F}_N = \left[\begin{array}{c:cc} D_N & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & e^{is_{1,N}} \\ 0 & e^{-is_{1,N}} & 0 \end{array}\right], \tag{10.66}$$

$$D_N = \left[\begin{array}{c:c:c:c} b_0 + c_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \Lambda_{1,1} + K_{1,1}^{(-)} & 0 & \left[K_{1,3}^{(+)}\right]' \\ \hdashline 0 & 0 & \Lambda_{2,2} & 0 \\ \hdashline 0 & \left[K_{3,1}^{(+)}\right]' & 0 & \left[\Lambda_{3,3} + K_{3,3}^{(-)}\right]'' \end{array}\right], \tag{10.67}$$

где использованы следующие обозначения:

$\left[K_{1,3}^{(+)}\right]'$ – из матрицы $K_{1,3}^{(+)}$ удален последний столбец,

$\left[K_{3,1}^{(+)}\right]'$ – из матрицы $K_{3,1}^{(+)}$ удалена последняя строка,

$\left[\Lambda_{3,3} + K_{3,3}^{(-)}\right]''$ – из матрицы $\Lambda_{3,3} + K_{3,3}^{(-)}$ удалены и последний столбец, и последняя строка.

Из представления (10.39) следует, что первая и последняя неизвестные (координаты вектора $\tilde{F}_N^* \tilde{x}_N$) в уравнении (10.36) уже найдены. Остальные координаты находим из уравнений (10.6) и (10.7). Быстрое решение этих уравнений обсуждалось в доказательстве теоремы 10.1.

Докажем оценку (10.62). Аналогично оценкам (10.13) и (10.40), получим

$$\left\| D_N^{-1} \right\| \le \max\left\{ 1,\ \frac{1}{b_0 + c_0},\ \frac{b}{\delta_0} \right\}, \tag{10.68}$$

где величины δ_0 и b удовлетворяют условиям (10.8) и (10.9). Из представлений (10.66), (10.67) и неравенства (10.68) вытекает оценка

$$\left\| \tilde{C}_N^{-1} \right\| \le m_0 \left\| D_N^{-1} \right\|, \tag{10.69}$$

где постоянная m_0 не зависит от N.

Из (10.69), в силу оценок аппроксимации (10.57), (10.58), вытекает справедливость оценки (10.62).

Теорема 10.3 доказана.

Используем обозначения (10.42). Из определения вектора $\tilde{z}_N$ (равенства (10.42), (10.56), (10.20), (10.18)) имеем

$$\left(\tilde{z}_N\right)_k = \left(F_n^* f_N\right)_k,\ k = 0,\dots,N-1;\ \left(\tilde{z}_N\right)_{N-1} = 0,\ \left(\tilde{z}_N\right)_N = 0\,.$$

Используя эти обозначения, представим систему (10.60) как самостоятельные линейные уравнения с одним и двумя неизвестными:

$$\left(b_0 + c_0\right)\left(\tilde{y}_N\right)_0 = \left(\tilde{z}_N\right)_0, \qquad k = 0\,, \tag{10.70}$$

$$\left(\lambda_1 + b_{-1}\overline{\chi}\right)\left(\tilde{y}_N\right)_1 = \left(\tilde{z}_N\right)_1, \qquad k = 1\,, \tag{10.71}$$

$$\begin{cases} \left(\lambda_k + b_{-k}\overline{\chi}^k\right)\cdot\left(\tilde{y}_N\right)_k + c_{-k}\overline{\omega}^k\cdot\left(\tilde{y}_N\right)_{N-k} = \left(\tilde{z}_N\right)_k, \\ c_k\omega^k\cdot\left(\tilde{y}_N\right)_k + \left(\lambda_{N-k} + b_k\chi^k\right)\cdot\left(\tilde{y}_N\right)_{N-k} = \left(\tilde{z}_N\right)_{N-k},, \end{cases} \tag{10.72}$$
$$k = 2,\dots,M$$

$$\lambda_k\cdot\left(\tilde{y}_N\right)_k = \left(\tilde{z}_N\right)_k, \qquad k = M+1,\dots,M+M_0\,, \tag{10.73}$$

$$\left(\tilde{y}_N\right)_{N-1} = \left(\tilde{z}_N\right)_N = 0, \qquad k = N-1\,. \tag{10.74}$$

$$\left(\tilde{y}_N\right)_N = \left(\tilde{z}_N\right)_{N-1} = 0, \qquad k = N\,. \tag{10.75}$$

Быстрый алгоритм решения системы (10.63).

Шаг 1. Полностью повторяем шаг 1 из пункта 10.1.

Шаг 2. Полностью повторяем шаг 2 из пункта 10.1.

Шаг 3. Решаем $M-1$ систему второго порядка (10.72), определители которых не равны нулю; определяются неизвестные $\left(\tilde{y}_N\right)_k$, $k=2,\ldots,M$ и $k=M+M_0+1,\ldots,2M+M_0-1$; M_0 уравнений (10.34); после чего будут определены $\left(\tilde{y}_N\right)_k$, $k=M+1,\ldots,M+M_0$; $\left(\tilde{y}_N\right)_0$, $\left(\tilde{y}_N\right)_{N-1}$ и $\left(\tilde{y}_N\right)_N$ находим из уравнений (10.70), (10.75) и (10.74).

Шаг 4. Полностью повторяем шаг 4 из пункта 10.1.

Таблица затрат, требующихся для реализации данного алгоритма, полностью совпадает с таблицей затрат, приведенной в пункте 10.1.

Быстрый алгоритм решения системы (10.63).

Шаг 1. Полностью повторяем шаг 1 из пункта 10.1.

Шаг 2. Полностью повторяем шаг 2 из пункта 10.1.

Шаг 3. Решаем $M-1$ систему второго порядка (10.72), определители которых не равны нулю; определяются неизвестные $\left(\tilde{y}_N\right)_k$, $k=2,\ldots,M$ и $k=M+M_0+1,\ldots,2M+M_0-1$; M_0 уравнений (10.34); после чего будут определены $\left(\tilde{y}_N\right)_k$, $k=M+1,\ldots,M+M_0$; $\left(\tilde{y}_N\right)_0$, $\left(\tilde{y}_N\right)_{N-1}$ и $\left(\tilde{y}_N\right)_N$ находим из уравнений (10.70), (10.75) и (10.74).

Шаг 4. Полностью повторяем шаг 4 из пункта 10.1.

Таблица затрат, требующихся для реализации данного алгоритма, полностью совпадает с таблицей затрат, приведенной в пункте 10.1.

11. ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

Рассмотрим, наконец, задачу дискретизации сингулярного интегрального уравнения второго рода (1.2)

$$ax(t)+(Ax)(t)=f(t), \qquad f(t)\in H^{\alpha} \tag{11.1}$$

и разработки быстрого алгоритма его решения.

Определим дискретный аналог этого уравнения, обозначенный в § 9 в виде (9.2). Для этого используем сетки $\{s;\, N\}$ и $\{t;\, N\}$, определенные в (9.9) и (9.10), по два раза.

Подставим в (11.1) вместо переменной t узлы $t_{k,N}$ сетки $\{t;\, N\}$, а интегралы (1.4), (1.6) и (1.7) заменим интегральными суммами, составленными по узлам сетки $\{s;\, N\}$:

$$ax\left(t_{k,N}\right)+\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}q_{k\,m}x\left(s_{m,N}\right)=f\left(t_{k,N}\right), \tag{11.2}$$

где $$q_{k\,m} = \operatorname{ctg}\frac{t_{k,N} - s_{m,N}}{2} + k_1\left(t_{k,N} - s_{m,N}\right) + k_2\left(t_{k,N} + s_{m,N}\right),$$

а функции $k_1(\tau)$ и $k_2(\tau)$ определены в (1.8). Положим

$$A_N = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{N1} & \cdots & q_{NN} \end{bmatrix}, \tag{11.3}$$

$$f_N = \Phi_{\{t;\,N\}} f = \left(f\left(t_{1,N}\right), \ldots, f\left(t_{N,N}\right)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$x_N = \Phi_{\{s;\,N\}} x = \left(x\left(s_{1,N}\right), \ldots, x\left(s_{N,N}\right)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$x'_N = \Phi_{\{t;\,N\}} x = \left(x\left(t_{1,N}\right), \ldots, x\left(t_{N,N}\right)\right)^{\mathrm{T}},$$

где сеточные операторы $\Phi_{\{s;\,N\}}$ и $\Phi_{\{t;\,N\}}$ определены в (9.12) и (9.13). Заметим, что матрица (11.3) совпадает с матрицей (9.16). В введенных обозначениях систему (11.2) можно записать в виде

$$a x'_N + A_N x_N = f_N\,. \tag{11.4}$$

Система (11.4) (в развернутой форме – (11.2)) состоит из N уравнений и содержит $2N$ неизвестных. Присоединим к уравнениям этой системы еще N уравнений, содержащих имеющиеся неизвестные. Для этого подставим в уравнение (11.1) вместо переменной t узлы $s_{k,N}$ сетки $\{s;\,N\}$, а интегралы (1.4), (1.6) и (1.7) заменим интегральными суммами, составленными по узлам сетки $\{t;\,N\}$:

$$a x\left(s_{k,N}\right) + \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} q'_{k\,m} x\left(t_{m,N}\right) = f\left(s_{k,N}\right), \tag{11.5}$$

где $$q'_{k\,m} = \operatorname{ctg}\frac{s_{k,N} - t_{m,N}}{2} + k_1\left(s_{k,N} - t_{m,N}\right) + k_2\left(s_{k,N} + t_{m,N}\right).$$

Положим

$$A'_N = \begin{bmatrix} q'_{11} & \cdots & q'_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ q'_{N1} & \cdots & q'_{NN} \end{bmatrix},$$

$$f'_N = \Phi_{\{s;\,N\}} f = \left(f\left(s_{1,N}\right),\ldots, f\left(s_{N,N}\right)\right)^{\mathrm{T}}.$$

В этих обозначениях систему (11.5) можно записать в виде

$$A'_N x'_N + a x_N = f'_N .$$

Таким образом, нами получена система, состоящая из N уравнений и содержащая $2N$ неизвестных

$$\begin{cases} a x'_N + A_N x_N = f_N, \\ A'_N x'_N + a x_N = f'_N. \end{cases} \tag{11.6}$$

Исследуем совместность данной системы. Используя матрицу Фурье F_N, запишем систему (11.6) в виде

$$\begin{cases} a y'_N + F_N^* A_N F_N y_N = g_N, \\ F_N^* A'_N F_N y'_N + a y_N = g'_N, \end{cases} \tag{11.7}$$

где

$$y'_N = F_N^* x'_N, \quad y_N = F_N^* x_N, \quad g_N = F_N^* f_N, \quad g'_N = F_N^* f'_N .$$

Представление для матрицы $F_N^* A_N F_N$ приведено в (9.63). Справедливость этого представления установлена в леммах 9.1 – 9.3. Докажем аналогичное представление и для матрицы $F_N^* A'_N F_N$.

Матрица A'_N состоит из суммы трех слагаемых – циркулянтных матриц T'_N, $K'_{1,N}$ и перциркулянтной матрицы $K'_{2,N}$. Первыми строками матриц T'_N, $K'_{1,N}$ и $K'_{2,N}$ соответственно являются

$$\left[\frac{1}{N}\operatorname{ctg}\frac{s_{1,N}-t_{1,N}}{2} \quad \frac{1}{N}\operatorname{ctg}\frac{s_{1,N}-t_{2,N}}{2} \quad \ldots \quad \frac{1}{N}\operatorname{ctg}\frac{s_{1,N}-t_{N,N}}{2}\right],$$

$$\left[\frac{1}{N}k_1\left(s_{1,N}-t_{1,N}\right) \quad \frac{1}{N}k_1\left(s_{1,N}-t_{2,N}\right) \quad \ldots \quad \frac{1}{N}k_1\left(s_{1,N}-t_{N,N}\right)\right], \quad (11.8)$$

$$\left[\frac{1}{N}k_2\left(s_{1,N}+t_{1,N}\right) \quad \frac{1}{N}k_2\left(s_{1,N}+t_{2,N}\right) \quad \ldots \quad \frac{1}{N}k_1\left(s_{1,N}+t_{N,N}\right)\right], \quad (11.9)$$

а функции $k_1(t)$ и $k_2(t)$ определены равенствами (1.8).

Пусть $x(t)\in H^{\alpha}$. Аналогично оценкам (9.24) – (9.26) имеют место соотношения

$$\left|\left(\Phi_{\{s;N\}}(Tx)\right)_m-\left(T'_N\Phi_{\{t;N\}}x\right)_m\right|=O\left(N^{-\alpha}\ln N\right), \quad m=1,\ldots,N,$$

$$\left|\left(\Phi_{\{s;N\}}(K_1x)\right)_m-\left(K'_{1,N}\Phi_{\{t;N\}}x\right)_m\right|=O\left(N^{-\alpha}\right), \qquad m=1,\ldots,N,$$

$$\left|\left(\Phi_{\{s;N\}}(K_2x)\right)_m-\left(K'_{2,N}\Phi_{\{t;N\}}x\right)_m\right|=O\left(N^{-\alpha}\right), \qquad m=1,\ldots,N.$$

Из этих соотношений следуют оценки аппроксимации

$$\left|\left(\Phi_{\{s;N\}}(Ax)\right)_m-\left(A'_N\Phi_{\{t;N\}}x\right)_m\right|=O\left(N^{-\alpha}\ln N\right), \quad m=1,\ldots,N, \quad (11.10)$$

$$\left\|\Phi_{\{s;N\}}A-A'_N\Phi_{\{t;N\}}\right\|_{L_{2,N}}=O\left(N^{-\alpha}\ln N\right), \qquad (11.11)$$

Для выявления структуры матрицы $F_N^* A'_N F_N$ вычислим произведения $F_N^* T'_N F_N$, $F_N^* K'_{1,N} F_N$ и $F_N^* K'_{2,N} F_N$. Справедливы следующие утверждения (леммы (11.1) – (11.3)).

Лемма 11.1. ***Для любого*** $N \ge 2$ ***справедливо равенство***

$$F_N^* T'_N F_N = \operatorname{diag}\left(\lambda'_0,\ \lambda'_1, \ldots,\ \lambda'_{N-1}\right),$$

где

$$\lambda'_0 = 0; \qquad \lambda'_k = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)},\quad k = 1,\ldots,N-1. \tag{11.12}$$

Доказательство леммы 11.1. Положим

$$a'_m = \frac{1}{N}\operatorname{ctg}\frac{s_{1,N} - t_{m+1,N}}{2},\quad m = 0,\ldots,N-1,$$

$$\psi_N(w) = \sum_{m=0}^{N-1} a'_m w^m .$$

Согласно теореме 1.7 (глава 1), имеем

$$F_N^* T'_N F_N = \operatorname{diag}\left(\psi_N(w_0),\ \psi_N(w_1), \ldots,\ \psi_N(\psi_{N-1})\right),$$

где $w_n = e^{-i\frac{2\pi}{N}n}$ $(n = 0,\ldots,N-1)$ – все корни N-ой степени из 1.

Заметим, что многочлен $\psi_N(w)$ связан с многочленом $\varphi_N(w)$, участвующим в доказательстве леммы 9.1, равенством

$$\psi_N(w_n) = \overline{w}_n \varphi_N(w_n), \qquad (n = 0,\ldots,N-1).$$

Из равенства $\varphi_N(w_0) = 0$ получим

$$\psi_N(w_0) = \overline{w}_0 \varphi_N(w_0) = 0 .$$

Если $n = 1,\ldots, N-1$, то из равенства $\varphi_N\left(w_n\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{N}\right)}$ следует

$$\psi_N\left(w_n\right) = \overline{w}_n \varphi_N\left(w_n\right) = e^{i\frac{2n\pi}{N}} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{N}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{N}\right)}.$$

Лемма 11.1 доказана.

Отметим одно геометрическое свойство спектров дискретных операторов T_N и T'_N.

Спектр оператора T_N состоит из начала координат и точек деления правой полуокружности единичной окружности с центром в начале координат на N равных частей. Спектр оператора T'_N также содержит начала координат, а ненулевые точки являются точками деления левой полуокружности единичной окружности с центром в начале координат на N равных частей. При этом крайние точки этих полуокружностей i и $-i$ не принадлежат спектрам операторов T_N и T'_N.

Лемма 11.2. ***Для любого*** $N \ge 2M+1$***, где*** M ***– старшая степень тригонометрических полиномов* (1.8)*, справедливо равенство***

$$F_N^* K'_{1,N} F_N = \mathrm{diag}\left(\mu'_{1,0},\ \mu'_{1,1}, \ldots,\ \mu'_{1,N-1}\right),$$

где

$$\mu'_{1,n} = \begin{cases} b_0, & \text{если} \quad n = 0, \\ b_{-n} e^{i\frac{n\pi}{N}}, & \text{если} \quad n = 1,\ldots, M, \\ 0, & \text{если} \quad n = M+1,\ldots, M+M_0, \\ b_{N-n} e^{i\frac{(N+n)\pi}{N}}, & \text{если} \quad n = M+M_0+1,\ldots, 2M+M_0. \end{cases}, \qquad (11.13)$$

Доказательство леммы 11.2. По условию леммы $N \ge 2M+1$. Поэтому найдется такое $M_0 \ge 0$, что $N = 2M+1+M_0$.

Полагая

$$a'_{1,m} = \frac{1}{N} k_1\left(s_{1,N} - t_{m,N}\right), \quad m = 0,\dots,N-1,$$

$$\psi_{1,N}(w) = \sum_{m=0}^{N-1} a'_{1,m} w^m ,$$

согласно теореме 1.1.7), имеем

$$F_N^* K'_{1,N} F_N = \operatorname{diag}\Big(\psi_{1,N}(w_0),\ \psi_{1,N}(w_1), \dots ,\ \psi_{1,N}(w_{N-1})\Big).$$

Многочлен $\psi_{1,N}(w)$ связан с многочленом $\varphi_{1,N}(w)$, участвующим в доказательстве леммы 9.2, равенством

$$\psi_{1,N}(w_n) = \overline{w}_n \varphi_{1,N}(w_n), \qquad (n = 0,\dots,N-1).$$

Отсюда и из равенства (9.47) получим справедливость (11.13).

Лемма 11.2 доказана.

Введём обозначения

$$K'^{(-)}_{1,1} = \begin{bmatrix} b_{-1}\chi & & & & \\ & b_{-2}\chi^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{-(M-1)}\chi^{M-1} & \\ & & & & b_{-M}\chi^M \end{bmatrix}, \tag{11.14}$$

$$K'^{(-)}_{3,3} = \begin{bmatrix} b_M\overline{\chi}^M & & & & \\ & b_{M-1}\overline{\chi}^{M-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_2\overline{\chi}^2 & \\ & & & & b_1\overline{\chi} \end{bmatrix}, \tag{11.15}$$

где $\chi = e^{i\frac{\pi}{N}}$, а $K'^{(-)}_{2,2}$ – нулевая квадратная матрица порядка M_0.

Приведём в этих обозначениях блочное представление матрицы $F_N^* K'_{1,N} F_N$

$$F_N^* K'_{1,N} F_N = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K'^{(-)}_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K'^{(-)}_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K'^{(-)}_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для перциркулянтной матрицы $K'_{2,N}$.

Лемма 11.3. ***Для любого*** $N \ge 2M+1$***, где*** M ***– старшая степень тригонометрических полиномов*** **(1.8)*****, справедливо равенство***

$$F_N^* K'_{2,N} F_N = \mathrm{pd}\Big(\mu'_{2,0},\ \mu'_{2,1}, \dots ,\ \mu'_{2,N-1}\Big),$$

где

$$\mu'_{2,n} = \begin{cases} c_0, & \text{если} \quad n = 0, \\ c_{-n} e^{-in\gamma_N}, & \text{если} \quad n = 1, \dots, M, \\ 0, & \text{если} \quad n = M+1, \dots, M+M_0, \\ c_{N-n} e^{-i(N-n)\gamma_N}, & \text{если} \quad n = M+M_0+1, \dots, 2M+M_0. \end{cases}$$

Доказательство леммы 11.3 совпадает с доказательством леммы 9.3, так как для любого N справедливо тождество $K'_{2,N} \equiv K_{2,N}$.

Приведём блочное представление матрицы $F_N^* K'_{2,N} F_N$ **:**

$$F_N^* K'_{2,N} F_N = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K^{(+)}_{1,3} \\ 0 & 0 & K^{(+)}_{2,2} & 0 \\ 0 & K^{(+)}_{3,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$K_{1,3}'^{(+)} = \begin{bmatrix} & & & & c_{-1}\bar{\omega} \\ & & & c_{-2}\bar{\omega}^2 & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & c_{-M+1}\bar{\omega}^{M-1} & & & \\ c_{-M}\bar{\omega}^M & & & & \end{bmatrix}, \tag{11.16}$$

$$K_{3,1}'^{(+)} = \begin{bmatrix} & & & & c_M\omega^M \\ & & & c_{M-1}\omega^{M-1} & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & c_2\omega^2 & & & \\ c_1\omega & & & & \end{bmatrix}, \tag{11.17}$$

где $\omega = e^{i\gamma_N}$, а $K_{2,2}'^{(+)}$ – нулевая квадратная матрица порядка M_0.

Из доказанных лемм 11.1 – 11.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 11.1. ***Для любого*** $N \geq 2M+1$***, где*** M ***– старшая степень тригонометрических полиномов*** **(1.8)*****, справедливо равенство***

$$F_N^* A_N' F_N = \begin{bmatrix} b_0 + c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{1,1}' + K_{1,1}'^{(-)} & 0 & K_{1,3}'^{(+)} \\ 0 & 0 & \Lambda_{2,2}' & 0 \\ 0 & K_{3,1}'^{(+)} & 0 & \Lambda_{3,3}' + K_{3,3}'^{(-)} \end{bmatrix},$$

где b_0, c_0 ***– средние значения функций*** $k_1(t)$ ***и*** $k_2(t)$ ***из*** **(1.18),** $K_{1,1}'^{(-)}$, $K_{3,3}'^{(-)}$, $K_{1,3}'^{(+)}$ ***и*** $K_{3,1}'^{(+)}$ ***– определены в*** **(11.14), (11.15), (11.16)** ***и*** **(11.17)*****, соответственно, а***

$$\begin{cases} \Lambda_{1,1}' = \mathrm{diag}\left(\lambda_1', \ldots, \lambda_M'\right), \\ \Lambda_{2,2}' = \mathrm{diag}\left(\lambda_{M+1}', \ldots, \lambda_{M+M_0}'\right), \\ \Lambda_{3,3}' = \mathrm{diag}\left(\lambda_{M+M_0+1}', \ldots, \lambda_{M+M_0+M}'\right), \end{cases}$$

числа λ_m', $m = 1, \ldots, N-1$ ***– определены в*** **(11.12);** $N = 2M + M_0 + 1$**.**

12. РЕШЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

В предыдущем параграфе получен дискретный аналог сингулярного интегрального уравнения второго рода (1.2) как система линейных алгебраических уравнений (11.6). Система (11.6) состоит из $2N$ уравнений и содержит $2N$ неизвестных. Матрицей коэффициентов этой системы является

$$\mathbb{A}_N = \left[\begin{array}{c:c} aE_N & A_N \\ \hdashline A'_N & aE_N \end{array}\right],$$

где матрицы нейтрального типа A_N и A'_N определяются как суммы циркулянтных матриц T_N, $K_{1,N}$, T'_N, $K'_{1,N}$, первые строки которых приведены в (9.17), (9.18), (11.8), (11.9), и перциркулянтных матриц $K_{2,N}$, $K'_{2,N}$, первые строки которых приведены в (9.19), (11.9). Через E_N обозначена единичная матрица порядка N.

Используя матрицу Фурье F_N, систему (11.6) приводим к виду (11.7). Система (11.7) распадается на самостоятельные системы второго и четвертого порядка. Количество систем второго порядка равно $M_0 + 1$, где $N = 2M + M_0 + 1$. Этими системами являются

$$\begin{cases} a \cdot \left(y'_N\right)_0 + \left(b_0 + c_0\right)\left(y_N\right)_0 = \left(g_N\right)_0, \\ \left(b_0 + c_0\right)\left(y'_N\right)_0 + a \cdot \left(y_N\right)_0 = \left(g'_N\right)_0, \end{cases} \tag{12.1}$$

$$\begin{cases} a \cdot \left(y'_N\right)_n + \lambda_k \cdot \left(y_N\right)_n = \left(g_N\right)_n, \\ \lambda'_k \cdot \left(y'_N\right)_n + a \cdot \left(y_N\right)_n = \left(g'_N\right)_n, \end{cases} \tag{12.2}$$
$$n = M + 1, \ldots, M + M_0.$$

Количество систем четвертого порядка равно M и эти системы имеют вид

$$\begin{cases} a\cdot\left(y'_N\right)_n+\left(b_{-n}+i\right)\bar{\chi}^n\cdot\left(y_N\right)_n+c_{-n}\bar{\omega}^n\cdot\left(y_N\right)_{N-n}=\left(g_N\right)_n, \\ a\cdot\left(y'_N\right)_{N-n}+c_n\omega^n\cdot\left(y_N\right)_n+\left(b_n-i\right)\chi^n\cdot\left(y_N\right)_{N-n}=\left(g_N\right)_{N-n}, \\ \left(b_{-n}+i\right)\chi^n\cdot\left(y'_N\right)_n+c_{-n}\omega^n\cdot\left(y'_N\right)_{N-n}+a\cdot\left(y_N\right)_n=\left(g'_N\right)_n, \\ c_n\omega^n\cdot\left(y'_N\right)_n+\left(b_n-i\right)\bar{\chi}^n\cdot\left(y'_N\right)_{N-n}+a\cdot\left(y_N\right)_{N-n}=\left(g'_N\right)_{N-n}, \end{cases} \tag{12.3}$$

$$n=1,\ldots,M.$$

Характеристическими уравнениями матрицы коэффициентов этих систем и их собственными значениями являются:

$$(\lambda-a)^2-\left(b_0+c_0\right)^2=0,$$

$$\lambda_1=a+b_0+c_0, \tag{12.4}$$

$$\lambda_2=a-b_0-c_0, \tag{12.5}$$

(соответствуют системе (12.1));

$$(\lambda-a)^2+1=0,$$

$$\lambda_{1,2}=a\pm i,$$

(соответствуют системам (12.2) для всех $n=M+1,\ldots,M+M_0$);

$$(\lambda-a)^4-\left[\left(b_{-n}+i\right)^2+\left(b_n-i\right)^2+2c_{-n}c_n\right](\lambda-a)^2+$$

$$+\left[\left(b_{-n}+i\right)\left(b_n-i\right)-c_{-n}c_n\right]^2=0,$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(2a+b_{-n}+b_n\pm\sqrt{\left(b_{-n}-b_n+i2\right)^2+4c_{-n}c_n}\right), \tag{12.6}$$

$$\lambda_{3,4}=\frac{1}{2}\left(2a-b_{-n}-b_n\pm\sqrt{\left(b_{-n}-b_n+i2\right)^2+4c_{-n}c_n}\right), \tag{12.7}$$

(соответствуют системам (12.3) для всех $n=1,\ldots,M$).

Если сравнить эти собственные значения с собственными значениями оператора (6.8), то можно заметить, что (12.5) и (12.7) не являются собственными значениями этого оператора. Возникновение собственных значений (12.5) и (12.7) связано с тем, что при получении дополнительных уравнений (11.5) нами были заменены сетки $\{s;\, N\}$ и $\{t;\, N\}$ для переменных t и s. На самом деле это означало дискретизацию уравнения

$$ax(s)+(Ax)(s)=f(s), \qquad f(s)\in H^{\alpha}$$

вместо уравнения (11.1). Таким образом, система (11.6) соответствует системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} ax(t)+(Ax)(t)=f(t), \\ ax(s)+(Ax)(s)=f(s). \end{cases} \tag{12.8}$$

Собственные значения системы (12.3), не являющиеся собственными значениями оператора (6.8), являются собственными значениями дискретного аналога второго уравнения системы (12.8).

Замечание, приведенное выше, говорит о том, что при решении системы (11.6) мы дополнительно должны требовать нетривиальности собственных значений (12.5) и (12.7). Как уже было отмечено, это возникло из-за присоединения второго уравнения системы (12.8). Однако это негативное свойство компенсируется следующим позитивным свойством. Собственные значения матрицы систем (12.1) – (12.3) не зависят от N при $N \geq 2M+1$, где M – старшая степень многочленов (1.8). Отсюда следует, что если для некоторого $N_0 \geq 2M+1$ матрица $\mathbb{A}_{N_0}$ является обратимой, то для любого $N \geq 2M+1$ матрица $\mathbb{A}_N$ обратимая и имеет место соотношение

$$\left\|\mathbb{A}_N^{-1}\right\|=\left\|\mathbb{A}_{N_0}^{-1}\right\| \qquad \text{для любого} \qquad N \geq 2M+1.$$

Если числа (12.4) – (12.7) не равны нулю, то существует число $C>0$, такое, что для любого $N \geq 2M+1$ справедливо соотношение

$$\left\|\mathbb{A}_N^{-1}\right\|=C \qquad \text{для любого} \qquad N \geq 2M+1. \tag{12.9}$$

Введем обозначения:

$$F(t,\, s)=\begin{bmatrix} f(t) \\ f(s) \end{bmatrix}, \qquad F_N \equiv \Phi^{\{t;\, N\}}_{\{s;\, N\}} F = \begin{bmatrix} \Phi_{\{t;\, N\}} f \\ \Phi_{\{s;\, N\}} f \end{bmatrix},$$

$$X(t,\, s)=\begin{bmatrix} x(t) \\ x(s) \end{bmatrix}, \qquad X_N \equiv \Phi^{\{t;\, N\}}_{\{s;\, N\}} X = \begin{bmatrix} \Phi_{\{t;\, N\}} x \\ \Phi_{\{s;\, N\}} x \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{A}X = \begin{bmatrix} ax(t)+(Ax)(t) \\ ax(s)+(Ax)(s) \end{bmatrix}.$$

В этих обозначениях системы (12.8) и (11.6) записываются так:

$$\mathbb{A}X = F\,, \tag{12.10}$$

$$\mathbb{A}_N X_N = F_N\,. \tag{12.11}$$

Теорема 12.1. ***Для однозначной разрешимости уравнения* (12.10) *для любой функции* $f \in HL$ *необходимо и достаточно, чтобы числа* (12.4) – (12.7) *были ненулевыми.***

Доказательство теоремы 12.1 следует из теоремы 7.1.

Пусть $x \in H^{\alpha}$ и $f \in H^{\alpha}$ – произвольные функции. Тогда из (9.27), (11.10) и (11.11) вытекают оценки

$$\left| \left(\Phi^{\{t;\, N\}}_{\{s;\, N\}} (\mathbb{A}X) \right)_m - \left(\mathbb{A}_N \Phi^{\{s;\, N\}}_{\{t;\, N\}} X \right)_m \right| = O\left(N^{-\alpha} \ln N \right),$$

$$\left\| \Phi^{\{t;\, N\}}_{\{s;\, N\}} \mathbb{A} - \mathbb{A}_N \Phi^{\{s;\, N\}}_{\{t;\, N\}} \right\|_{L_{2,2N}} = O\left(N^{-\alpha} \ln N \right), \tag{12.12}$$

где $\left(Y_N \right)_m$ – обозначение m-й координаты вектора Y_N.

Теорема 12.2. ***Пусть числа* (12.4) – (12.7) *не равны нулю. Тогда для всех* $f \in H^{\alpha}$, *уравнение* (12.11) *имеет единственное решение***

$$X_N = \mathbb{A}_N^{-1} F_N$$

и справедлива оценка

$$\left\| \mathbb{A}_N^{-1} F_N - \Phi_{\{t;\, N\}}^{\{s;\, N\}} \mathbb{A}^{-1} F \right\|_{L_{2,2N}} = O\left(N^{-\alpha} \ln N \right), \tag{12.13}$$

Доказательство теоремы 12.2. Имеем

$$\mathbb{A}_N^{-1} F_N - \Phi_{\{t;\, N\}}^{\{s;\, N\}} \mathbb{A}^{-1} F = \mathbb{A}_N^{-1} \Phi_{\{s;\, N\}}^{\{t;\, N\}} F - \Phi_{\{t;\, N\}}^{\{s;\, N\}} \mathbb{A}^{-1} F =$$

$$= \mathbb{A}_N^{-1} \left(\Phi_{\{s;\, N\}}^{\{t;\, N\}} \mathbb{A} - \mathbb{A}_N \Phi_{\{t;\, N\}}^{\{s;\, N\}} \right) \mathbb{A}^{-1} F \,. \tag{12.14}$$

Переходя к нормам в (12.14), получим

$$\left\| \mathbb{A}_N^{-1} F_N - \Phi_{\{t;\, N\}}^{\{s;\, N\}} \mathbb{A}^{-1} F \right\|_{L_{2,2N}} \le$$

$$\le \left\| \mathbb{A}_N^{-1} \right\| \left\| \Phi_{\{s;\, N\}}^{\{t;\, N\}} \mathbb{A} - \mathbb{A}_N \Phi_{\{t;\, N\}}^{\{s;\, N\}} \right\| \left\| \mathbb{A}^{-1} F \right\|_{L_{2,2N}} . \tag{12.15}$$

Из (12.9), (12.12) и (12,15) вытекает справедливость оценки (12.13).

Теорема 12.2 доказана.

13. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ АБСТРАКТНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Решение дискретных уравнений, соответствующих сингулярным интегральным уравнениям Гильберта, основано на следующий прием, который продемонстрируем для общего нормально разрешимого операторного уравнения.

13.1. Обозначения и основные результаты. Пусть

$$A = B - K, \qquad A : H \to H \,, \tag{13.1}$$

A – линейный ограниченный оператор, B – линейный ограниченно обратимый оператор, K – линейный вполне непрерывный оператор, а H – гильбертово пространство.

Рассмотрим вопрос приближенного решения операторного уравнения

$$Ax = f\ , \tag{13.2}$$

где $f \in H$ заданный элемент с помощью семейства аппроксимирующих уравнений

$$A_n x_n = f_n, \qquad n \in \mathbb{N}\ . \tag{13.3}$$

Определим семейство аппроксимирующих уравнений (13.3). Пусть $H_n,\ n \in \mathbb{N}$ – гильбертовы пространства, а $\{\varphi_n\},\ \{\psi_n\},\ n \in \mathbb{N}$ – семейства равномерно ограниченных линейных операторов, таких, что

$$\varphi_n : H \to H_n, \qquad n \in \mathbb{N}\ , \tag{13.4}$$

$$\psi_n : H_n \to H, \qquad n \in \mathbb{N}\ . \tag{13.5}$$

В данном параграфе будем предполагать, что операторы спуска (13.4) и восполнения (13.5) удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi_n \psi_n y = y, \qquad \forall y \in H_n,\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ , \tag{13.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \psi_n \varphi_n x - x \right\| = 0, \qquad \forall x \in H\ , \tag{13.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \varphi_n x \right\| = \|x\|, \qquad \forall x \in H\ . \tag{13.8}$$

Отметим, что из представления (13.1) следует, что ядра оператора A и сопряженного оператора A^* конечномерные и их размерности совпадают [95]:

$$\dim\ker A = \dim\ker A^* = k\ , \tag{13.9}$$

где $k \ge 0$ – произвольное целое число.

Обозначения:

$e_1,\ldots,e_k$ – ортонормированный базис в $\ker A$;

$g_1,\ldots,g_k$ ортонормированный базис в $\ker A^*$;

$$A_n = \varphi_n A \psi_n, \qquad B_n = \varphi_n B \psi_n\ . \tag{13.10}$$

Будем предполагать, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\dim\ker A_n = \dim\ker A_n^* = k\ . \tag{13.11}$$

Заметим, что для сингулярных интегральных операторов Гильберта нейтрального типа и их дискретных операторов A и A_N, $aE + A$ и $A_N^{(a)}$, $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}_N$, из §§ 1, 9, 12 соотношения (13.9) и (13.11) выполняются.

Положим:

$$Gx = \sum_{m=1}^{k} \left(e_m,\, x\right) g_m\ , \tag{13.12}$$

$$G_n y = \sum_{m=1}^{k} \left(e_{n,m},\, y\right) g_{n,m}\ , \tag{13.13}$$

$$\overline{G}_n y = \sum_{m=1}^{k} \left(\overline{e}_{n,m},\, y\right) \overline{g}_{n,m}\ , \tag{13.14}$$

$$\overline{e}_{n,m} \in \ker A_n, \qquad \overline{g}_{n,m} \in \ker A_n^*, \tag{13.15}$$

$$e_{n,m} = \varphi_n e_m, \qquad g_{n,m} = \varphi_n g_m, \tag{13.16}$$

$$n \in \mathbb{N}, \qquad m = 1,\ldots,k\ .$$

Семейство $\{C_n\}$ линейных операторов $C_n : H_n \to H_n$ назовем устойчивым (псевдоустойчивым), если найдутся натуральное число n_0 и положительное – M такие, что при $n \ge n_0$ существуют обратные операторы C_n^{-1} (псевдообратные операторы C_n^+) и справедлива оценка

$$\left\|C_n^{-1}\right\| \le M, \qquad \left(\left\|C_n^{+}\right\| \le M\right) \qquad n \ge n_0\,.$$

Основными утверждениями этого параграфа являются следующие теоремы. Операторы A_n, B_n, G, G_n и элементы $e_{n,m}$, $g_{n,m}$, участвующие в формулировке теоремы 13.1, определены равенствами (13.10), (13.12), (13.13) и (13.16).

Теорема 13.1. ***Пусть семейство*** $\{\boldsymbol{B_n}\}$ ***является псевдоустойчивым и*** $\ker \boldsymbol{B_n} = \{0\}$. ***Тогда существуют ортонормированные базисы***

$$\bar{e}_{n,1},\ldots,\bar{e}_{n,k} \in \ker A_n,\quad \bar{g}_{n,1},\ldots,\bar{g}_{n,k} \in \ker A_n^*,\quad n \ge n_0 \tag{13.17}$$

такие, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\| e_{n,m} - \bar{e}_{n,m}\right\|_{H_n} = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\left\| g_{n,m} - \bar{g}_{n,m}\right\|_{H_n} = 0,\quad m = 1,\ldots,k\,, \tag{13.18}$$

и справедливы соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\left\| \varphi_n (A+G)^{-1} f - \left(A_n + G_n\right)^{-1} \varphi_n f\right\|_{H_n} = 0\,, \tag{13.19}$$

если $\boldsymbol{f \in H}$ ***;***

$$\lim_{n\to\infty}\left\| \varphi_n A^+ f - A_n^+ \varphi_n f\right\|_{H_n} = 0\,, \tag{13.20}$$

если $\boldsymbol{f \in R(A)}$***.***

Доказательство теоремы 13.1 приведено в п. 13.4.

Пусть вместо точных данных A_n, G_n, f_n известны их приближения $\tilde{A}_n, \tilde{G}_n, \tilde{f}_n$, удовлетворяющие условиям

$$\left\| A_n - \tilde{A}_n \right\| \le \eta_n, \qquad \eta_n \ge 0\,, \tag{13.21}$$

$$\left\| G_n - \tilde{G}_n \right\| \le \delta_n, \qquad \delta_n \ge 0\,, \tag{13.22}$$

$$\left\| f_n - \tilde{f}_n \right\|_{H_n} \le \varepsilon_n \left\| f_n \right\|_{H_n}, \qquad \varepsilon_n \ge 0\,, \tag{13.23}$$

где $\eta_n \ge 0,\ \delta_n \ge 0,\ \varepsilon_n \ge 0$ – уровни погрешности приближенных данных.

Теорема 13.2. ***Пусть линейные операторы*** $\tilde{A}_n, \tilde{G}_n : H_n \to H_n$ ***и элементы*** $\tilde{f}_n \in H_n$ ***удовлетворяют соотношениям*** **(13.21) - (13.23)** ***и имеют место неравенства***

$$\left\| \left(A_n + G_n \right)^{-1} \right\| = m_n \le m < \infty , \tag{13.24}$$

$$m_n \left(\eta_n + \delta_n \right) = q_n \le q < 1 . \tag{13.25}$$

Тогда справедлива оценка

$$\left\| \left(\tilde{A}_n + \tilde{G}_n \right)^{-1} \tilde{f}_n - \left(A_n + G_n \right)^{-1} f_n \right\|_{H_n} \le \frac{m\left(\varepsilon_n + q_n \right)}{1 - q} \left\| f_n \right\|_{H_n} \tag{13.26}$$

для всех $n \ge n_0$.

Доказательство теоремы 13.2 приведено в п. 13.5.

13.2. Вспомогательные утверждения. В данном пункте докажем некоторые леммы, использующиеся в доказательствах теорем 13.1 и 13.2.

Лемма 13.1. ***Оператор*** $A + G$, ***где оператор*** G ***определен равенством*** **(13.12)*****, является ограниченно обратимым.***

Доказательство леммы 13.1. Достаточно показать, что ядра оператора $A + G$ и сопряженного оператора $A^* + G^*$ состоят только из нулевого элемента. Тогда ограниченность обратного оператора $\left(A + G \right)^{-1}$ будет следовать из нормальной разрешимости оператора $A + G$.

Пусть для некоторого элемента $x_0 \in H$ выполнено соотношение

$$Ax_0 + Gx_0 = 0 . \tag{13.27}$$

Покажем, что $x_0 = 0$. Действительно, так как

$$Gx_0 = \sum_{m=1}^{k} \left(e_m, x_0 \right) g_m \in \ker A^*, \qquad Ax_0 \in R\left(A \right) \perp \ker A^*, \tag{13.28}$$

то из (13.27) следуют равенства

$$Ax_0 = 0, \qquad Gx_0 = 0 . \tag{13.29}$$

Из первого равенства (13.29) вытекает существование чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ таких, что

$$x_0 = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k . \tag{13.30}$$

Из второго равенства (13.29) и соотношений (13.28) вытекают равенства

$$\alpha_1 = \left(e_1, x_0\right) = 0, \ldots , \alpha_k = \left(e_k, x_0\right) = 0 . \tag{13.31}$$

Из (13.30) и (13.31) вытекает равенство $x_0 = 0$.

Соотношение $\ker\left(A^* + G^*\right) = \{0\}$ следует из теоремы С. М. Никольского [95]. Однако в справедливости этого равенства можно убедиться и непосредственно.

Нетрудно проверить справедливость равенства

$$G^* u = \sum_{m=1}^{k} \left(g_m, u\right) e_m . \tag{13.32}$$

Но тогда, как и выше, можно показать, что если $A^* u_0 + G^* u_0 = 0$, то $u_0 = 0$.

Лемма 13.1 доказана.

Наряду с (13.2) рассмотрим уравнение

$$Ax + Gx = f . \tag{13.33}$$

Справедлива

Лемма 13.2. ***Пусть*** $f \in R(A)$. ***Тогда нормальное решение уравнения*** **(13.2)** ***совпадает с единственным решением уравнения*** **(13.33):**

$$A^+ f = \left(A + G\right)^{-1} f . \tag{13.34}$$

Доказательство. Если x_0 – нормальное решение уравнения (13.2), то $x_0 \perp \ker A$, то есть $(e_m, x_0) = 0,\ m = 1,\ldots,k$ и, следовательно, $Gx_0 = 0$. Поэтому x_0 является решением уравнения (13.33), то есть справедливо равенство (13.34)

Пусть теперь x_0 – решение уравнения (13.33):

$$Ax_0 + Gx_0 = f \,. \tag{13.35}$$

Так как $Gx_0 \in \ker A^*$ и $Ax_0 \in R(A) \perp \ker A^*$, то из равенства (13.35) следуют соотношения

$$Ax_0 = f, \qquad Gx_0 = 0 \,. \tag{13.36}$$

Первое из равенств (13.36) означает, что x_0 является решением уравнения (13.2), а второе, что оно – нормальное решение этого уравнения.

Лемма 13.2 доказана.

Из определения операторов A_n и соотношения (13.7) вытекает справедливость равенства

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \varphi_n Ax - A_n \varphi_n x \right\|_{H_n} = 0, \qquad \forall x \in H \,. \tag{13.37}$$

Действительно, в силу (13.6) и (13.7), для всех $x \in H$ имеем

$$\left\| \varphi_n Ax - A_n \varphi_n x \right\|_{H_n} = \left\| \varphi_n A \right\| \left\| x - \psi_n \varphi_n x \right\|_H \to 0, \quad n \to \infty \,.$$

13.3. Устойчивость и псевдоустойчивость семейства операторов. В данном пункте нами будет использован следующий аналог теоремы Лакса для неоднозначно разрешимых уравнений [30]:

Теорема Лакса – Джумаева. ***Для псевдоустойчивости семейства линейных операторов*** $\{C_n\}$ ***:*** $C_n : H_n \to H_n$ ***необходимо и достаточно, чтобы для всех*** $x_n \perp \ker C_n$ ***из соотношения***

$$\left\| C_n x_n \right\|_{H_n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{13.38}$$

следовало:

$$\left\| x_n \right\|_{H_n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty . \tag{13.39}$$

Лемма 13.3. ***Пусть $\{B_n\}$ является псевдоустойчивым семейством и***

$$\ker B_n = \{0\}. \tag{13.40}$$

Тогда $\{A_n + G_n\}$ – устойчивое семейство, а $\{A_n\}$ – псевдоустойчивое.

Доказательство леммы 13.3. Так как $\{e_n\} \subset \ker A$ – ортонормированный базис, то из соотношения (13.8) – условия согласования норм, следуют

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \varphi_n e_m \right\|_{H_n} = \left\| e_m \right\|_H = 1 \quad \text{при} \quad m = 1,\dots,k, \tag{13.41}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \left(\varphi_n e_m, \varphi_n e_l \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\varphi_n^* \varphi_n e_m - e_m, e_l \right) = 0 \quad \text{при} \quad 1 \le m \ne l \le k . \tag{13.42}$$

Из (13.41) и (13.42) следует существование ортонормированных базисов (13.17), удовлетворяющих условиям (13.18).

Установим устойчивость семейства $\{A_n + G_n\}$. Предположим противное. Пусть семейство $\{A_n + G_n\}$ не является устойчивым. Тогда существует последовательность нормированных элементов x_n таких, что

$$\left\| \left(A_n + G_n \right) x_n \right\|_{H_n} \to 0, \qquad n \to \infty . \tag{13.43}$$

Из (13.18) следует справедливость соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left(G_n - \bar{G}_n \right) y \right\|_{H_n} = 0, \qquad \forall y \in H_n , \tag{13.44}$$

где оператор $\bar{G}_n$ определен в (13.14), (13.15). Тогда из (13.43) и (13.44) вытекает, что

$$\left\|\left(A_n+\bar{G}_n\right)x_n\right\|_{H_n} \le \left\|\left(A_n+G_n\right)x_n\right\|_{H_n} + \left\|\left(\bar{G}_n-G_n\right)x_n\right\|_{H_n}, \ n\to\infty .$$

Отсюда, в свою очередь, следуют соотношения

$$\left\|A_n x_n\right\|_{H_n} \to 0, \ \left(\bar{e}_{n,m}, x_n\right)\to 0, \ \ n\to\infty, \ m=1,\dots,k . \qquad (13.45)$$

Полагая

$$x_n = y_n + z_n; \qquad y_n\in \ker A_n, \ \ z_n \perp \ker A_n , \qquad (13.46)$$

из (13.45) и представления (13.46) получим справедливость предельных соотношений

$$\left\|A_n z_n\right\|_{H_n} \to 0, \ \left(\bar{e}_{n,m}, y_n\right)\to 0, \ \ n\to\infty, \ m=1,\dots,k . \qquad (13.47)$$

Так как элемент $y_n\in \ker A_n$, то существуют числа $\alpha_{n,1},\dots,\alpha_{n,k}$ такие, что $y_n=\alpha_{n,1}\bar{e}_{n,1}+\dots+\alpha_{n,k}\bar{e}_{n,k}$. Из (13.47) следует соотношение

$$\alpha_{n,m}=\left(\bar{e}_{n,m}, y_n\right)\to 0, \qquad n\to\infty . \qquad (13.48)$$

Таким образом, из представления элемента y_n и (13.48) вытекает соотношение $\left\|y_n\right\|_{H_n} \to 0, \ \ n\to\infty$ и, следовательно,

$$\left\|z_n\right\|_{H_n} \to 1, \qquad n\to\infty . \qquad (13.49)$$

Тогда последовательность элементов $\left\{\psi_n z_n\right\}$ ограничена. Используя полную непрерывность оператора K, без ограничения общности, можно допустить существование элемента $z_0\in H$ такого, что

$$K\psi_n z_n \to 0, \qquad n\to\infty . \qquad (13.50)$$

Из (13.47), (13.50) и соотношения (13.7) следует:

$$\left\| B_n \left(z_n - \varphi_n B^{-1} z_0 \right) \right\|_{H_n} \to 0, \qquad n \to \infty . \tag{13.51}$$

Поэтому из (13.51) в силу псевдоустойчивости семейства $\{B_n\}$ и равенства $\ker B_n = \{0\}$ будем иметь

$$\left\| z_n - \varphi_n B^{-1} z_0 \right\|_{H_n} \to 0, \qquad n \to \infty . \tag{13.52}$$

Далее получим

$$\left\| \varphi_n A B^{-1} z_0 \right\|_{H_n} \le \left\| A_n z_n \right\|_{H_n} + \left\| A_n \left(\varphi_n B^{-1} z_0 - z_n \right) \right\|_{H_n} +$$

$$+ \left\| \varphi_n A \right\| \left\| B^{-1} z_0 - \psi_n \varphi_n B^{-1} z_0 \right\|_H \to 0, \qquad n \to \infty . \tag{13.53}$$

Из соотношений (13.8) и (13.53), в свою очередь, следует равенство $AB^{-1} z_0 = 0$, то есть $B^{-1} z_0 \in \ker A$. Положим

$$B^{-1} z_0 = \sum_{m=1}^{k} \alpha_m e_m . \tag{13.54}$$

Применяя оператор φ_n к равенству (13.54), получим

$$\varphi_n B^{-1} z_0 = \sum_{m=1}^{k} \alpha_m e_{n,m}, \qquad n \in \mathbb{N} . \tag{13.55}$$

Из (13.18), (13.52) и (13.55) следует, что

$$\left\| z_n - \sum_{m=1}^{k} \alpha_m \bar{e}_{n,m} \right\|_{H_n} \to 0, \qquad n \to \infty . \tag{13.56}$$

Наконец, в силу включения $\sum_{m=1}^{k} \alpha_m \bar{e}_{n,m} \in \ker A_n$ и ортогональности $z_n \perp \ker A_n$, из (13.56) вытекает соотношение

$$\left\| z_n \right\|_{H_n} \to 0, \qquad n \to \infty . \tag{13.57}$$

Полученное соотношение (13.57) противоречит (13.49). Это противоречие устанавливает устойчивость семейства $\{A_n + G_n\}$. Одновременно нами установлена псевдоустойчивость семейства $\{A_n\}$.

Лемма 13.3 доказана.

Замечание. Условие (13.40) в формулировке леммы 13.3 является обязательным. Для следующего примера выполнены все условия леммы 13.3, кроме условия (13.40). Однако из псевдоустойчивости семейства $\{B_n\}$ не следует ни псевдоустойчивость семейства $\{A_n\}$, ни устойчивость семейства $\{A_n + G_n\}$.

Пример. В пространстве $H = l_2$ рассмотрим линейные операторы

$$B = \operatorname{diag}\left[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_m, \dots\right], \tag{13.58}$$

$$K = \operatorname{diag}\left[\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \dots, \mathfrak{K}_m, \dots\right], \tag{13.59}$$

где

$$\mathfrak{B}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad m = 1, 2, \dots, \tag{13.60}$$

$$\mathfrak{K}_m = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{m} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{m} \end{bmatrix}, \qquad m = 1, 2, \dots . \tag{13.61}$$

В качестве аппроксимирующих пространств H_n рассмотрим $(2n+1)$-мерные пространства Евклида $\mathbb{R}^{2n+1}$: $H_n = \mathbb{R}^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Определим операторы φ_n и ψ_n. Пусть

$$x = \left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\right)^{\mathrm{T}} \in l_2, \tag{13.62}$$

$$y = \left(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{2n+1}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{13.63}$$

Действие операторов φ_n и ψ_n на элементах (13.62) и (13.63) определим так:

$$\varphi_n x = \left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n+1}\right)^{\mathrm{T}} \in H_n, \tag{13.64}$$

$$\psi_n y = \left(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{2n+1}, 0, 0, \dots\right)^{\mathrm{T}} \in H, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{13.65}$$

Легко видеть, что операторы φ_n и ψ_n из (13.64) и (13.65) действуют по схеме $\varphi_n : H \to H_n$, $\psi_n : H_n \to H$ и удовлетворяют условиям (13.6) – (13.8).

Аппроксимирующие операторы A_n и B_n для операторов (13.58) – (13.61) имеют вид:

$$A_n = \operatorname{diag}\left[\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n, \frac{1}{n+1}\right], \quad \mathfrak{A}_m = \mathfrak{B}_m - \mathfrak{K}_m, \tag{13.66}$$

$$B_n = \operatorname{diag}\left[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n, 0\right]. \tag{13.67}$$

Из (13.60), (13.66) и (13.67) получаем, что

$$B_n^+ = B_n, \tag{13.68}$$

$$A_n^+ = \operatorname{diag}\left[\mathfrak{A}_1^+, \mathfrak{A}_2^{-1}, \dots, \mathfrak{A}_n^{-1}, n+1\right], \tag{13.69}$$

$$\mathfrak{A}_1^+ = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix}, \tag{13.70}$$

$$\mathfrak{A}_m^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{m}{m^2-1} & \dfrac{m^2}{m^2-1} \\ \dfrac{m^2}{m^2-1} & -\dfrac{m}{m^2-1} \end{bmatrix}, \qquad m = 2, \dots n. \tag{13.71}$$

следовательно, из (13.68) получаем равенство $\left\|B_n^+\right\| = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то есть семейство $\left\{B_n\right\}$ псевдоустойчивое, а из (13.69) – (13.71) получаем неравенство $\left\|A_n^+\right\| = n+1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то есть семейство $\left\{A_n\right\}$ не псевдоустойчивое.

Следующая лемма в некотором смысле является обратной к лемме 13.3.

Лемма 13.4. ***Пусть последовательность операторов $\left\{\varphi_n^* \varphi_n\right\}$ сходится сильно к некоторому оператору Φ. Тогда из псевдоустойчивости семейства $\left\{A_n\right\}$ следует псевдоустойчивость семейства $\left\{B_n\right\}$.***

Доказательство леммы 13.4. Сначала покажем справедливость равенства $\Phi = E$, где $E : H \to H$ – единичный оператор.

Действительно, из сильной сходимости последовательности $\left\{\varphi_n^* \varphi_n\right\}$ к оператору Φ (условие леммы), для любого $x \in H$, имеем

$$\left(\varphi_n^* \varphi_n x,\, x\right) \to \left(\Phi x,\, x\right), \qquad n \to \infty . \tag{13.72}$$

С другой стороны, из условия (13.8), для любого $x \in H$ имеем

$$\left(\varphi_n^* \varphi_n x,\, x\right) \to \left(x,\, x\right), \qquad n \to \infty . \tag{13.73}$$

Из (13.72), (13.73) и единственности предела получим справедливость равенств

$$\left(\Phi x,\, x\right) = \left(x,\, x\right) \quad \text{и} \quad \Phi^* = \Phi . \tag{13.74}$$

Из соотношений (13.73), (13.74) и утверждения [6, с. 121] следует равенство $\Phi = E$.

Установим псевдоустойчивость семейства $\left\{B_n\right\}$. Предположим противное. Пусть семейство $\left\{B_n\right\}$.не является псевдоустойчивым. Тогда найдется последовательность нормированных элементов $\left\{x_n\right\}$ таких, что

$$x_n \perp \ker B_n \qquad \text{и} \qquad \left\|B_n x_n\right\|_{H_n} \to 0, \quad n \to \infty .$$

В силу полной непрерывности оператора K, без ограничения общности, можно считать, что

$$K\psi_n x_n \to x_0 \in H, \qquad n\to\infty. \tag{13.75}$$

Тогда из (13.75) имеем

$$\left\|\varphi_n\left(A\psi_n x_n + x_0\right)\right\|_{H_n} \to 0, \qquad n\to\infty. \tag{13.76}$$

Так как последовательность $\left\{\varphi_n^*\varphi_n\right\}$ сходится сильно к единичному оператору, то для всех $x\in H$ будем иметь

$$\left(x, A\psi_n x_n + x_0\right) = \left(\varphi_n x, \varphi_n\left(A\psi_n x_n + x_0\right)\right) +$$

$$+\left(x - \varphi_n^*\varphi_n x, A\psi_n x_n + x_0\right) \to 0, \qquad n\to\infty. \tag{13.77}$$

Следовательно, из (13.77) следует слабая сходимость последовательности $\left\{A\psi_n x_n + x_0\right\}$ к нулю при $n\to\infty$. Отсюда получаем принадлежность элемента x_0 слабому замыканию образа оператора A. Но по условию образ оператора A является замкнутым и выпуклым множеством. Поэтому он совпадает со своим замыканием.

Таким образом, элемент x_0 принадлежит образу оператора A. Далее имеем

$$\left\|\varphi_n x_0 - \varphi_n A\psi_n \varphi_n A^+ \psi_n \varphi_n x_0\right\|_{H_n} \to 0, \qquad n\to\infty. \tag{13.78}$$

Из (13.76) и (13.78) вытекает, что

$$\left\|A_n\left(x_n + \varphi_n A^+ x_0\right)\right\|_{H_n} \to 0, \qquad n\to\infty. \tag{13.79}$$

Используя псевдоустойчивость семейства $\left\{A_n\right\}$, из теоремы Лакса – Джумаева и соотношений (13.38), (13.39), (13.79), получим

$$\left\|x_n + \varphi_n A^+ x_0 + y_n\right\|_{H_n} \to 0, \qquad n\to\infty, \tag{13.80}$$

где

$$y_n \in \ker A_n, \quad x_n + \varphi_n A^+ x_0 + y_n \perp \ker A_n. \tag{13.81}$$

Заметим, что из нормированности последовательности $\{x_n\}$ и равномерной ограниченности последовательности операторов $\{\varphi_n\}$ из (13.80) вытекает ограниченность последовательности $\{y_n\}$. Положим

$$y_n = \alpha_{n,1}\overline{e}_{n,1} + \alpha_{n,2}\overline{e}_{n,2} + \ldots + \alpha_{n,k}\overline{e}_{n,k}. \tag{13.82}$$

Тогда

$$\left|\alpha_{n,m}\right| \le \alpha \equiv \text{const} < \infty, \qquad m = 1,\ldots,k, \quad n \to \infty. \tag{13.83}$$

Из (13.83), без ограничения общности, можно считать, что

$$\alpha_{n,m} \to \alpha_m \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad m = 1,\ldots,k. \tag{13.84}$$

Положим

$$y_0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_k e_k. \tag{13.85}$$

Тогда из (13.81), (13.82), (13.84) и (13.85) следует

$$\left\|\varphi_n y_0 - y_n\right\|_{H_n} \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{13.86}$$

Из (13.80) и (13.86) вытекает соотношение

$$\left\|x_n + \varphi_n\left(A^+ x_0 + y_0\right)\right\|_{H_n} \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{13.87}$$

Из соотношения $\left\|B_n x_n\right\|_{H_n} \to 0$ при $n \to \infty$ и условия (13.8) будем иметь $B\left(A^+ x_0 + y_0\right) = 0$. Но оператор ограниченно обратимый, поэтому $A^+ x_0 + y_0 = 0$. Отсюда для всех $n \in \mathbb{N}$ следует $\varphi_n\left(A^+ x_0 + y_0\right) = 0$. Тогда из соотношения (13.87) получаем, что $\left\|x_n\right\|_{H_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Это противоречит нормированности элементов x_n.

Лемма 13.4 доказана.

13.4. Доказательство теоремы 13.1. Существование ортонормированных базисов

$$\overline{e}_{n,1}, \overline{e}_{n,2}, \dots, \overline{e}_{n,k} \in \ker A_n, \qquad \overline{g}_{n,1}, \overline{g}_{n,2}, \dots, \overline{g}_{n,k} \in \ker A_n^*$$

нами установлено в доказательстве леммы 13.3. Покажем справедливость соотношения (13.19). Так как

$$\left\| \varphi_n x_f - \left(A_n + G_n\right)^{-1} \varphi_n f \right\|_{H_n} \le$$

$$\le \left\| \left(A_n + G_n\right)^{-1} \right\| \left\| \left(A_n + G_n\right) \varphi_n x_f - \varphi_n \left(A_n + G_n\right) x_f \right\|_{H_n},$$

где $x_f = \left(A_n + G_n\right)^{-1} f$, то в силу (13.37), достаточно показать справедливость соотношения

$$\left\| \left(G_n \varphi_n - \varphi_n G\right) x_f \right\|_{H_n} \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{13.88}$$

Имеем

$$\left(G_n \varphi_n - \varphi_n G\right) x_f = \sum_{m=1}^{k} \left(\varphi_n^* \varphi_n e_m - e_m, x_f \right) g_{n,m}. \tag{13.89}$$

В силу условия (13.8) последовательность операторов $\left\{ \varphi_n^* \varphi_n \right\}$ слабо сходится к единичному оператору. Поэтому из (13.89) следует справедливость (13.88). Соотношение (13.19) доказано.

Справедливость (13.20) следует из (13.19) и леммы 13.2.

Теорема 13.1 доказана.

13.5. Доказательство теоремы 13.2. Покажем обратимость оператора $\tilde{A}_n + \tilde{G}_n$ и справедливость оценки

$$\left\| \left(\tilde{A}_n + \tilde{G}_n \right)^{-1} \right\|_{H_n} \le \frac{m}{1-q}. \tag{13.90}$$

Для компактности записи введем обозначения:

$$D_n = A_n + G_n, \qquad \tilde{D}_n = \tilde{A}_n + \tilde{G}_n. \tag{13.91}$$

Имеем

$$\tilde{D}_n = \left[E_n - \left(D_n - \tilde{D}_n \right) D_n^{-1} \right] D_n , \qquad (13.92)$$

где E_n – единичный оператор в H_n. Из обозначений (13.91) и неравенств (13.24), (13.25) получим

$$\left\| \left(D_n - \tilde{D}_n \right) D_n^{-1} \right\| \le \left\| D_n - \tilde{D}_n \right\| \left\| D_n^{-1} \right\| \le \left(\eta_n + \delta_n \right) m_n \le q < 1 , \qquad (13.93)$$

где $m_n = \left\| \left(A_n + G_n \right)^{-1} \right\|$. Тогда из (13.93) следует обратимость оператора $E_n - \left(D_n - \tilde{D}_n \right) D_n^{-1}$ и справедливость оценки [42]

$$\left\| \left[E_n - \left(D_n - \tilde{D}_n \right) D_n^{-1} \right]^{-1} \right\| \le \frac{1}{1-q} . \qquad (13.94)$$

Из равенства (13.92) и оценки (13.94) следует обратимость оператора $\tilde{D}_n$ и справедливость соотношения (13.90).

Имеем следующее очевидное неравенство

$$\left\| \tilde{D}_n^{-1} \tilde{f}_n - D_n^{-1} f_n \right\| \le \left\| \tilde{D}_n^{-1} \right\| \left\| \tilde{f}_n - f_n \right\| + \left\| \tilde{D}_n^{-1} - D_n^{-1} \right\| \left\| f_n \right\| . \qquad (13.95)$$

Оценим $\left\| \tilde{D}_n^{-1} - D_n^{-1} \right\|$. Так как

$$\tilde{D}_n^{-1} - D_n^{-1} = \tilde{D}_n^{-1} \left(D_n - \tilde{D}_n \right) D_n^{-1} ,$$

то в силу (13.90) справедлива оценка

$$\left\| \tilde{D}_n^{-1} - D_n^{-1} \right\| \le \frac{mq}{1-q} .$$

Отсюда и из (13.95) следует оценка (13.26).

Теорема 13.2 доказана.

ГЛАВА 4

§ 1. Регуляризация сдвигом в регулярном случае

В данной главе приложим метод регуляризации сдвигом для нахождения периодических решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \qquad 0 \le t \le 2\pi, \tag{1.1}$$

где A – постоянная квадратная матрица порядка N, $f(t) \in \overline{C}_N$ – заданная вектор-функция, $\overline{C}_N = \overline{C}_N[0, 2\pi]$ – пространство непрерывных 2π-периодических вектор-функций.

Изучим задачу нахождения непрерывного 2π-периодического решения системы линейных дифференциальных уравнений (1.1) в так называемых регулярном и резонансном случаях.

Данную задачу назовем **регулярной,** если у матрицы A не имеются целые чисто мнимые собственные значения, то есть для любых целых k выполняется условие

$$\det(A - ikE) \ne 0, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

Если же у матрицы A имеется хотя бы одно целое чисто мнимое собственное значение, то данную задачу назовем **резонансной.**

Наряду с системой (1.1) рассмотрим регуляризованную сдвигом систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = (A + \alpha B)x + f(t), \qquad 0 \le t \le 2\pi, \tag{1.3}$$

где B – постоянная квадратная матрица порядка N, а α – произвольное комплексное число – **параметр регуляризации**.

Изучим задачу нахождения 2π-периодического решения $x(t)$ уравнения (1.1).

Общее решение уравнения (1.1) представляется формулой

$$x(t) = e^{pt}C + e^{pt}\int_0^t e^{-ps} f(s)\,ds,$$

где C – произвольная постоянная.

В следующем утверждении приводится критерий однозначной разрешимости системы (1.1) для любой вектор-функции $f(t) \in \overline{C}_N$.

Теорема [28]. ***Для однозначной разрешимости системы* (1.1) *в пространстве* $\overline{C}_N$ *для любой вектор-функции* $f(t) \in \overline{C}_N$ *необходимо и достаточно отсутствие целых чисто мнимых собственных значений у матрицы* A. *При этом единственное решение системы* (1.1) *представляется формулой***

$$x_0(t) = e^{tA}\left(E - e^{2\pi A}\right)^{-1}\left(\int_t^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} f(s)\,ds + \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds\right). \quad (1.4)$$

Действительно, пусть система (1.1) для каждой функции $f(t) \in \overline{C}_N$ имеет единственное 2π-периодическое решение $x(t)$. Покажем отсутствие целых чисто мнимых собственных значений у матрицы A.

Общим решением системы (1.1) является

$$x(t) = e^{tA}C + e^{tA}\int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds, \quad (1.5)$$

где C – произвольный постоянный вектор. Условие 2π-периодичности решения записывается соотношением

$$\left(E - e^{2\pi A}\right)x(0) = e^{2\pi A}\int_0^{2\pi} e^{-sA} f(s)\,ds. \quad (1.6)$$

Каждое начальное значение $x(0)$, удовлетворяющее условию (1.6), определяет одно искомое решение $x(t) \in \overline{C}_N$ системы (1.1).

Заметим, если λ является собственным значением матрицы A, то число $1 - e^{2\pi\lambda}$ является собственным значением матрицы $E - e^{2\pi A}$.

Если предполагать существование целого чисто мнимого собственного значения $(\lambda = ik,\ k \in \mathbb{Z})$ у матрицы A, то 1 является собственным значением матрицы $e^{2\pi A}$. Тогда соотношение (1.6), как система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестной вектор-функции $x(0)$, либо несовместно, либо имеет бесчисленно много решений. Оба вывода противоречат существованию и единственности непрерывного 2π-периодического решения системы (1.1). Поэтому у матрицы A не существует целое чисто мнимое собственное значение. Необходимость доказана.

Если у матрицы A отсутствуют целые чисто мнимые собственные значения, то 1 не является собственным значением матрицы $e^{2\pi A}$. Тогда система линейных алгебраических уравнений (1.6) имеет единственное решение для каждой непрерывной 2π-периодической вектор-функции $f(t)$. Отсюда следует единственность 2π-периодического решения системы (1.1). Достаточность доказана.

Ниже займемся изучением регулярной задачи, то есть когда имеет место условие (1.2).

Покажем, что однозначная разрешимость системы (1.3) эквивалентна отсутствию целых чисто мнимых собственных значений у матрицы A.

Пусть система (1.3) однозначно разрешима для любой матрицы B. Тогда, полагая $B=0$, получим однозначную разрешимость системы (1.1) для любого свободного члена $f(t)\in \overline{C}_N$. Тогда из теоремы 2.1 вытекает отсутствие целых чисто мнимых собственных значений у матрицы A.

Пусть у матрицы A не имеются целые чисто мнимые собственные значения. Аналогично (1.5) записывается общее решение системы (1.3):

$$x_\alpha(t)=e^{t(A+\alpha B)}C+e^{t(A+\alpha B)}\int_0^t e^{-s(A+\alpha B)}f(s)ds\,. \tag{1.7}$$

Для определения начального значения получаем соотношение

$$\left(E-e^{2\pi(A+\alpha B)}\right)x(0)=e^{2\pi(A+\alpha B)}\int_0^{2\pi} e^{-s(A+\alpha B)}f(s)ds\,. \tag{1.8}$$

Покажем, что для любой матрицы B существует число $\rho_0>0$ такое, что для всех $\alpha:\ 0<|\alpha|<\rho_0$ выполняется условие

$$\det\left(E-e^{2\pi(A+\alpha B)}\right)\neq 0\,. \tag{1.9}$$

Соотношение (1.9) эквивалентно условию

$$\det\left(A+\alpha B-ikE\right)\neq 0, \qquad \forall k\in\mathbb{Z}.$$

Так как $\det\left(A-ikE\right)\neq 0$ для всех $k\in\mathbb{Z}$, то для достаточно малых $\alpha: 0<|\alpha|<\rho_0$ имеем

$$A+\alpha B-ikE=\left(A-ikE\right)\left(E+\alpha\left(A-ikE\right)^{-1}B\right).$$

Пусть $\rho_0>0$ удовлетворяет условию

$$\rho_0\left\|\left(A-ikE\right)^{-1}B\right\|<1, \qquad \forall k\in\mathbb{Z}. \tag{1.10}$$

Тогда для всех

$$\alpha: 0<|\alpha|<\rho_0 \tag{1.11}$$

матрица $A+\alpha B-ikE$ является обратимой для любого $k\in\mathbb{Z}$ и поэтому имеет место (2.7). Следовательно, нулевое значение $x(0)$ определяется из соотношения (1.8) однозначно. Отсюда, в свою очередь, получим существование и единственность 2π -периодического решения системы (1.3).

Покажем теперь справедливость оценки

$$\left\|x_\alpha-x_0\right\|\leq|\alpha|M, \tag{1.12}$$

где решения x_0 и x_α определены в (1.4) и (1.7), а $M>0$ – некоторая постоянная, не зависящаяся от α.

Действительно, из того, что матрица A не имеет целых чисто мнимых собственных значений, то и система (1.1) и система (1.3) при достаточно малых $|\alpha|>0$ однозначно разрешимы. Единственными 2π-периодическими решениями этих систем, соответственно, являются (1.4) и (1.7). В равенстве (1.7) предполагается, что параметр α и число ρ_0 удовлетворяют условия (1.10) и (1.11).

Прежде чем приступить к оценке (1.12), решения $x_0(t)$ и $x_\alpha(t)$ запишем в виде

$$x_0(t) = (a1)(a2)\left[(a3)+(a4)\right], \quad x_\alpha(t) = (b1)(b2)\left[(b3)+(b4)\right],$$

где

$$(a1) = e^{tA}, \quad (b1) = e^{t(A+\alpha B)},$$

$$(a2) = \left(E - e^{2\pi A}\right)^{-1}, \quad (b2) = \left(E - e^{2\pi(A+\alpha B)}\right)^{-1},$$

$$(a3) = \int_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} f(s)\,ds, \quad (b3) = \int_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)(A+\alpha B)} f(s)\,ds,$$

$$(a4) = \int_0^{t} e^{-sA} f(s)\,ds, \quad (b4) = \int_0^{t} e^{-s(A+\alpha B)} f(s)\,ds,$$

Используя введенные обозначения, представим разность $x_\alpha(t) - x_0(t)$ в виде:

$$\begin{aligned}
x_\alpha(t) - x_0(t) &= \left[(b1)-(a1)\right](a2)\left[(a3)+(a4)\right]+ \\
&+(a1)\left[(b2)-(a2)\right]\left[(a3)+(a4)\right]+ \\
&+(a1)(a2)\left\{\left[(b3)-(a3)\right]+\left[(b4)-(a4)\right]\right\}+ \\
&+\left[(b1)-(a1)\right]\left[(b2)-(a2)\right]\left[(a3)+(a4)\right]+ \\
&+\left[(b1)-(a1)\right](a2)\left\{\left[(b3)-(a3)\right]+\left[(b4)-(a4)\right]\right\}+ \\
&+(a1)\left[(b2)-(a2)\right]\left\{\left[(b3)-(a3)\right]+\left[(b4)-(a4)\right]\right\}+ \\
&+\left[(b1)-(a1)\right]\left[(b2)-(a2)\right]\left\{\left[(b3)-(a3)\right]+\left[(b4)-(a4)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Из условий (1.10), (1.11) и определения экспоненты от матрицы вытекают оценки

$$\begin{cases} \|(b1)-(a1)\| \le M_1|\alpha|, \quad \|(b2)-(a2)\| \le M_2|\alpha|, \\ \|(b3)-(a3)\| \le M_3|\alpha|, \quad \|(b4)-(a4)\| \le M_3|\alpha|, \end{cases}$$

где

$$M_1 = 4\pi\|B\|e^{2\pi\|A\|}, \quad M_2 = m_1 m_2 M_1, \quad M_3 = 2\pi M_1 \|f\|_{\bar{C}_N},$$

$$m_1 = \left\|\left(E - e^{2\pi A}\right)^{-1}\right\|, \quad m_2 = \sup_{0<|\alpha|<\rho_0} \left\|\left(E - e^{2\pi(A+\alpha B)}\right)^{-1}\right\|,$$

$$\|f\|_{\bar{C}_N} = \max_{1\le k\le N}\|f_k\|_C, \ \|f_k\|_C = \max_{0\le t\le 2\pi}|f_k(t)|.$$

Таким образом, нами доказаны следующие теоремы:

Теорема 1.1. ***Для того чтобы регуляризованная система* (1.3) *для произвольной матрицы* B, *правой части* $f(t)\in \bar{C}_N$ *и параметра регуляризации, удовлетворяющей условию* (1.11), *имела единственное решение в пространстве* $\bar{C}_N$, *необходимо и достаточно отсутствие целых чисто мнимых собственных значений у матрицы* A.**

Теорема 1.2. ***Пусть матрица* A *не имеет целых чисто мнимых собственных значений. Тогда единственное* 2π *-периодическое решение регуляризованной системы сходится при* $\alpha \to 0$ *к единственному* 2π *-периодическому решению исходной системы, и справедлива оценка***

$$\|x_\alpha - x_0\| \le (\beta_1 + \gamma_1|\alpha|)(\beta_2 + \gamma_2|\alpha|)(\beta_3 + \gamma_3|\alpha|) - \beta_1\beta_2\beta_3,$$

где

$$\begin{cases} \beta_1 = \max_{0\le t\le 2\pi}\|(a1)\|, \quad \gamma_1 = M_1, \\ \beta_2 = \max_{0\le t\le 2\pi}\|(a2)\|, \quad \gamma_2 = M_2, \\ \beta_3 = 4\pi\beta_1\|f\|_{\bar{C}_N}, \quad \gamma_3 = 2M_3. \end{cases}$$

2. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СКАЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В предыдущем параграфе рассмотрен регулярный случай. В трёх последующих параграфах будем рассматривать и регулярный случай, и резонансный. Будет предложен метод выбора матрицы B, по которой осуществляется сдвиг. Собственные значения любой матрицы можно разбить на три части:

1) собственные значения, алгебраическая кратность которых равна единице;

2) собственные значения, у которых алгебраическая и геометрическая кратности совпадают и больше единицы;

3) собственные значения, у которых алгебраическая кратность больше единицы, а геометрическая кратность равна единице.

Согласно этому замечанию, достаточно рассматривать в качестве матрицы A только жордановы блоки. В настоящем параграфе будем рассматривать случай 1). Случаи 2) и 3) рассматриваются в § 3 и § 4, соответственно.

Полезным в изучении периодической задачи для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами является рассмотрение аналогичной задачи для наиболее простых случаев.

Рассмотрим скалярное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = px + f(t), \qquad 0 \le t \le 2\pi, \tag{2.1}$$

где $p = \mathrm{const}$, а $f(t)$ – заданная непрерывная 2π-периодическая функция

$$f(2\pi) = f(0). \tag{2.2}$$

Рассмотрим задачу нахождения 2π-периодического решения $x(t)$ уравнения (2.1) для заданной 2π-периодической функции (2.2):

$$x(2\pi) = x(0). \tag{2.3}$$

Общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$x(t) = Ce^{pt} + e^{pt}\int_0^t e^{-ps} f(s)\,ds, \tag{2.4}$$

где C – произвольная постоянная.

Для того чтобы решение (2.4) являлось 2π -периодической функцией, необходимо и достаточно, чтобы постоянная C удовлетворяла условию

$$\left(1-e^{2\pi p}\right)C=e^{2\pi p}\int_0^{2\pi} e^{-ps}f(s)ds\,. \tag{2.5}$$

Действительно, если $x(t)$ является 2π -периодической функцией, то полагая в (2.4) $t=0$ и $t=2\pi$, затем учитывая условие периодичности (2.3), получим справедливость равенства (2.5).

Обратно, пусть имеет место условие (2.5). Тогда из (2.4) вытекает, что

$$x(0)-x(2\pi)=\left(1-e^{2\pi p}\right)C-e^{2\pi p}\int_0^{2\pi} e^{-ps}f(s)ds=0\,.$$

Полученное равенство означает выполнение равенства (2.3). Следовательно, $x(t)$ – 2π -периодическая функция.

Если $1-e^{2\pi p}\neq 0$, то соотношению (2.5) удовлетворяет только одно значение C:

$$C=\frac{e^{2\pi p}}{1-e^{2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-ps}f(s)ds=0$$

и единственным 2π -периодическим решением уравнения (2.1) является

$$x_0(t)=\frac{e^{p(t+2\pi)}}{1-e^{2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-ps}f(s)ds+e^{pt}\int_0^{t} e^{-ps}f(s)ds\,. \tag{2.6}$$

Если $1-e^{2\pi p}=0$, то необходимым и достаточным условием выполнения условия (2.5) является равенство

$$\int_0^{2\pi} e^{-ps}f(s)ds=0\,. \tag{2.7}$$

При выполнении условия (2.7) дифференциальное уравнение (2.1) имеет бесчисленно много 2π -периодических решений и все решения определяются формулой (2.4), где C – произвольная постоянная.

Отметим, что неравенство $1-e^{2\pi p}\neq 0$ эквивалентно условию

$$p\neq ik,\qquad \forall k\in\mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

а равенство $1-e^{2\pi p}=0$ эквивалентно существованию $k\in\mathbb{Z}$, для которого $p=ik$:

$$p=ik,\qquad \exists k\in\mathbb{Z}. \tag{2.9}$$

Таким образом, 2π-периодическое решение уравнения (2.1) является единственным, если имеет место условие (2.8), и бесчисленное множество, если имеет место равенство (2.9).

Наряду с уравнением (2.1) рассмотрим регуляризованное сдвигом уравнение

$$\frac{dx}{dt}=(p+\alpha)x+f(t), \tag{2.10}$$

где $\alpha\neq 0$ – произвольное комплексное число, называемое **параметром регуляризации.**

Очевидно, что для любого числа p найдется число $\rho(p)>0$ такое, что при всех α, удовлетворяющих условию

$$\alpha:\ 0<|\alpha|<\rho(p), \tag{2.11}$$

выполняется неравенство

$$p+\alpha\neq ik,\qquad \forall k\in\mathbb{Z}. \tag{2.12}$$

Условие (2.12) является аналогом условия (2.8) для единственности 2π-периодического решения уравнения (2.1).

Пусть параметр регуляризации удовлетворяет условию (2.11). Тогда уравнение (2.10) имеет единственное 2π-периодическое решение

$$x_\alpha(t)=\frac{e^{(p+\alpha)(t+2\pi)}}{1-e^{2\pi(p+\alpha)}}\int_0^{2\pi}e^{-(p+\alpha)s}f(s)\,ds+$$

$$+e^{(p+\alpha)t}\int_0^{t}e^{-(p+\alpha)s}f(s)\,ds. \tag{2.13}$$

Исследуем вопрос существования при $\alpha \to 0$ предела функции $x_\alpha(t)$ при каждой из ситуаций (2.8) и (2.9).

Пусть имеет место условие (2.8). Тогда решение (2.13) является непрерывной функцией от переменной α в точке $\alpha = 0$ и, следовательно,

$$\left\| x_\alpha - x_0 \right\| \to 0, \qquad \alpha \to 0,$$

где функция $x_0(t)$ определена равенством (2.6) и является единственным 2π-периодическим решением уравнения (2.1).

Пусть имеет место условие (2.9) для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Так как исследуется 2π-периодическая задача, связанная с уравнением (2.1), то естественным является выполнение условия (2.7). Положив

$$x_{00}(t) = \frac{e^{pt}}{2\pi} \int_0^{2\pi} s e^{-ps} f(s)\,ds + e^{pt} \int_0^t e^{-ps} f(s)\,ds, \tag{2.14}$$

покажем справедливость предельного соотношения

$$\left\| x_\alpha - x_{00} \right\| \to 0, \qquad \alpha \to 0. \tag{2.15}$$

Действительно, из (2.9) вытекает равенство $e^{2\pi p} = 1$. Поэтому при $\alpha \to 0$ имеем

$$x_\alpha(t) = e^{(p+\alpha)t} \frac{2\pi\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s e^{-ps} \frac{e^{-s\alpha} - 1}{-s\alpha} f(s)\,ds +$$

$$+ e^{(p+\alpha)t} \int_0^t e^{-(p+\alpha)s} f(s)\,ds. \tag{2.16}$$

Из представлений (2.16) и (2.14) вытекает справедливость предельного соотношения (2.15).

Покажем, что функция $x_{00}(t)$ является 2π-периодическим решением уравнения (2.1).

Действительно, в силу равенства (2.7), имеем

$$x_{00}(2\pi)=\frac{e^{2\pi p}}{2\pi}\int_0^{2\pi} se^{-ps}f(s)ds+e^{2\pi p}\int_0^{2\pi} e^{-ps}f(s)ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} se^{-ps}f(s)ds=x_{00}(0).$$

Полученное равенство доказывает 2π-периодичность функции $x_{00}(t)$. Покажем, что $x_{00}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1):

$$x_{00}'(t)=p\frac{e^{pt}}{2\pi}\int_0^{2\pi} se^{-ps}f(s)ds+pe^{pt}\int_0^{t} e^{-ps}f(s)ds+$$

$$+e^{pt}\cdot e^{-pt}f(t)=px_{00}'(t)+f(t).$$

Таким образом, справедливо предельное соотношение (в смысле равномерной сходимости):

$$\lim_{\alpha\to 0}x_\alpha(t)=\begin{cases} x_0(t), & \text{если} \quad p\neq ik,\ \forall k\in\mathbb{Z}, \\ x_{00}(t), & \text{если} \quad p=ik,\ \exists k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Представляет интерес оценка скорости сходимости регуляризованного сдвигом решения $x_\alpha(t)$ к своему пределу при $\alpha\to 0$. Непосредственно из неравенства треугольника вытекают следующие оценки:

$$\left\|x_\alpha-x_0\right\|_{C[0,2\pi]}\le m_0|\alpha|, \tag{2.17}$$

если имеет место условие (2.8);

$$\left\|x_\alpha-x_{00}\right\|_{C[0,2\pi]}\le m_{00}|\alpha|, \tag{2.18}$$

если имеет место условие (2.9). Здесь

$$m_0=\left(m_1m_2+1\right)\left(m_3m_4+1\right)\int_0^{2\pi}|g(s)|ds,$$

$$m_{00} = (8\pi + 2)\int_0^{2\pi} |g(s)|\,ds\,,$$

$$m_1 = e^{2\pi|p|}, \qquad m_2 = \left|\left(1-e^{2\pi p}\right)^{-1}\right|,$$

$$m_3 = \sup_{0<|\alpha|<\rho_0}\left|\left(1-e^{2\pi(p+\alpha)}\right)^{-1}\right|, \quad m_4 = \sup_{\substack{0<|\alpha|<\rho_0 \\ 0\le s,t<2\pi}}\left|e^{(t-s)(p+\alpha)}\right|.$$

Итак, нами доказаны следующие утверждения:

Теорема 2.1. а) ***Для однозначной разрешимости уравнения*** **(2.1)** ***в пространстве*** $C[0,2\pi]$ ***для любой функции*** $f(t)\in C[0,2\pi]$***, необходимо и достаточно выполнение условия*** **(2.8).**

б**)** ***Пусть имеет место условие*** **(2.9).** ***Тогда для разрешимости уравнения*** **(2.1)** ***в*** $C[0,2\pi]$ ***для данной функции*** $f(t)\in C[0,2\pi]$ ***необходимо и достаточно выполнение условия*** **(2.9).**

Теорема 2.2. ***Пусть параметр регуляризации удовлетворяет условию*** **(2.11).** ***Тогда:***

а) ***для любой функции*** $f(t)\in C[0,2\pi]$ ***уравнение*** **(2.10)** ***имеет единственное*** 2π ***-периодическое решение*** **(2.13),** ***и справедлива оценка скорости сходимости*** **(2.17),** ***если имеет место условие*** **(2.8);**

б) ***для любой функции*** $f(t)\in C[0,2\pi]$***, удовлетворяющей условию*** **(2.7),** ***уравнение*** **(2.10)** ***имеет единственное*** 2π ***-периодическое решение*** **(2.13),** ***и справедлива оценка скорости сходимости*** **(2.18),** ***если имеет место условие*** **(2.9).**

3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \qquad 0 \le t \le 2\pi, \tag{3.1}$$

где
$$f(t) = \left(f_1(t), \dots, f_m(t)\right)^{\mathrm{T}} \in \overline{C}_m$$

– заданная непрерывная 2π -периодическая вектор-функция,

$$x(t) = \left(x_1(t), \dots, x_m(t)\right)^{\mathrm{T}} \in \overline{C}_m$$

– искомая непрерывная 2π -периодическая вектор-функция,

$$A = \begin{bmatrix} p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p \end{bmatrix}, \quad p = \mathrm{const}; \quad A : \overline{C}_m \to \overline{C}_m \tag{3.2}$$

– заданная диагональная матрица, а $\overline{C}_m$ – пространство m -мерных непрерывных вектор-функций.

При $m = 1$ система (3.1) обращается в скалярное уравнение (2.1), которое полностью исследовано в предыдущем параграфе. Поэтому будем рассматривать случай $m > 1$.

Систему (3.1) с матрицей (3.2) можно рассматривать как m самостоятельных скалярных уравнений вида (2.1):

$$A = \begin{bmatrix} p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p \end{bmatrix}, \quad p = \mathrm{const}; \quad A : \overline{C}_m \to \overline{C}_m \tag{3.3}$$

Согласно результатам предыдущего параграфа, условие (2.8) эквивалентно однозначной разрешимости уравнения (3.3) в пространстве $C = C[0, 2\pi]$ для всех $k = 1, \dots, m$.

Пусть имеет место условие (2.8). Тогда искомыми 2π-периодическими решениями (3.3) являются

$$x_{k,0}(t)=\frac{e^{p(t+2\pi)}}{1-e^{2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-ps} f_k(s)ds+e^{pt}\int_0^t e^{-ps} f_k(s)ds. \qquad (3.4)$$

Если же не имеет место условие (2.8), то имеет место условие (2.9) для некоторого целого k. Тогда для разрешимости уравнения (3.3) для этого значения k необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_0^{2\pi} e^{-ps} f_k(s)ds=0. \qquad (3.5)$$

Если выполнено это условие, то система (3.3) имеет бесчисленно много 2π-периодических решений.

Займемся вопросом регуляризации сдвигом системы (3.1). С этой целью рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt}=(A+\alpha E)x+f(t), \qquad 0\le t\le 2\pi. \qquad (3.6)$$

Покоординатная запись системы (3.6) даёт m самостоятельных скалярных уравнений вида (2.10):

$$\frac{dx_k}{dt}=(p+\alpha)x_k+f_k(t), \quad 0\le t\le 2\pi, \quad k=1,\dots,m.$$

Существует число $\rho(p)>0$ такое, что для всех $\alpha: 0<|\alpha|<\rho(p)$ система (3.6) для каждой $f(t)\in \bar{C}_m$ имеет единственное 2π-периодическое решение:

$$x_\alpha(t)=\left(x_{1,\alpha}(t),\dots,x_{m,\alpha}(t)\right)^{\mathrm{T}}\in \bar{C}_m, \qquad (3.7)$$

где $$x_{k,\alpha}(t)=\frac{e^{(p+\alpha)(t+2\pi)}}{1-e^{2\pi(p+\alpha)}}\int_0^{2\pi} e^{-(p+\alpha)s} f_k(s)ds+e^{(p+\alpha)t}\int_0^t e^{-(p+\alpha)s} f_k(s)ds.$$

Напомним, что норма в пространстве непрерывных 2π-периодических вектор-функций $\bar{C}_m$ определяется равенством

$$\|x\|_{\bar{C}_m} = \max_{1\le k\le m}\|x_k\|_C, \quad \text{где} \quad \|x_k\|_C = \max_{0\le t\le 2\pi}|x_k(t)|.$$

Положим

$$x_0(t) = \left(x_{1,0}(t), \dots, x_{m,0}(t)\right)^{\mathrm{T}}, \quad x_{00}(t) = \left(x_{1,00}(t), \dots, x_{m,00}(t)\right)^{\mathrm{T}},$$

где функции $x_{1,0}(t), \dots, x_{m,0}(t)$ определены в (3.4), а

$$x_{k,00}(t) = \frac{e^{pt}}{2\pi}\int_0^{2\pi} se^{-ps} f_k(s)ds + e^{pt}\int_0^t e^{-ps} f_k(s)ds, \quad k = 1,\dots,m.$$

Из теоремы 2.2, при соответствующих предположениях, получим оценки скорости сходимости решения $x_\alpha(t)$ при $\alpha \to 0$:

$$\|x_\alpha - x_0\|_{\bar{C}_m} \le M_0|\alpha|, \tag{3.8}$$

если имеет место условие (2.8);

$$\|x_\alpha - x_{00}\|_{\bar{C}_m} \le M_{00}|\alpha|, \tag{3.9}$$

если имеет место условие (2.9).

Постоянные M_0 и M_{00} в этих оценках определяются аналогично константам m_0 и m_{00} из (2.17) и (2.18), соответственно.

Таким образом, доказаны утверждения, аналогичные теореме 2.1 и теореме 2.2:

Теорема 3.1. а) ***Для однозначной разрешимости системы* (3.1) *в пространстве*** $\bar{C}_m$ ***для любой вектор-функции*** $f(t) \in \bar{C}_m$ ***необходимо и достаточно выполнение условия* (2.8).**

б) ***Пусть имеет место условие* (2.9). *Тогда для разрешимости системы* (3.1) *в пространстве* $\overline{C}_m$ *для данной вектор-функции* $f(t) \in \overline{C}_m$ *необходимо и достаточно выполнение условия* (3.5).**

Теорема 3.2. ***Пусть параметр регуляризации удовлетворяет условию* (2.11). *Тогда:***

а) *для любой вектор-функции* $f(t) \in \overline{C}_m$ *система* (3.6) *имеет единственное* 2π *-периодическое решение* (3.7), *и справедлива оценка скорости сходимости* (3.8), *если имеет место условие* (2.8);

б) ***для любой вектор-функции*** $f(t) \in \overline{C}_m$***, удовлетворяющей условию* (3.5), *система* (3.6) *имеет единственное* 2π *-периодическое решение* (3.9), *и справедлива оценка скорости сходимости* (3.9), *если имеет место условие* (2.9).**

4. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ С НИЖНИМ ЖОРДАНОВЫМ БЛОКОМ

Жордановы блоки любой квадратной матрицы имеют один из следующих трех видов:

1) блоки, порядки которых равны единице; эти блоки соответствуют собственным значениям с алгебраической кратностью, равной единице (простые собственные значения);

2) блоки, порядки которых равны $m \geq 2$ и соответствующие им собственные подпространства являются m-мерными; эти блоки соответствуют собственным значениям, алгебраические и геометрические кратности которых совпадают и равны m (полупростые собственные значения);

3) блоки, порядки которых равны $m \geq 2$ и соответствующие им собственные подпространства являются одномерными; эти блоки соответствуют собственным значениям с алгебраической кратностью m и с геометрической кратностью 1.

В § 2 и § 3 изучены случаи простых и полупростых собственных значений. Они перечислены выше в пунктах 1) и 2). Осталось изучение случая 3).

В данном параграфе рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \qquad 0 \le t \le 2\pi, \tag{4.1}$$

матрица которой имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} p & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & p \end{bmatrix}, \qquad p = \mathrm{const}. \tag{4.2}$$

Матрица (4.2) называется **нижним жордановым блоком** [25].

Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости системы (4.1) для любой вектор-функции $f(t) \in \overline{C}_m$ в пространстве $\overline{C}_m$ является условие (2.8). При этом единственное решение определяется так:

$$x_0(t) = \left(x_{1,0}(t), \ldots, x_{m,0}(t)\right)^{\mathrm{T}},$$

где $$x_{k,0}(t) = \frac{e^{p(t+2\pi)}}{1-e^{2\pi p}} \int_0^{2\pi} e^{-ps} g_k(s)\,ds + e^{pt} \int_0^{2\pi} e^{-ps} g_k(s)\,ds.$$

Функции $g_k(t)$ определяются с помощью следующего рекуррентного соотношения

$$g_k(t) = \begin{cases} f_k(t), & \text{если} \quad k = 1, \\ f_k(t) + x_{k-1,0}(t), & \text{если} \quad k = 2,\ldots,m. \end{cases}$$

Если не имеет место условие (2.8), то имеет место условие (2.9). Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости системы (4.1) для данной вектор-функции $f(t) \in \overline{C}_m$ является условие

$$\int_0^{2\pi} e^{-ps} f_1(s)\,ds = 0. \tag{4.3}$$

При выполнении равенства (4.3) система (4.1) имеет бесчисленно много решений в пространстве $\overline{C}_m$. Одним из таких решений является

$$x_{00}(t) = \left(x_{1,00}(t), \ldots, x_{m,00}(t)\right)^{\mathrm{T}},$$

где $$x_{k,00}(t)=\begin{cases} -\sum\limits_{l_1=0}^{k} I(l_1)+\sum\limits_{l_2=0}^{k-1} J(l_2), & \text{если} \quad k=1,\ldots,m-1, \\ -\sum\limits_{l_1=1}^{k} I(l_1)+\sum\limits_{l_2=0}^{k-1} J(l_2), & \text{если} \quad k=m, \end{cases}$$

$$I(l_1)=\frac{1}{2\pi l_1!}\int\limits_0^{2\pi} e^{ik(t-s)}(\pi+t-s)^{l_1} f_{k+1-l_1}(s)ds,$$

$$J(l_2)=\frac{1}{l_2!}\int\limits_0^{t} e^{ik(t-s)}(t-s)^{l_2} f_{k+1-l_2}(s)ds.$$

Рассмотрим регуляризацию сдвигом решения системы (4.1)

$$\frac{dx}{dt}=(A+\alpha B)x+f(t), \qquad 0\le t\le 2\pi, \tag{4.4}$$

где B – некоторая квадратная матрица порядка m.

Пусть

$$f(t)=\left(f_1(t),\ldots,f_m(t)\right)^{\mathrm{T}}\in \bar{C}_m.$$

Тогда система (4.4) имеет единственное непрерывное 2π-периодическое решение. Установим справедливость этого факта.

Квадратную матрицу порядка m

$$\Phi_\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \varepsilon^{-1}w_0 & \varepsilon^{-1}w_1 & \ldots & \varepsilon^{-1}w_{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon^{-m+1}w_0^{m-1} & \varepsilon^{-m+1}w_1^{m-1} & \ldots & \varepsilon^{-m+1}w_{m-1}^{m-1} \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

назовём **обобщенной матрицей Фурье**. Заметим, что при $\varepsilon=1$ матрица (4.5) совпадает с матрицей Фурье

$$F=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ w_0 & w_1 & \ldots & w_{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_0^{m-1} & w_1^{m-1} & \ldots & w_{m-1}^{m-1} \end{bmatrix},$$

приводящей все циркулянтные матрицы порядка m к диагональному виду. Матрица (4.5) обратима для всех $\varepsilon \neq 0$, и справедливо равенство

$$\Phi_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \overline{w}_0 & \dots & \varepsilon^{m-1}\overline{w}_0^{m-1} \\ 1 & \varepsilon \overline{w}_1 & \dots & \varepsilon^{m-1}\overline{w}_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon \overline{w}_{m-1} & \dots & \varepsilon^{m-1}\overline{w}_{m-1}^{m-1} \end{bmatrix},$$

Действительно, полагая

$$D_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \varepsilon^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon^{-m+1} \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

обобщенную матрицу Фурье можно представить в виде

$$\Phi_\varepsilon = D_\varepsilon F . \tag{4.7}$$

Так как $F^{-1} = F^*$ и D_ε обратима для $\varepsilon \neq 0$, то из (4.7) получим

$$\Phi_\varepsilon^{-1} = F^* D_\varepsilon^{-1}.$$

Выберем теперь матрицу B_0, гарантирующую однозначную разрешимость системы (4.4) для всех $f(t) \in \overline{C}_m$ и параметра $\alpha : 0 < |\alpha| < \rho_0$, где ρ_0 – некоторое положительное достаточно малое число, и сходимость решения системы (4.4) при $\alpha \to 0$.

В качестве критерия выбора матрицы B_0 примем простоту этой матрицы, то есть, чтобы у неё было как можно много нулей. Покажем, что матрица, имеющая только один ненулевой элемент, равный 1

$$B_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right], \tag{4.8}$$

удовлетворяет нашим требованиям.

Рассмотрим также матрицу

$$A_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{array}\right], \tag{4.9}$$

которая получается из (4.2) при $p = 0$.

Докажем предварительно несколько вспомогательных лемм.

Лемма 4.1. ***Пусть*** $\alpha \neq 0$ ***– произвольное число и*** $\varepsilon = \alpha^{1/m}$***. Тогда справедливо равенство***

$$D_\varepsilon^{-1}\left(A_0 + B_0\right)D_\varepsilon = \varepsilon P,$$

где

$$P = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{array}\right]$$

– матрица перестановок порядка m***.***

Справедливость леммы 4.1 проверяется простым умножением матриц.

Лемма 4.2. ***Пусть*** $\alpha \neq 0$ ***– произвольное число и*** $\varepsilon = \alpha^{1/m}$***. Тогда справедливо равенство***

$$\Phi_\varepsilon^{-1}\left(A_0 + B_0\right)\Phi_\varepsilon = \mathrm{diag}\left(\varepsilon \bar{w}_0, \varepsilon \bar{w}_1, \dots, \varepsilon \bar{w}_{m-1}\right), \tag{4.10}$$

где матрицы A_0 ***и*** B_0 ***определены в* (4.8) *и* (4.9).**

Действительно, из равенства

$$F^* P F = \mathrm{diag}\left(\bar{w}_0, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{m-1}\right)$$

и леммы 4.1 вытекает справедливость (4.10).

Приведённые леммы показывают возможность применения обобщенной матрицы Фурье и для матрицы $A+\alpha B_0$, где матрица A приведена в (4.2).

Лемма 4.3. ***Пусть*** $\alpha \neq 0$ ***– произвольное число и*** $\varepsilon = \alpha^{1/m}$. ***Тогда справедливо равенство***

$$\Phi_\varepsilon^{-1}\left(A+\alpha B_0\right)\Phi_\varepsilon = \operatorname{diag}\left(p+\varepsilon \overline{w}_0, \ldots, p+\varepsilon \overline{w}_{m-1}\right), \qquad \textbf{(4.11)}$$

где матрицы A ***и*** B_0 ***определены в*** **(4.2)** ***и*** **(4.8).**

Действительно, так как

$$A+\alpha B_0 = \left(A_0+\alpha B_0\right)+pE \quad \text{и} \quad \Phi_\varepsilon^{-1}(pE)\Phi_\varepsilon = pE, \qquad (4.12)$$

то из (4.10) вытекает справедливость (4.11).

Запишем систему (4.4) в виде

$$\frac{d\Phi_\varepsilon^{-1}x}{dt} = \Phi_\varepsilon^{-1}\left(A+\alpha B_0\right)\Phi_\varepsilon \cdot \Phi_\varepsilon^{-1}x + \Phi_\varepsilon^{-1} f(t). \qquad (4.13)$$

Обозначив

$$y = \Phi_\varepsilon^{-1}x, \qquad y = \left(y_1, \ldots, y_m\right)^{\mathrm{T}}, \qquad (4.14)$$

$$g(t) = \Phi_\varepsilon^{-1} f(t), \qquad g(t) = \left(g_1(t), \ldots, g_m(t)\right)^{\mathrm{T}} \qquad (4.15)$$

и учитывая (4.12), представим (4.13) в координатах:

$$\frac{dy_k}{dt} = \left(p+\varepsilon \overline{w}_{k-1}\right)y_k + g_k(t), \quad k = 1,\ldots,m. \qquad (4.16)$$

Для любого $p \in \mathbb{C}$ существует число $\rho(p) > 0$ такое, что при

$$0 < |\alpha| < \rho(p) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < |\varepsilon|^m < \rho(p) \qquad (4.17)$$

выполняются неравенства

$$p+\varepsilon\overline{w}_{k-1}\neq 0, \qquad k=1,\dots,m.$$

Тогда из теоремы 2.1. а) следует однозначная разрешимость системы (4.16) в пространстве $\overline{C}_m$ для любой вектор-функции $g(t)\in\overline{C}_m$:

$$y_k(t)=\int_0^{2\pi}\beta_k(t,s)g_k(s)ds+\int_0^t\beta_k(t,s)\gamma_k(s)ds, \tag{4.18}$$

где

$$\beta_k(t,s)=\frac{e^{\left(p+\varepsilon\overline{w}_{k-1}\right)(2\pi+t-s)}}{1-e^{2\pi\left(p+\varepsilon\overline{w}_{k-1}\right)}}, \quad \gamma_k(t,s)=e^{\left(p+\varepsilon\overline{w}_{k-1}\right)(t-s)}, \quad k=1,\dots,m.$$

Согласно (4.14), будем иметь

$$x(t)=\Phi_\varepsilon y(t)=\left(x_1(t),\dots,x_m(t)\right)^{\mathrm{T}}.$$

Отсюда, из (4.15) и определения матрицы (4.5), получим

$$x_n(t)=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^{m}\varepsilon^{-n+1}w_{j-1}^{n-1}y_j(t), \qquad n=1,\dots,m, \tag{4.19}$$

$$g_k(t)=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{l=1}^{m}\varepsilon^{l+1}\overline{w}_{k-1}^{l+1}f_l(t), \qquad k=1,\dots,m. \tag{4.20}$$

Подставим (4.18) в (4.19) и, принимая во внимание (4.20), получим единственное 2π -периодическое решение системы (4.4):

$$x_{n,\alpha}(t)=\frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\alpha^{-(n-l-2)/m}w_{j-1}^{n-l-2}\beta_j(t,s)f_l(s)ds+$$

$$+\frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\alpha^{-(n-l-2)/m}w_{j-1}^{n-l-2}\gamma_j(t,s)f_l(s)ds, \quad n=1,\dots,m. \tag{4.21}$$

Аналогичными выкладками, использованными при доказательстве неравенств (2.17) и (2.18), можно доказать следующие оценки

$$\left\| x_\alpha - x_0 \right\|_{\bar{C}_m} \le M_0 |\alpha|, \tag{4.22}$$

если имеет место условие (2.8);

$$\left\| x_\alpha - x_{00} \right\|_{\bar{C}_m} \le M_{00} |\alpha|, \tag{4.23}$$

если имеют место условия (2.9) и (4.3).

Здесь M_0 и M_{00} – некоторые постоянные, не зависящие от α.

Сформулируем в виде теорем полученные результаты.

Теорема 4.1. а) ***Для однозначной разрешимости системы*** **(4.1)** ***в пространстве*** $\bar{C}_m$ ***для любой вектор-функции*** $f(t) \in \bar{C}_m$ ***необходимо и достаточно выполнение условия*** **(2.8).**

б) ***Пусть имеет место условие*** **(2.9).** ***Тогда для разрешимости системы*** **(4.1)** ***в пространстве*** $\bar{C}_m$ ***для данной вектор-функции*** $f(t) \in \bar{C}_m$ ***необходимо и достаточно выполнение условия*** **(4.3).**

Теорема 4.2. ***Пусть параметр регуляризации удовлетворяет условию*** **(4.17).** ***Тогда:***

а) ***для любой вектор-функции*** $f(t) \in \bar{C}_m$ ***система*** **(4.4)** ***имеет единственное*** 2π ***-периодическое решение*** **(4.21),** ***и справедлива оценка скорости сходимости*** **(4.22),** ***если имеет место условие*** **(2.8);**

б) ***для любой вектор-функции*** $f(t) \in \bar{C}_m$***, удовлетворяющей условию*** **(4.3),** ***система*** **(4.4)** ***имеет единственное*** 2π ***-периодическое решение*** **(4.21),** ***и справедлива оценка скорости сходимости*** **(4.23),** ***если имеет место условие*** **(2.9).**

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Общая теория некорректных (неустойчивых) задач и методы их решения является относительно молодой отраслью математики. Развитию этой теории способствовали потребности различных областей естествознания, техники, медицины и решение народнохозяйственных задач. Оно предопределялось широким применением вычислительной техники в математические исследования и народное хозяйство.

Это развитие исходит из основополагающих работ выдающихся русских-советских математиков А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова, а также созданной ими математической школы. Работами их многочисленных учеников и исследователей создана глубокая теория, имеющая громадное количество приложений при решении задач динамики и кинетики, оптимального управления, математической экономики, геофизики и астрофизики, оптической, атомной и ядерной спектроскопии, диагностики плазмы, теории рассеяния и теории распознавании образов, проектирования сложных физических систем, при создании автоматизированных систем полной математической обработки и интерпретации экспериментов.

Глубокие теоретические разработки в теории некорректных задач позволяют разрабатывать алгоритмы решения, которые для ряда наиболее часто возникающих в практике некорректных задач мало отличаются по трудоемкости от соответствующих алгоритмов решения однотипных корректных задач. Круг некорректных задач, обеспеченных экономичными вычислительными алгоритмами приближенного решения, по мере углубления теоретических исследований будет постепенно расширяться. Развитие в этом направлении теории и методов решения некорректных задач послужит дальнейшему ускорению научно-технического прогресса (см. напр. обзор: [О. А. Лисковец. Некорректные задачи. Некорректные задачи и их регуляризации. Итоги науки и техники. 1982. Т. 20. – С. 117 – 178].

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П. С. Александров. – М.: Наука, 1979. - 512 с.
2. Алиев, Б. А. О нахождения условного псевдорешения / Б. А. Алиев // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1979. – Т. 22, № 2. - С. 71 – 74.
3. Афендикова, Н. Г. К численному решению сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши и Гильберта / Н. Г. Афендикова, И. К. Лифанов // Препринт. – М.: ИТЭФ. 1986. № 73. - 21 с.
4. Афендикова, Н. Г. О сингулярном интегральном уравнении второго рода с кратными интегралами типа Коши / Н. Г. Афендикова, И. К. Лифанов // Известия вузов. Серия математика. – 1986. - № 8. - С. 3 – 9.
5. Афендикова, Н. Г. Численное решение сингулярного интегрального уравнения первого рода с кратным интегралом с ядрами Гильберта / Н. Г. Афендикова // Известия вузов. Серия математика. – 1988. - № 3. - С. 3 – 8.
6. Ахиезер, Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. – М.: Наука, 1966. - 544 с.
7. Бакушинский, А. Б. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А. Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1967. – Т. 7, № 3. - С. 672 – 676.
8. Бакушинский, А. Б. Избранные вопросы приближенного решения некорректных задач / А. Б. Бакушинский. – М.: МГУ, 1968. - 90 с.
9. Бакушинский, А. Б. Некоторые свойства регуляризующих алгоритмов / А. Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1968. – Т. 8, № 2. - С. 426 – 428.
10. Бакушинский, А. Б. Некоторые вопросы теории регуляризующих алгоритмов / А. Б. Бакушинский // Вычислительные методы и программирования. – М.: МГУ, 1969. - Вып. 12. - С. 56 – 79..
11. Бакушинский, А. Б. Итерационные методы решения некорректных задач / А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский. – М.: МГУ, 1989. - 199 с.
12. Беклемишев, Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М.: Наука, 1983. - 336 с.
13. Белоцерковский, С. М. Метод дискретных особенностей в плоских задачах теории упругости / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов, М. М. Солдатов // Прикладная математика и механика. - 1983. – Т. 47, вып. 5. - С. 781 – 789.
14. Белоцерковский, С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. – М.: Наука. 1985. - 256 с.
15. Березин, И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. – Том 1. - 464 с.
16. Васильев, Ф. П. О регуляризации некорректных задач минимизации на множествах, заданных приближенно / Ф. П. Васильев // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1980. – Т. 20, № 1. - С. 38 – 50.
17. Васин, В. В. Приближенное решение операторных уравнений первого рода / В. В. Васин, В. П. Танана // Математические записки Уральского университета. - 1968. – Т. 6, № 4. - С. 27 – 37.

18. Васин, В. В. Необходимые и достаточные условия сходимости проекциионных методов для линейных неустойчивых задач / В. В. Васин, В. П. Танана // Доклады Академии наук СССР. – 1974. – Т.. 215, № 5. – С. 1032 – 1034.
19. Васин, В. В. Оптимальность по порядку метода регуляризации для нелинейных операторных уравнений / В. В. Васин // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1977. – Т. 17, № 4. - С. 847 – 858.
20. Винокуров, В. А. Приближенный метод невязки в нерефлексивных пространствах / В. А. Винокуров // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1972. – Т. 12, № 1. - С. 207 – 212.
21. Воеводин, В. В. Вычисления с теплицевыми матрицами / В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников // Вычислительные процессы и системы. – М.: Наука, 1983. – Вып. 1. - С. 124 – 266.
22. Воеводин, В. В. Линейная алгебра / В. В. Воеводин. – М.: Наука, 1980. - 400 с.
23. Воеводин, В. В. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами / В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников. – М.: Наука, 1987. - 320 с.
24. Гавурин, М. К. О методе А. Н. Тихонова решения некорректных задач / М. К. Гавурин // Методы вычислений. – Л.: ЛГУ, 1977. Вып. 4. - С. 21 - 25.
25. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. - 576 с.
26. Гончарский, А. В. Об одном регуляризующем алгоритме для некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором / А. В. Гончарский // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1972. – Т. 12, № 6. - С. 1572 – 1594.
27. Данилин, А. Р. О β -устойчивости метода регуляризации А. Н. Тихонова решения неявных операторных уравнений первого рода / А. Р. Данилин // Исследования по функциональному анализу. Свердловск. - 1978. - С. 15 – 31.
28. Демидович Б. П. Лекции по математической теории упругости. М.: Наука. 1967. – 472 с.
29. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М.: Наука, 1970. - 664 с.
30. Джумаев, С. Аналог теоремы Лакса для неоднозначно разрешимых задач / С. Джумаев // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1977. – Т. 20, № 7. - С. 3 – 6.
31. Джумаев, С. О приближенном вычисления псевдорешения / С. Джумаев // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1982. – Т. 25, № 10. - С. 584 – 587.
32. Домбровская, И. Н. К теории некоторых линейных уравнений в абстактных пространствах / И. Н. Домбровская, В. К. Иванов // Сибирский математический журнал. – 1965. – Т. 6, № 3. - С. 499 – 508.
33. Дьдонне, Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьдонне. – М.: Мир, 1964. - 430 с.
34. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. Т. 1 / А. Зигмунд – М.: Мир. 1965. - 616 с
35. Иванов, В. К. Теорема единственности обратной задачи логарифмического потенциала для звездных множеств / В. К. Иванов // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 3. – С. 99 – 106.
36. Иванов, В. К. О линейных некорректных задачах / В. К. Иванов // Доклады Академии наук СССР. – 1962. – Т.. 145, № 2. – С. 270 – 272.
37. Иванов, В. К. Интегральные уравнения первого рода и приближенное решение обратной задачи потенциала / В. К. Иванов // Доклады Академии наук СССР. – 1962. – Т.. 142, № 5. – С. 997 – 1000.

38. Иванов, В. К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода / В. К. Иванов // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1966. – Т. 6, № 6. - С. 1089 – 1094.
39. Иванов, В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М.: Наука, 1978. - 206 с.
40. Ильин, В. А. О работах А. Н. Тихонова по методам решения некорректно поставленных задач / В. А. Ильин // Успехи математических наук. - 1967. – Т. 22, № 2. - С. 168 – 175.
41. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. М.: Наука, 1984. - 751 с.
42. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. М.: Мир, 1972. - 740 с.
43. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. М.: Наука, 1968. - 496 с.
44. Крейн, С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. М.: Наука, 1971. - 104 с.
45. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. М.: Наука, 1975. - 432 с.
46. Лаврентьев, М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа / М. М. Лаврентьев // Доклады Академии наук СССР. – 1955. – Т.. 102, № 2. – С. 205 – 206.
47. Лаврентьев, М. М. К вопросу об обратной задаче теории потенциала / М. М. Лаврентьев // Доклады Академии наук СССР. – 1956. – Т. 110, № 3. – С. 389 – 390.
48. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. Новосибирск: СО АН СССР. 1962. - 92 с.
49. Лаврентьев, М. М. Условно – корректные задачи дифференциальных уравнений / М. М. Лаврентьев. Новосибирск: Новосибирский университет. 1973. - 72 с.
50. Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С. П. Шишатский. М: Наука. 1980. - 288 с.
51. Лисковец, О. А. Вариационные методы решения неустойчивых задач / О. А. Лисковец. Минск: Наука и техника, 1981. - 343 с.
52. Лифанов, И. К. О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных уравнений / И. К. Лифанов // Доклады Академии Наук СССР. – 1980. – Т. 255, № 5. – С. 1046 – 1050.
53. Лифанов, И. К. О численном решении сингулярных интегральных уравнений второго рода / И. К. Лифанов, Н. М. Моляков // Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского. – 1986. – Вып. 1313. - С. 465 – 475.
54. Лифанов, И. К. Теплицевы матрицы и сингулярные интегральные уравнения / И. К. Лифанов, Е. Е. Тыртышников // Вычислительные процессы и системы. – М.: Наука, 1990. – Вып. 7. - С. 94 – 273.
55. Лифанов, И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
56. Мелешко, В. И. Псевдообратные операторы и рекуррентное вычисления псевдорешений в гильбертовых пространствах / В. И. Мелешко // Сибирский математический журнал. – 1976. – Т. 19, № 19. - С. 106 – 121.
57. Мелешко, В. И. Исследование устойчивых L-псевдообращений неограниченных операторов методом регуляризации / В. И. Мелешко // Дифференциальные уравнения. – 1979. – № 5. - С. 921 – 935.

58. Морозов, В. А. О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации / В. А. Морозов // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1965. – Т. 6, № 1. - С. 170 – 175.
59. Морозов, В. А. О принципе невязки при решении несовместных уравнений методом регуляризации А. Н. Тихонова / В. А. Морозов // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1973. – Т. 13, № 5. - С. 1099 – 1111.
60. Морозов, В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В. А. Морозов. – М.: МГУ, 1974. - 360 с.
61. Морозов, В. А. L-псевдообращение и его свойства / В. А. Морозов // Доклады Академии наук СССР. – 1977. – Т. 233, № 2. - С. 291 – 294.
62. Морозов, В. А. Оптимальная регуляризация некорректых нормально разрешимых операторных уравнений / В. А. Морозов, С. Ф. Гилязов // Методы и алгоритмы в численном анализе.– М.: МГУ. 1982. - С. 11 – 18.
63. Морозов, В. А. К теории L-псевдообращения / В. А. Морозов А. Б. Назимов // Численный анализ: методы, алгоритмы, программы. – М.: МГУ. 1983. - С. 20 – 29.
64. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. - 512 с.
65. Назимов, А. Б. О скорости сходимости метода регуляризации / А. Б. Назимов // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1979. – Т. 22, № 10.
66. Назимов, А. Б. О скорости сходимости метода регуляризации в гильбертовом пространстве / А. Б. Назимов // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1981. – Т. 24, № 4.
67. Назимов, А. Б. Об одном специальном способе регуляризации систем линейных алгебраических уравнений / А. Б. Назимов // Методы и алгоритмы в численном анализе. – М.: МГУ, 1982.
68. Назимов, А. Б. Об одном способе приближенного вычисления квазирешений / А. Б. Назимов, С. Джумаев // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1983. – Т. 26, № 4.
69. Назимов, А. Б. К теории L-псевдообращения / А. Б. Назимов, В. А. Морозов // Численный анализ: Методы, алгоритмы, программы. – М.: МГУ. 1983.
70. Назимов, А. Б. Оптимальный порядок сходимости метода регуляризации / А. Б. Назимов // Теория и методы решения некорректно поставленных задач. – Новосибирск: Новосибирский университет. 1983.
71. Назимов, А. Б. Об одной специальной регуляризации решения операторных уравнений / А. Б. Назимов // Методы и алгоритмы в численном анализе. – М.: МГУ. 1984.
72. Назимов, А. Б. О трехэтапной лексикографической задаче и ее регуляризации / А. Б. Назимов // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1984. – Т. 27, № 8.
73. Назимов, А. Б. Метод БПФ для численного решения сингулярных интегральных уравнений / А. Б. Назимов // Метод дискретных особенностей в задачах математической физики. – Харьков: Харьковский университет. 1984.
74. Назимов, А. Б. К проблеме регуляризации систем линейных алгебраических уравнений / А. Б. Назимов, В. А. Морозов // Доклады Академии наук СССР. – 1985. – Т.. 286, № 3.

75. Назимов, А. Б. Метод БПФ для быстрого решения линейных систем с перциркулянтными блоками / А. Б. Назимов // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1985. – Т.. 28, № 6. – С. 322 – 325.
76. Назимов, А. Б. О трехэтапной лексикографической задаче и ее регуляризации / А. Б. Назимов // Прикладные методы в численном анализе. – М.: МГУ. 1985.
77. Назимов, А. Б. Специальная регуляризация линейных уравнений / А. Б. Назимов, В. А. Морозов // Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения. – Саратов.: Саратовский университет. 1985.
78. Назимов, А. Б. К проблеме регуляризации систем линейных алгебраических уравнений / А. Б. Назимов, В. А. Морозов // Численный анализ: Методы, алгоритмы, программы. – М.: МГУ. 1985.
79. Назимов, А. Б. О приближенном решении одного класса неоднозначно разрешимых операторных уравнений / А. Б. Назимов, В. А. Морозов // Электронное моделирование. - 1986. – Т. 8, № 6.
80. Назимов, А. Б. О необходимости и достаточности условий регуляризуемости вырожденных систем линейных алгебраических уравнений / А. Б. Назимов, В. А. Морозов // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1986. – Т. 26, № 9.
81. Назимов, А. Б. О существовании и единственности решения сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Гильберта и его приближенного решения / А. Б. Назимов, Э. М. Мухамадиев // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1987. – Т.. 30, № 11.
81. Назимов, А. Б. О приближенном решении одного класса неоднозначно разрешимых операторных уравнений / А. Б. Назимов, В. А. Морозов // Вычислительные процессы и системы. – М.: Наука, 1987.
82. Назимов, А. Б. Вопрос разрешимости сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Гильберта и численные методы его решения / А. Б. Назимов // Депонировано в ВИНИТИ. 1989. № 4207 – В89. – 58 с.
83. Назимов, А. Б. О разрешимости сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Гильберта / А. Б. Назимов, М. Муллоджанов // Конференция молодых ученых Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 1989.
84. Назимов, А. Б. О разрешимости сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта в гельдеровом пространстве / А. Б. Назимов, М. Муллоджанов // Конференция молодых ученых Таджикистана. – Ленинабад. 1991.
85. Назимов, А. Б. О применении метода быстрого преобразования Фурье при решении систем с циркулянтной и перциркулянтной матрицами / А. Б. Назимов // Исследование по теории дифференциальных, интегральных и операторных уравнений. – Ленинабад. 1993.
86. Назимов, А. Б. Быстрое решение систем линейных алгебраических уравнений с циркулянтными и перциркулянтными матрицами / А. Б. Назимов // Численные методы анализа. – М.: МГУ. 1995.
87. Назимов, А. Б. Об одном критерии сходимости метода регуляризации сдвигом / А. Б. Назимов // Алгоритмический анализ некорректных задач. – Екатеринбург. 1998.
88. Назимов, А. Б. О сходимости приближенного решения линейного дифференциального уравнения первого порядка / А. Б. Назимов // Дифференциальные уравнения и их приложения. – Душанбе. 2000.

89. Назимов, А. Б. О спектре сингулярного интегрального оператора Гильберта и его дискретного аналога / А. Б. Назимов // Дифференциальные уравнения и их приложения. – Душанбе. 2000.
90. Назимов, А. Б. Сдвиг на одноранговую матрицу в задаче на собственные значения / А. Б. Назимов, Э. М. Мухамадиев // Автоматизированная подготовка машиностроительного производства, технология и надежность машин, приборов и оборудования. – Вологда: ВоГТУ. 2005.
91. Назимов, А. Б. Обоснование метода регуляризации для решения линейных дифференциальных уравнений в пространстве почти периодических функций / А. Б. Назимов, Э. М. Мухамадиев, М. К. Собиров // Автоматизированная подготовка машиностроительного производства, технология и надежность машин, приборов и оборудования. – Вологда: ВоГТУ. 2005.
92. Назимов, А. Б. Одноранговый сдвиг в задаче на собственные значения матрицы / А. Б. Назимов, Э. М. Мухамадиев // Индивидуальные технологии в управлении, обучении, правоохранительной деятельности. – Вологда: ВИПЭ ФСИН России. 2006.
93. Назимов, А. Б. О проблеме регуляризации сдвигом вырожденных систем линейных алгебраических уравнений / А. Б. Назимов, Э. М. Мухамадиев, В. А. Морозов // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2007. – Т. 47, № 12.
94. Назимов, А. Б. *О* проблеме регуляризации сдвигом вырожденных систем линейных алгебраических уравнений / А. Б. Назимов, Э. М. Мухамадиев, В. А. Морозов // Доклады Российской Академии наук. – 2008. – Т.. 419, № 4.
95. Никольский, С. М. Линейные уравнения в линейно нормированных пространствах / С. М. Никольский // Известия Академии наук СССР. Серия математика. – 1943. – Т.. 7, № 3. – С. 147 – 163.
96. Рудин, У. Основы математического анализа / У. Рудин. – М.: Мир, 1976. - 320 с.
97. Садовничий, В. А. Теория операторов / В. А. Садовничий. М.: Дрофа, 2001. - 384 с.
98. Сидоров, Н. А. Регуляризация вычисления вещественных решений нелинейных уравнений в окрестности точки ветвления / Н. А. Сидоров, В. А. Треногин // Доклады Академии наук СССР. – 1976. – Т.. 228, № 5. – С. 1049 – 1052.
99. Сидоров, Н. А. Об одном подходе к проблеме регуляризации на основе возмущения линейных операторов / Н. А. Сидоров, В. А. Треногин // Математические заметки. – 1976. – Т.. 20, № 5. – С. 747 – 752.
100. Сидоров, Н. А. Регуляризация линейных уравнений на основе теории возмущений / Н. А. Сидоров, В. А. Треногин // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т.. 16, № 11. – С. 2039 – 2049.
101. Танана, В П. Методы решения операторных уравнений / В. П. Танана. М.: Наука, 1981. - 158 с.
102. Тихонов, А. Н. Об устойчивости обратных задач / А. Н. Тихонов // Доклады Академии наук СССР. – 1943. – Т.. 39, № 5. – С. 195 – 198.
103. Тихонов, А Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А. Н. Тихонов // Доклады Академии наук СССР. – 1963. – Т.. 151, № 3. – С. 501 – 504.
104. Тихонов, А Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. М.: Наука, 1979. - 288 с.
105. Тихонов, А Н. Регуляризующие алгоритмы и априорная информация / А.Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. М.: Наука, 1983. - 200 с.

106. Треногин, В. А. О регуляризации по Тихонову задачи о точках бифуркации нелинейных операторов / В. А. Треногин, Н. А. Сидоров // Сибирский математический журнал. – 1976. – Т.. 17, № 2. – С. 402 – 413.
107. Тыртышников, Е. Е. Теплицевы матрицы, некоторые их аналоги и приложения / Е. Е. Тыртышников. – М.: Отдел вычислительной математики АН СССР, 1989. - 184 с.
108. Фадеева, В. Н. Сдвиг для систем с плохо обусловленными матрицами / В. Н. Фадеева // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1965. – Т. 5, № 5. - С. 907 – 911.
109. Шафиев, Р. А. Об устойчивости псевдообращения / Р. А. Шафиев // Известия Академии наук Азербайджанской ССР. Серия физ.-техн. и мат. наук. - 1980. – № 3. - С. 3 – 10.
110. Шафиев, Р. А. О псевдообращении ограниченных операторов / Р. А. Шафиев // Доклады Академии наук Азербайджанской ССР. - 1981. – Т. 17, № 8. - С. 13 – 17.
111. Шафиев, Р. А. О регулярных методах вычисления L-псевдообратных операторов / Р. А. Шафиев // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1983. – Т. 23, № 3. - С. 536 – 544.
112. Шафиев, Р. А. К теории методов регуляризации Тихонова – Лаврентьева / Р. А. Шафиев // Доклады Академии наук СССР. - 1985. – Т. 282, № 4. - С. 804 – 808.
113. Ягола, А Г. О решении нелинейных некорректных задач с помощью обобщенного метода невязки / А. Г. Ягола // Доклады Академии наук СССР. – 1980. – Т.. 252, № 4. – С. 810 – 813.

ОГЛАВЛЕНИЕ