ВВЕДЕНИЕ

При изучении стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и др.) обычно приходят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является **уравнение Лапласа**

$$\Delta u = 0 .$$

Функция u называется **гармонической** в области G, если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до второго порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

При изучении свойств гармонических функций были разработаны различные математические методы, оказавшиеся плодотворными и в применении к уравнениям гиперболического и параболического типов.

Наиболее общим методом исследования двумерных задач для уравнения Лапласа является метод, использующий теорию функций комплексной переменной. Здесь наибольший интерес представляют аналитические функции. Необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции являются условия Коши – Римана. Действительная и мнимая части аналитической в некоторой области функции удовлетворяют уравнению Лапласа.

Интегральное представление гармонических функций является основным аппаратом для изучения общих свойств гармонических функций. Краевые задачи для уравнения Лапласа или Пуассона при помощи потенциалов приводятся к интегральным уравнениям. С помощью интегральных уравнений удобно исследовать вопрос о разрешимости и единственности решения краевых задач. Наиболее важными краевыми задачами и с теоретической, и с практической точки зрения являются задачи Дирихле и Неймана.

Если краевые задачи для уравнения Лапласа рассматриваются в областях с гладкими границами, то получающиеся интегральные уравнения являются типа Фредгольма с вполне непрерывными операторами. В этом случае для их решения применима теория Фредгольма. Если же граница рассматриваемой области не является гладкой (области с углами), получается интегральное уравнение типа Фредгольма с интегральными операто-

Работа выполнена в соответствии с грантами РФФИ 10-01-00297а, 10-01-91219-ст-а и проектом 2.1.1-3828 Минобрнауки РФ

рами, не являющимися вполне непрерывными. В этом случае непосредственное применение теории Фредгольма не представляется возможным.

В данной книге рассматриваются задачи Дирихле для уравнения Лапласа в открытом квадрате. Эти задачи рассматриваются в пространствах непрерывных и ограниченно измеримых на квадрате функций.

Получено полное описание этих классов гармонических функций в терминах свойств граничных значений, плотностей потенциала двойного слоя и внутренних свойств гармонических функций в открытом квадрате. Изучены свойства оператора Пуассона и введенного авторами регуляризованного оператора.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in G \tag{1.1}$$

$$u\big|_{\Gamma} = \Psi(x, y), \tag{1.2}$$

где $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа, $\Psi(x, y)$ - заданная функция на границе $\Gamma = \{(x, y) : 0 \le x \le 1; y = 0;1\} \cup \{(x, y) : 0 \le y \le 1; x = 0;1\}$ квадрата $G = (0, 1) \times (0, 1)$.

Для круга гармоническая функция явно выражается через свое граничное значение с помощью интеграла Пуассона. Существование решения задачи (1.1), (1.2) доказано для достаточно широкого класса функций $\Psi(x, y)$ [1-6]; однако для рассматриваемой области гармоническая функция не имеет простого представления. Ниже решение задачи (1.1), (1.2) будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$u(M) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{d}{dn_Q} \left(\ln \frac{1}{R_{MQ}} \right) \Phi(Q) \, ds_Q, \tag{1.3}$$

где $\Phi(Q) = \Phi(\xi, \eta)$ – плотность, $M = M(x, y) \in G$, $R_{MQ}^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$, n_Q – внешняя нормаль в точке $Q \in \Gamma$ (кроме угловых точек).

Следует отметить, что если задача (1.1), (1.2) рассматривается в области с гладкой границей, то интегральное уравнение, получаемое для определения плотности $\Phi(Q)$, является уравнением типа Фредгольма и для ее решения применима теория Фредгольма [1-6].

В нашем случае получается интегральное уравнение типа Фредгольма с интегральным оператором, не являющимся вполне непрерывным. Поэтому непосредственное применение результатов теории интегральных уравнений Фредгольма не представляется возможным. В связи с этим представляет интерес изучение разрешимости соответствующих интегральных уравнений и получение точных и приближенных формул для представления решения задачи (1.1), (1.2).

Здесь предложен метод решения данной задачи, основанный на свойствах некоторых интегральных операторов, однозначной и корректной разрешимости некоторой системы интегральных уравнений. Отметим, что предложенный метод позволяет успешно исследовать задачу (1.1), (1.2) в пространствах Лебега L_p и Гельдера H^{α} и получить как точное решение, так и приближенное решение с помощью метода регуляризации [7-9].

Пусть $\varphi(x)$ является измеримой функцией на $(-\infty,\infty)$, для которой существует при $y>0$ интеграл:

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}.$$

Этот интеграл называется интегралом Пуассона [1,10] и определяет гармоническую функцию на верхней полуплоскости. Ниже интеграл Пуассона применяется для решения задачи (1.1), (1.2) с плотностью $\varphi(x)$, носитель которой принадлежит отрезку $[0,1]$.

Пусть $\Psi(x,y)\in C(\Gamma)$, где $C(\Gamma)$ – пространство непрерывных на Γ функций с нормой $\|\Psi\|_{C(\Gamma)}=\max\limits_{Q\in\Gamma}|\Psi(Q)|$. Положим

$$\psi_1(x)=\Psi(x,0),\quad \psi_2(y)=\Psi(1,y),\quad \psi_3(x)=\Psi(x,1),\quad \psi_4(y)=\Psi(0,y).$$

Очевидно, что $\psi_i\in C[0,1]$, $i=\overline{1,4}$, где $C[0,1]$ – пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций с нормой $\|\varphi\|_{C[0,1]}=\max\limits_{t\in[0,1]}|\varphi(t)|$.

Отыскание решения задачи (1.1), (1.2) в виде потенциала двойного слоя (1.3) эквивалентно нахождению искомого решения в виде суммы

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{4}u_i(x,y) \tag{1.*}$$

четырех гармонических функций:

$$\begin{cases} u_1(x,y)=\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_0^1\frac{\varphi_1(\xi)d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}, \\ u_2(x,y)=\dfrac{1-x}{\pi}\displaystyle\int_0^1\frac{\varphi_2(\eta)d\eta}{(1-x)^2+(y-\eta)^2}, \\ u_3(x,y)=\dfrac{1-y}{\pi}\displaystyle\int_0^1\frac{\varphi_3(\xi)d\xi}{(1-y)^2+(x-\xi)^2}, \\ u_4(x,y)=\dfrac{x}{\pi}\displaystyle\int_0^1\frac{\varphi_4(\eta)d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}, \end{cases} \tag{1.4}$$

где $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,4}$ – искомые функции на отрезке $[0;1]$.

Введем обозначения:

$$\begin{cases} (\Pi_1\varphi)(x,\,y)=(\Pi_0\varphi)(y,\,x), \\ (\Pi_2\varphi)(x,\,y)=(\Pi_0\varphi)(1-x,\,y), \\ (\Pi_3\varphi)(x,\,y)=(\Pi_0\varphi)(1-y,\,x), \\ (\Pi_4\varphi)(x,\,y)=(\Pi_0\varphi)(x,\,y), \end{cases} \tag{1.5}$$

где

$$(\Pi_0\varphi)(x,\,y)=\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}. \tag{1.6}$$

Тогда равенство (1.*) можно представить в виде $u(x,y)=(\Pi\Phi)(x,y)$, где

$$(\Pi\Phi)(x,y)=\sum_{i=1}^{4}(\Pi\varphi_i)(x,y). \tag{1.7}$$

Основными результатами являются следующие теоремы, которые относятся к гармоническим функциям, принадлежащим пространствам непрерывных функций $C(G)$ и ограниченных измеримых функций $L_\infty(G)$.

Теорема 1.1. ***Следующие условия эквивалентны:***

а) ***гармоническая в области G функция $u(x,\,y)$ равномерно непрерывна в этой области*;**

б) ***гармоническая в области*** G ***функция*** $u(x, y)$ ***имеет непрерывное продолжение на замкнутую область*** $\overline{G} = G \bigcup \Gamma$;

в) ***функция*** $u(x, y)$ ***представима в виде*** $u = \sum_{i=1}^{4} u_i$, ***где функции,*** $u_i = u_i(x, y)$, $i = \overline{1, 4}$ ***определены равенствами*** **(1.4),** ***а непрерывная вектор-функция*** $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\text{т}}$ ***удовлетворяет условию согласованности в угловых точках области, то есть***

$$\varphi_1(0) = \varphi_4(0), \quad \varphi_1(1) = \varphi_2(0), \quad \varphi_3(1) = \varphi_2(1), \quad \varphi_3(0) = \varphi_4(1).$$

Теорема 1.2. ***Следующие условия эквивалентны:***

а) ***гармоническая в области*** G ***функция*** $u(x, y)$ ***– ограничена;***

б) ***функция*** $u(x, y)$ ***представима в виде*** $u = \sum_{i=1}^{4} u_i$ ***где функции*** $u_i = u_i(x, y)$, $i = \overline{1, 4}$ ***определены равенствами*** **(1.4),** ***а функции*** $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, 4}$ ***принадлежат пространству ограниченных измеримых функций на отрезке*** $[0,1]$: $\varphi_i \in L_\infty[0,1]$, $i = \overline{1,4}$.

Теорема 1.3. ***Для того чтобы задача Дирихле*** **(1.1), (1.2)** ***имела непрерывно продолжимое решение на замкнутую область*** $\overline{G}$, ***необходимо и достаточно, чтобы функция*** $\Psi(x,y)$ ***являлась непрерывной на границе*** Γ ***квадрата*** G.

Доказательства теорем 1.1 – 1.3 приведены в п. 9.

Теорема 1.4. ***Для того чтобы задача Дирихле*** **(1.1), (1.2)** ***имела ограниченное решение в области*** G, ***необходимо и достаточно, чтобы функция*** $\Psi(x,y)$ ***являлась ограниченной на границе*** Γ ***квадрата*** G.

Замечание. Определение граничного значения (1.2) в теореме 1.4 дано в § 11.

Доказательства теорем 1.1 - 1.3 приведены в п. 9, а теоремы 1.4 в § 9.

2. ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Определим в полуплоскости $y>0$ с помощью интеграла Пуассона [1,10] функцию

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}, \tag{2.1}$$

где плотность $\varphi(x)$ является ограниченной измеримой функцией на $(-\infty,\infty)$, то есть $\varphi\in L_\infty$ ($\mathbb{R}$). Ядро Пуассона

$$P(x,y)=\frac{y}{\pi(x^2+y^2)} \tag{2.2}$$

является гармонической функцией в области $y>0$: $\Delta P=0$. Поэтому, произведя операцию дифференцирования функции $u(x,y)$ под знаком интеграла, которая является законной в силу ограниченности функции $\varphi(x)$ [11], убеждаемся, что интеграл Пуассона (2.1) определяет гармоническую функцию в области $y>0$.

Для каждой точки $x\in$ $\mathbb{R}$ рассмотрим предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi(\xi+x)d\xi,\ \ h>0. \tag{2.3}$$

Если для данного $x\in$ $\mathbb{R}$ существует предел (2.3), то его значение обозначим $\overline{\varphi}(x)$:

$$\overline{\varphi}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi(\xi+x)d\xi.$$

Согласно теореме Лебега [12], область определения $D(\overline{\varphi})$ функции $\overline{\varphi}(x)$ имеет полную меру на любом отрезке числовой оси.

Через $D_c(\varphi)$ обозначим множество точек непрерывности функции $\varphi(x)$. Заметим, что во всех точках множества $D_c(\varphi)$ предел (2.3) существует, т.е. множество $D_c(\varphi)$ содержится в области определения функции $\overline{\varphi}(x)$: $D_c(\varphi)\subset D(\overline{\varphi})$, причем, если $x\in D_c(\varphi)$, то

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x). \tag{2.4}$$

Функцию $u(x,y)$ на граничные точки $(x,0)$ области $y>0$ продолжим двумя способами:

$$\bar{u}_{\varphi}(x,y)=\begin{cases} u(x,y), & \text{если} \quad y>0, -\infty<x<\infty, \\ \varphi(x), & \text{если} \quad y=0, x\in D_c(\varphi); \end{cases}$$

$$\bar{u}_{\bar{\varphi}}(x,y)=\begin{cases} u(x,y), & \text{если} \quad y>0, -\infty<x<\infty, \\ \bar{\varphi}(x), & \text{если} \quad y=0, x\in D(\bar{\varphi}). \end{cases}$$

Отметим, что функция $\bar{u}_{\bar{\varphi}}(x,y)$ является продолжением функции $\bar{u}_{\varphi}(x,y)$, причем, если $x\in D_c(\varphi)$, то, в силу (2.4), справедливо равенство $\bar{u}_{\bar{\varphi}}(x,y)=\bar{u}_{\varphi}(x,y)$.

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна на всей числовой оси, то функции $\bar{u}_{\varphi}(x,y)$ и $\bar{u}_{\bar{\varphi}}(x,y)$ определены на замкнутой области $y\ge 0$ и тождественно равны

$$\bar{u}_{\bar{\varphi}}(x,y)\equiv\bar{u}_{\varphi}(x,y), \quad y\ge 0, \quad -\infty<x<\infty.$$

В общем случае, когда $\varphi(x)$ – произвольная ограниченная измеримая функция, то $D_c(\varphi)\ne D(\bar{\varphi})$, причем $D_c(\varphi)$ может быть пустым множеством, в то время как $D(\bar{\varphi})$ имеет полную меру на любом отрезке числовой оси и может совпадать с числовой осью.

Лемма 2.1. ***Пусть $\varphi(x)$ – ограниченная измеримая функция на всей числовой оси и $x_0\in D_c(\varphi)$. Тогда функция $\bar{u}_{\varphi}(x,y)$ ограничена в области $y>0$ и непрерывна в точке $(x_0,0)$.***

Доказательство. Очевидно, что функция $u(x,y)$ при $y>0$ удовлетворяет неравенству $|u(x,y)|\le\|\varphi\|_{L_\infty[0,\,1]}$.

Так как x_0 является точкой непрерывности функции $\varphi(x)$, то по заданному $\varepsilon>0$ можно найти $\delta>0$ такое, что

$$|\varphi(\eta)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |\eta-x_0|<2\delta. \tag{2.5}$$

Используя тождество

$$\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x_0)\,d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}\equiv\varphi(x_0),\quad y>0,-\infty<x<\infty,$$

будем иметь:

$$u(x,y)-\varphi(x_0)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)-\varphi(x_0)}{y^2+(x-\xi)^2}d\xi=$$

$$=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x_0)}{y^2+t^2}dt=\frac{y}{\pi}\int_{|t|<\delta}+\frac{y}{\pi}\int_{|t|\ge\delta}\equiv I_{1\delta}+I_{2\delta}.$$

Для первого интеграла $I_{1\delta}$ имеем:

$$|I_{1\delta}|=\left|\frac{y}{\pi}\int_{|t|<\delta}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x_0)}{y^2+t^2}dt\right|\le$$

$$\le\sup_{|t|<\delta}|\varphi(x+t)-\varphi(x_0)|\cdot\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{y^2+t^2}=\sup_{|t|<\delta}|\varphi(x+t)-\varphi(x_0)|.$$

Отсюда и из неравенства (2.5) имеем:

$$|I_{1\delta}|\le\sup_{|t|<\delta}|\varphi(x+t)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad\text{при}\qquad|x-x_0|<\delta. \tag{2.6}$$

Для второго интеграла $I_{2\delta}$ имеем:

$$|I_{2\delta}|\le\frac{y}{\pi}\int_{|t|\ge\delta}\frac{|\varphi(x+t)-\varphi(x_0)|}{y^2+t^2}dt\le$$

$$\le 4\sup_{-\infty<t<\infty}|\varphi(t)|\cdot\frac{y}{\pi}\int_{|t|\ge\delta}\frac{dt}{y^2+t^2}=4\sup_{-\infty<t<\infty}|\varphi(t)|\cdot\left(\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}\right). \tag{2.7}$$

Из соотношения $\lim\limits_{y\to0+}\operatorname{arctg}\dfrac{\delta}{y}=\dfrac{\pi}{2}$ следует существование такого числа $y_0>0$, что при $0<y<y_0$ имеет место неравенство

$$0<\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}<\frac{\varepsilon}{8\sup\limits_{-\infty<t<\infty}|\varphi(t)|}.$$

Из полученного неравенства и из (2.7) имеем:

$$|I_{2\delta}|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.8}$$

Следовательно, имеем

$$\left|u(x,y)-\varphi(x_0)\right|<\varepsilon \quad \text{при} \quad 0<y<y_0,\ \left|x-x_0\right|<\delta. \tag{2.9}$$

Пусть (x,y) – произвольная точка. Если $y>0$, то $\overline{u}_{\varphi}(x,y)=u(x,y)$ для всех $x\in(-\infty,\infty)$. Если $y=0$, то $\overline{u}_{\varphi}(x,0)=\varphi(x)$ для всех $x\in D_c(\varphi)$. Поэтому, если $x\in D_c(\varphi)$ и $\left|x-x_0\right|<\delta$, то в силу (2.5) имеем

$$\left|\overline{u_{\varphi}}(x,0)-\varphi(x_0)\right|=\left|\varphi(x)-\varphi(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.10}$$

Из оценок (2.9) и (2.10) имеем

$$\left|\overline{u}_{\varphi}(x,y)-\overline{u}_{\varphi}(x,0)\right|<\varepsilon \quad \text{при} \quad 0\le y<y_0,\quad \left|x-x_0\right|<\delta.$$

Лемма 2.1 доказана.

Следствие 2.1. ***Если $\varphi(x)$ непрерывная функция на всей числовой оси, то $\overline{u}_{\varphi}(x,y)$ является непрерывной функцией в замкнутой области $y\ge 0$ и справедливы равенства***

$$\sup_{\substack{-\infty<x<\infty\\ y\ge 0}}\left|\overline{u}_{\varphi}(x,y)\right|=\sup_{\substack{-\infty<x<\infty\\ y>0}}\left|u(x,y)\right|=\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\varphi(x)\right|. \tag{2.11}$$

Действительно, непрерывность функции $\overline{u}_{\varphi}(x,y)$ в замкнутой области $y\ge 0$ следует из леммы 2.1. Из оценки

$$\left|u(x,y)\right|\le\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\varphi(x)\right|\cdot\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}=\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\varphi(x)\right|$$

и непрерывности функции $\overline{u}_{\varphi}(x,y)$ на замкнутой области $y\ge 0$ следует равенство (2.11).

Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_4(y)$ определены на числовой оси и их носители сосредоточены на отрезках $[0,1]$ осей абсцисс и ординат, соответственно; пусть на этих отрезках обе функции непрерывны.

Потенциал

$$u_1(x,y)=(\Pi_1\varphi_1)(x,y)\equiv\frac{y}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_1(\xi)\,d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}$$

является гармонической функцией в области $y>0$, а потенциал

$$u_4(x,y) = (\Pi_4\varphi_4)(x,y) \equiv \frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi_4(\eta)d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}$$

– в области $x>0$. Их сумма

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_4(x,y) \tag{2.12}$$

является гармонической функцией в пересечении этих областей, т.е. в первой четверти координатной плоскости: $x>0,\ y>0$. Из леммы 2.1 вытекает, что функция $\bar{u}_{1\varphi_1}(x,y)$ определена и непрерывна на замкнутой полуплоскости $y \geq 0$, кроме, быть может, точек $(0,0)$ и $(1,0)$, а функция $\bar{u}_{4\varphi_4}(x,y)$ – кроме точек $(0,0)$ и $(0,1)$. Следовательно, функция

$$u(x,y) = \bar{u}_{1\varphi_1}(x,y) + \bar{u}_{4\varphi_4}(x,y)$$

определена и непрерывна в замкнутой области $x \geq 0,\ y \geq 0$, кроме, быть может, трех точек $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Из этих трех точек только одна $(0,0)$ относится к обеим функциям. Нас интересует вопрос существования предела функции (2.12), когда $(x,y) \to (0+,\ 0+)$.

Лемма 2.2. ***Для того чтобы функция* (2.12) *имела предел при*** $\boldsymbol{(x,y) \to (0+,\ 0+)}$***, необходимо и достаточно выполнение равенства***

$$\boldsymbol{\varphi_1(0) = \varphi_4(0).} \tag{2.13}$$

Причем, если существует этот предел, то

$$\lim_{(x,y)\to(0+,\ 0+)} \boldsymbol{u(x,y) = \frac{3\varphi_1(0)}{2}}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Достаточность. Представим функции $u_1(x,y)$, $u_4(x,y)$ в следующем виде

$$u_1(x,y) = v_1(x,y) + \frac{\varphi_1(0)\cdot y}{\pi}\int_0^1 \frac{d\xi}{y^2+(x-\xi)^2},$$

$$u_4(x,y) = v_4(x,y) + \frac{\varphi_4(0)\cdot x}{\pi}\int_0^1 \frac{d\eta}{x^2+(y-\eta)^2},$$

где $v_1(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_0^1 \frac{(\varphi_1(\xi)-\varphi_1(0))}{y^2+(x-\xi)^2}d\xi$, $\quad v_4(x,y) = \frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{(\varphi_4(\eta)-\varphi_4(0))}{x^2+(y-\eta)^2}d\eta$.

Из леммы 2.1 вытекает существование предела функций $v_1(x,y)$ и $v_4(x,y)$ при $(x,y)\to(0,0)$, $x>0,\ y>0$, причем

$$\lim_{(x,y)\to(0+,\,0+)} v_1(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0+,\,0+)} v_4(x,y)=0.$$

Таким образом, существование предела функции (2.12) при $(x,y)\to(0+,\,0+)$ эквивалентно существованию предела у суммы

$$w(x,y)=\frac{\varphi_1(0)\cdot y}{\pi}\int_0^1\frac{d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}+\frac{\varphi_4(0)\cdot x}{\pi}\int_0^1\frac{d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}. \qquad (2.15)$$

Вычисляя эти интегралы, в силу (2.13) имеем:

$$w(x,y)=\frac{\varphi_1(0)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)+\frac{\varphi_4(0)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-y}{x}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=$$

$$=\frac{\varphi_1(0)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{1-y}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right).$$

Так как $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{\pi}{2}$ для всех $x>0,\ y>0$ и

$$\lim_{(x,y)\to(0+,\,0+)}\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}=\lim_{(x,y)\to(0+,\,0+)}\operatorname{arctg}\frac{1-y}{x}=\frac{\pi}{2},$$

то окончательно получим:

$$\lim_{(x,y)\to(0+,\,0+)} w(x,y)=\frac{3\varphi_1(0)}{2}.$$

Достаточность и равенство (2.14) доказаны.

Необходимость. Как было отмечено в доказательстве достаточности, из существования предела функции (2.12) при $(x,\,y)\to(0+,0+)$ следует существование предела

$$\lim_{(x,y)\to(0+,\,0+)} w(x,y). \qquad (2.16)$$

Пусть существует предел (2.16). Докажем справедливость равенства (2.13).

Представим функцию $w(x,y)$ в виде

$$w(x,y)=\frac{\varphi_1(0)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}+\frac{\varphi_4(0)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1-y}{x}+\frac{\varphi_1(0)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)+$$

$$+\frac{\varphi_4(0)-\varphi_1(0)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{\varphi_1(0)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}+\frac{\varphi_4(0)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1-y}{x}+$$

$$+\frac{\varphi_1(0)}{2}+\frac{\varphi_4(0)-\varphi_{14}(0)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Если $y=x^2$ и $x\to 0+$, то $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x}\to 0$, и, если $x=y^2$ и $y\to 0+$, то $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}\frac{y}{y^2}\to\frac{\pi}{2}$, поэтому $\frac{\varphi_4(0)-\varphi_1(0)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ имеет предел при $(x,y)\to(0+,0+)$, тогда и только тогда, когда $\varphi_4(0)=\varphi_1(0)$.

Необходимость и лемма 2.2 доказаны.

Теорема 2.1. ***Пусть плотность $\Phi(x,y)$ является непрерывной функцией на границе Γ квадрата G. Тогда гармоническая функция, определяемая потенциалом двойного слоя* (1.3), *имеет непрерывное продолжение на замкнутом $\overline{G}$.***

Доказательство. Полагая

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x)=\Phi(x,0), \quad \varphi_2(y)=\Phi(1,y),\\ &\varphi_3(x)=\Phi(x,1), \quad \varphi_4(y)=\Phi(0,y),\end{aligned} \tag{2.17}$$

потенциал (1.3) можно представить в виде

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{4}u_i(x,y), \tag{2.18}$$

где $u_i(x,y)$, $i=\overline{1,4}$ определены равенствами (1.4).

Заметим, что пересечением областей гармоничности функций $u_i(x,y)$, $i=\overline{1,4}$ является квадрат G. В силу леммы 2.1 во всех точках границы Γ, кроме угловых, функция (2.18) имеет непрерывное продолжение. Исследуем непрерывность функции (2.18) в угловых точках.

Рассмотрим точку $(0,0)$ (остальные точки $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ рассматриваются аналогичным образом).

Так как точка $(0,0)$ принадлежит области гармоничности функций $u_2(x,y)$ и $u_3(x,y)$, то в этой точке сумма $u_2(x,y)+u_3(x,y)$ является непрерывной функцией. Следовательно, непрерывная продолжимость функции (2.18) в точке $(0,0)$ эквивалентна непрерывной продолжимости функции

$$u_1(x,y)+u_4(x,y) \tag{2.19}$$

в этой точке.

Из первого и четвертого равенства (2.17) и непрерывности плотности $\Phi(x, y)$ в точке $(0, 0)$ вытекает: $\varphi_1(0)=\varphi_4(0)$.

Из этого равенства и леммы 2.2 вытекает, что функция (2.19) непрерывно продолжима в точке $(0, 0)$.

Теорема 2.1 доказана.

Таким образом, нами установлено, что, если плотность $\Phi(x, y)$ является непрерывной функцией на Γ, то функция $u(x, y)$, определенная равенством (2.18), непрерывно продолжима на замкнутую область $\overline{G}$. Далее, так как функция $\Psi(x, y)$ является граничным значением гармонической функции (2.18), т.е. $u|_{\Gamma}=\Psi(x, y)$, то кроме угловых точек границы имеем

$$\varphi_1(x)+\frac{1-x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_2(\eta)d\eta}{(1-x)^2+\eta^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_3(\xi)d\xi}{1+(x-\xi)^2}+\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_4(\eta)d\eta}{x^2+\eta^2}=\psi_1(x),$$

$$\frac{y}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_1(\xi)d\xi}{y^2+(1-\xi)^2}+\varphi_2(y)+\frac{1-y}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_3(\xi)d\xi}{(1-y)^2+(1-\xi)^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_4(\eta)d\eta}{1+(y-\eta)^2}=\psi_2(y),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_1(\xi)d\xi}{1+(x-\xi)^2}+\frac{1-x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_2(\eta)d\eta}{(1-x)^2+(1-\eta)^2}+\varphi_3(x)+\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_4(\eta)d\eta}{x^2+(1-\eta)^2}=\psi_3(x),$$

$$\frac{y}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_1(\xi)d\xi}{y^2+\xi^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_2(\eta)d\eta}{1+(y-\eta)^2}+\frac{1-y}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_3(\xi)d\xi}{(1-y)^2+\xi^2}+\varphi_4(y)=\psi_4(y).$$

Эти равенства устанавливают связь между плотностями $\varphi_i(x),\ i=\overline{1,4}$ и граничными значениями $\psi_i(x),\ i=\overline{1,4}$.

Введем обозначения:

$$(K\varphi)(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\pi}\displaystyle\int_0^1\frac{\varphi(\xi)d\xi}{x^2+\xi^2}, & 0<x\le 1,\\[2ex] \dfrac{\varphi(0)}{2}, & x=0,\end{cases}\tag{2.20}$$

$$(K_0\varphi)(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\xi)d\xi}{1+(x-\xi)^2},\quad 0\le x\le 1,\tag{2.21}$$

$$(S\varphi)(x)=\varphi(1-x),\quad 0\le x\le 1.\tag{2.22}$$

Тогда вышеприведенную систему можно записать более компактно

$$\begin{cases} \varphi_1(x)+(SK\varphi_2)(x)+(K_0\varphi_3)(x)+(K\varphi_4)(x)=\psi_1(x), \\ (KS\varphi_1)(y)+\varphi_2(y)+(SKS\varphi_3)(y)+(K_0\varphi_4)(y)=\psi_2(y), \\ (K_0\varphi_1)(x)+(SKS\varphi_2)(x)+\varphi_3(x)+(KS\varphi_4)(x)=\psi_3(x), \\ (K\varphi_1)(y)+(K_0\varphi_2)(y)+(SK\varphi_3)(y)+\varphi_4(y)=\psi_4(y). \end{cases} \tag{2.23}$$

Система интегральных уравнений (2.23) является основным инструментом в дальнейшем нашем исследовании.

3. ГЛАДКОСТЬ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА *K*

Интегральный оператор

$$(K\varphi)(x)=\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\xi)}{x^2+\xi^2}d\xi$$

каждой функции $\varphi\in L_1[0,1]$ ставит в соответствие функцию $(K\varphi)(x)=\psi(x)$, определенную на промежутке $(0,1]$. Точка $x=0$ для функции $\psi(x)$ является особой точкой, и формула, определяющая ее значения, в этой точке не имеет смысла. Поэтому представляет интерес выделение класса функций φ, для которых функция $\psi(x)$ при $x\to 0$ имеет предел или остается ограниченной.

Сначала изучим некоторые свойства гладкости функции $\psi(x)$ на промежутке $(0,1]$.

Лемма 3.1. ***Пусть функция $\varphi(x)\in L_1[0,1]$. Тогда для любого $\delta>0$ существуют числа $C_m(\delta)>0$, такие, что функция $\psi(x)=(K\varphi)(x)$ принадлежит пространству $C^\infty[\delta,1]$, а для производных справедлива оценка***

$$\left|\psi^{(m)}(x)\right|\le C_m(\delta)\|\varphi\|_{L_1[0,1]} \qquad (\delta\le x\le 1).$$

Доказательство. При $m=0$ имеем

$$\left|(K\varphi)(x)\right|\le\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{x}{x^2+\xi^2}|\varphi(\xi)|d\xi\,.$$

Функция $\dfrac{x}{x^2+\xi^2}$ по переменной ξ на отрезке $[0,1]$ является убывающей и, следовательно,

$$\max_{0\le\xi\le1}\frac{x}{x^2+\xi^2}=\frac{x}{x^2+0^2}=\frac{1}{x}\le\frac{1}{\delta}, \qquad (\delta\le x\le 1).$$

Отсюда имеем

$$\left|(K\varphi)(x)\right|\le\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{x}{x^2+\xi^2}|\varphi(\xi)|d\xi\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\max_{0\le\xi\le1}\frac{x}{x^2+\xi^2}\int_0^1|\varphi(\xi)|d\xi=\frac{1}{\pi\delta}\|\varphi\|_{L_1}.$$

Докажем существование производной функции $(K\varphi)(x)$. Пусть $\{x_k\}$ - произвольная последовательность, сходящаяся к точке $x:\delta<x<1$. Согласно определению производной, имеем

$$\frac{(K\varphi)(x_k)-(K\varphi)(x)}{x_k-x}=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\xi^2-x_kx}{(x_k^2+\xi^2)(x^2+\xi^2)}\varphi(\xi)d\xi.$$

Положим

$$f_k(\xi)=\frac{\xi^2-x_kx}{(x_k^2+\xi^2)(x^2+\xi^2)}\varphi(\xi),$$

$$f(\xi)=\frac{\xi^2-x^2}{(x^2+\xi^2)^2}\varphi(\xi), \qquad F(\xi)=\frac{2|\varphi(\xi)|}{\delta^4}.$$

Последовательность $\{f_k(\xi)\}$ при $k\to\infty$ для каждого $\xi\in[0,1]$ сходится к функции $f(\xi)$. Далее, начиная с некоторого номера k, справедлива оценка $|f_k(\xi)|\le F(\xi)$. Тогда, согласно теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [9,10], будем иметь

$$(K\varphi)'(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{(K\varphi)(x_k)-(K\varphi)(x)}{x_k-x}=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\xi^2-x^2}{(x^2+\xi^2)^2}\varphi(\xi)d\xi. \tag{3.1}$$

Оценим первую производную

$$|(K\varphi)'(x)|\le\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{|\xi^2-x^2|}{(x^2+\xi^2)^2}|\varphi(\xi)|d\xi\le\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{x^2}{x^4}|\varphi(\xi)|d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi x^2}\int_0^1|\varphi(\xi)|d\xi\le\frac{1}{\pi x^2}\|\varphi\|_{L_1}.$$

Мы получим такой же результат (см. (3.1)), если продифференцируем ядро оператора

$$\left(K\varphi\right)(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{x}{x^2+\xi^2}\varphi(\xi)d\xi$$

как интеграл, зависящий от параметра x. Действительно,

$$(K\varphi)'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{x^2+\xi^2}\right)_x'\varphi(\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\xi^2-x^2}{(x^2+\xi^2)^2}\varphi(\xi)d\xi\,.$$

В силу этого замечания производная m-го порядка $(K\varphi)^{(m)}(x)$ представима в виде

$$(K\varphi)^{(m)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{x^2+\xi^2}\right)_x^{(m)}\varphi(\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{P_m\left(x,\xi\right)}{(x^2+\xi^2)^{m+1}}\varphi(\xi)d\xi\,,$$

где $P_m\left(x,\xi\right)$ - многочлен степени не выше m по каждой переменной. Так как $\dfrac{P_m\left(x,\xi\right)}{(x^2+\xi^2)^{m+1}}$ является отношением двух непрерывных на отрезке $\left[\delta,1\right]$ функций, причем знаменатель удовлетворяет неравенству $(x^2+\xi^2)^{m+1}\geq\delta^{2(m+1)}>0$, то $(K\varphi)^{(m)}(x)$ является непрерывной на отрезке $\left[\delta,1\right]$ и, следовательно, ограниченной функцией.

Лемма 3.1 доказана.

Следствие 3.1. ***Пусть функция*** $\boldsymbol{\varphi\left(x\right)\in L_1\left[0,1\right]}$***. Тогда функция*** $\boldsymbol{\psi\left(x\right)=\left(K\varphi\right)\left(x\right)}$ ***является бесконечно дифференцируемой на промежутке*** $\boldsymbol{\left(0,1\right]}$**.**

Перейдем к изучению поведения функции $\psi\left(x\right)=\left(K\varphi\right)\left(x\right)$ при $x\to 0+$.

Лемма 3.2. ***Пусть*** $\boldsymbol{\varphi(\xi)\in L_1\left[0,1\right]}$ ***и имеет место равенство***

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\int_0^x\varphi(\xi)d\xi=A. \tag{3.2}$$

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{x\to 0+}\left(K\varphi\right)(x)=\frac{A}{2}.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем:

$$\left(K\varphi\right)(x)=\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\xi)d\xi}{x^2+\xi^2}=\frac{x}{\pi\left(x^2+\xi^2\right)}\int_0^1\varphi(s)ds+\frac{2x}{\pi}\int_0^1\int_0^\xi\varphi(s)ds\frac{\xi d\xi}{(x^2+\xi^2)^2}\,. \tag{3.3}$$

Следовательно,

$$\frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi(\xi)d\xi}{x^2+\xi^2} = \frac{x}{\pi(1+x^2)}\int_0^1 \varphi(s)ds + \frac{2x}{\pi}\int_0^1\int_0^{\xi} \varphi(s)ds\frac{\xi d\xi}{\left(x^2+\xi^2\right)^2}. \tag{3.4}$$

Полагая здесь $\varphi(\xi)\equiv 1$, имеем:

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{d\xi}{x^2+\xi^2} = \frac{x}{\pi(1+x^2)} + \frac{2x}{\pi}\int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{\left(x^2+\xi^2\right)^2}, \qquad \forall x>0. \tag{3.5}$$

Так как $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}x$, то при $x\to 0$ из (3.5) получаем

$$\frac{2x}{\pi}\int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{\left(x^2+\xi^2\right)^2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}x\right) - \frac{x}{\pi(1+x^2)} \to \frac{1}{2}. \tag{3.6}$$

Продолжим равенство (3.3):

$$\left(K\varphi\right)(x) = \frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)}\int_0^1 \varphi(s)ds + \frac{2x}{\pi}\int_0^1 \frac{\xi^2}{\left(x^2+\xi^2\right)^2}\left[\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}\varphi(s)ds - A\right]d\xi +$$

$$+\frac{2xA}{\pi}\int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{\left(x^2+\xi^2\right)^2} \equiv I_0 + I_1 + I_2. \tag{3.7}$$

В силу (3.6), имеем

$$\lim_{x\to 0} I_2 = \frac{A}{2}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим I_1. Для этого вводим обозначение

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}\varphi(s)ds - A \quad \text{при} \quad \xi>0; \qquad \psi(0)=0.$$

Из (3.2) следует, что $\psi(\xi)$ непрерывна на $[0,1]$. Имеем

$$I_1 = \frac{2x}{\pi}\int_0^1 \frac{\xi^2\psi(\xi)}{\left(x^2+\xi^2\right)^2}d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/x}\frac{u^2\psi(xu)}{(1+u^2)^2}du =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{1/x_0}\frac{u^2\psi(xu)}{\left(1+u^2\right)^2}du + \frac{2}{\pi}\int_{1/x_0}^{1/x}\frac{u^2\psi(xu)}{\left(1+u^2\right)^2}du \equiv I_{11} + I_{12} \tag{3.9}$$

где $0<x<x_0<1$.

Обозначив $M = \sup\limits_{0<\xi\le 1}\left|\psi(\xi)\right|$ (очевидно, что $M<\infty$), получим

$$\left|I_{12}\right| \le \frac{2}{\pi}\int\limits_{1/x_0}^{1/x}\frac{u^2\left|\psi(xu)\right|}{(1+u^2)^2}du \le \frac{2M}{\pi}\int\limits_{1/x_0}^{1/x}\frac{u^2}{(1+u^2)^2}du. \qquad (3.10)$$

Так как

$$\frac{2x}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\xi^2 d\xi}{\left(x^2+\xi^2\right)^2} = \left|\begin{matrix}\xi = xu\\ d\xi = xdu\end{matrix}\right| = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x}\frac{u^2du}{(1+u^2)^2} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x}\frac{\xi^2 d\xi}{\left(1+\xi^2\right)^2},$$

то из равенства (3.5) находим, что

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x}\frac{\xi^2 d\xi}{\left(1+\xi^2\right)^2} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right). \qquad (3.11)$$

Используя (3.11), продолжим неравенство (3.10):

$$\left|I_{12}\right| \le \frac{2M}{\pi}\int\limits_{1/x_0}^{1/x}\frac{u^2du}{\left(1+u^2\right)^2} = \frac{2M}{\pi}\left[\int\limits_0^{1/x}\frac{u^2du}{(1+u^2)^2} - \int\limits_0^{1/x_0}\frac{u^2du}{(1+u^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{M}{\pi}\left[\left(\operatorname{arctg}x_0 - \operatorname{arctg}x\right) + \left(\frac{x_0}{1+x_0^2} - \frac{x}{1+x^2}\right)\right] < \frac{M}{\pi}\left[\operatorname{arctg}x_0 + \frac{x_0}{1+x_0^2}\right]. \qquad (3.12)$$

Так как на отрезке $[0,1]$ выполняются неравенства $\operatorname{arctg}x_0 < x_0$ и $\dfrac{x_0}{1+x_0^2} < x_0$,

то $\left|I_{12}\right| \le \dfrac{M}{\pi}\left[x_0 + x_0\right] < \dfrac{2M}{\pi}x_0$.

Пусть $\varepsilon > 0$-произвольное число. Если x_0 выбирать из условия $\dfrac{2M}{\pi}x_0 = \varepsilon$, то для любого $x: 0 < x < x_0$ выполняется неравенство

$$\left|I_{12}\right| < \varepsilon. \qquad (3.13)$$

Фиксируем x_0 и оценим I_{11}:

$$\left|I_{11}\right| \le \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x_0}\frac{u^2\left|\psi(xu)\right|}{\left(1+u^2\right)^2}du \le \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x_0}\frac{u^2du}{\left(1+u^2\right)^2}\max_{0\le u\le 1/x_0}\left|\psi(xu)\right| \le \max_{0\le u\le 1/x_0}\left|\psi(xu)\right|, \qquad (3.14)$$

так как

$$M_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x_0}\frac{u^2du}{\left(1+u^2\right)^2} \le \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{u^2du}{\left(1+u^2\right)^2} \le \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2} = 1.$$

Но $\max\limits_{0\le u\le 1/x_0}\left|\psi(xu)\right| = \max\limits_{0\le\xi\le x/x_0}\left|\psi(\xi)\right| \to 0$ при $x\to 0$, следовательно, по заданному $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$, такое, что при $0<x<\delta$ выполняется неравенство $\max\limits_{1\le\xi\le\delta/x_0}\left|\psi(\xi)\right|<\varepsilon$. Учитывая это, (3.14) получим

$$\left|I_{11}\right|<\varepsilon. \tag{3.15}$$

Переходя к модулю в равенстве (3.9) и учитывая (3.13) и (3.15), получим

$$\left|I_1\right|<2\varepsilon. \tag{3.16}$$

Из (3.16), (3.8) и (3.7) следует утверждение леммы.

Лемма 3.2 доказана.

Следствие 3.2. ***Пусть функция*** $\boldsymbol{\varphi(x)\in L_1[0,1]}$ ***и является непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x=0}$***. Тогда справедливо равенство***

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\xi)d\xi}{x^2+\xi^2}=\frac{1}{2}\varphi(0).$$

Доказательство. В силу леммы 3.2 достаточно доказать справедливость равенства

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\varphi(\xi)\,d\xi=\varphi(0). \tag{3.17}$$

Имеем

$$\frac{1}{x}\int_0^x\varphi(\xi)\,d\xi=\frac{1}{x}\int_0^x\left[\varphi(\xi)-\varphi(0)\right]d\xi+\varphi(0). \tag{3.18}$$

Из непрерывности в точке $x=0$ функции $\varphi(x)$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$, что из условия $0<x<\delta$ вытекает неравенство

$$\left|\varphi(x)-\varphi(0)\right|<\varepsilon. \tag{3.19}$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x[\varphi(\xi)-\varphi(0)]d\xi\right| \le \frac{1}{x}\int_0^x\left|\varphi(\xi)-\varphi(0)\right|d\xi < \frac{\varepsilon}{x}\int_0^x d\xi=\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon>0$ - произвольное число, то из (3.18) и (3.19) имеем (3.17).

Следствие 3.2 доказано.

Следствие 3.3. ***Оператор*** $\boldsymbol{K}$ ***действует в пространстве непрерывных функций: если*** $\boldsymbol{\varphi(x)}$ ***непрерывная функция на отрезке*** $\boldsymbol{[0,1]}$***, то функция*** $\boldsymbol{\psi(x)=(K\varphi)(x)}$ ***непрерывна на отрезке*** $\boldsymbol{[0,1]}$***.***

Используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, установим свойства непрерывности оператора K относительно различных сходимостей.

Теорема Лебега [12,13]. ***Пусть почти при всех*** $\xi \in [a,b]$ ***выполнены условия:*** $f_k(\xi) \to f(\xi)$, $k \to \infty$, $|f_k(\xi)| \le F(\xi)$, $k = 1,2,\ldots$ ***и*** $F(\xi) \in L_1[a,b]$. ***Тогда*** $f(\xi) \in L_1[a,b]$, ***и возможен предельный переход под знаком интеграла, то есть***

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(\xi) d\xi = \int_a^b f(\xi) d\xi .$$

Лемма 3.3. ***Пусть последовательность*** $\{\varphi_k(x)\} \subset C[0,1]$ ***удовлетворяет условиям:***

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \varphi(x),\ x \in [0,1],\ |\varphi_k(x)| \le \varphi_0(x), \quad k = 1,2,\ldots, \quad x \in [0,1],$$

где $\varphi_0(x) \in L_1[0,1]$. ***Тогда***

$$\lim_{k\to\infty} K\varphi_k(x) = K\varphi(x),\ x \in (0,1]. \tag{3.20}$$

Если $\varphi(x)$ ***является непрерывной в точке*** $x = 0$, ***то*** **(3.20)** ***будет иметь место на всем отрезке*** $[0,1]$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Полагая

$$f_k(\xi) = \frac{x\varphi_k(x)}{\pi\left(x^2 + \xi^2\right)}, \quad f(\xi) = \frac{x\varphi(x)}{\pi\left(x^2 + \xi^2\right)}, \quad f_0(\xi) = \frac{x\varphi_0(x)}{\pi\left(x^2 + \xi^2\right)},$$

легко видеть выполнение всех требований теоремы Лебега при $x > 0$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(\xi) d\xi = \int_0^1 f(\xi) d\xi \ \Rightarrow \ \lim_{k\to\infty} \frac{x}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_k(\xi) d\xi}{x^2 + \xi^2} = \frac{x}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi(\xi) d\xi}{x^2 + \xi^2}, \qquad 0 < x \le 1,$$

и

$$\lim_{k\to\infty} K\varphi_k(0) = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \varphi_k(0) = \frac{1}{2} \varphi(0) = K\varphi(0) \quad \text{при} \ \ x = 0.$$

Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. ***Пусть последовательность*** $\{\varphi_k(x)\} \subset L_1[0,1]$ ***удовлетворяет условиям*:**

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^x \varphi_k(s)\,ds = \int_0^x \varphi(s)\,ds \qquad \forall x\in[0,1], \tag{3.21}$$

где $\varphi\in L_1[0,1]$ ***и***

$$\sup_{\substack{k\\ 0\le x\le 1}}\left|\int_0^x \varphi_k(s)\,ds\right|\le C.$$

Тогда имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} K\varphi_k(x) = K\varphi(x), \qquad 0<x\le 1.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим следующие равенства

$$K\varphi(x)=\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{x^2+\xi^2}=\frac{x}{\pi}\frac{1}{x^2+\xi^2}\int_0^{\xi}\varphi(s)\,ds\Big|_{\xi=0}^{1}+\frac{2x}{\pi}\int_0^1\xi\int_0^{\xi}\varphi(s)\,ds\frac{d\xi}{\left(x^2+\xi^2\right)^2}=$$

$$=\frac{x}{\pi\left(x^2+1\right)}\int_0^1\varphi(s)\,ds+\frac{2x}{\pi}\int_0^1\xi\int_0^{\xi}\varphi(s)\,ds\frac{d\xi}{\left(x^2+\xi^2\right)^2}, \tag{3.22}$$

$$K\varphi_k(x)=\frac{x}{\pi\left(x^2+1\right)}\int_0^1\varphi_k(s)\,ds\ ++\frac{2x}{\pi}\int_0^1\xi\int_0^{\xi}\varphi_k(s)\,ds\frac{d\xi}{\left(x^2+\xi^2\right)^2}. \tag{3.23}$$

Воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Полагая

$$f_k(\xi)=\frac{\xi}{\left(x^2+\xi^2\right)^2}\int_0^{\xi}\varphi_k(s)\,ds,\quad f(\xi)=\frac{\xi}{\left(x^2+\xi^2\right)^2}\int_0^{\xi}\varphi(s)\,ds,\quad f_0(\xi)=\frac{C\xi}{\left(x^2+\xi^2\right)^2},$$

убедимся в выполнении всех условий теоремы Лебега при $x>0$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2x}{\pi}\int_0^1\xi\int_0^{\xi}\varphi_k(s)\,ds\frac{d\xi}{\left(x^2+\xi^2\right)^2}=\frac{2x}{\pi}\int_0^1\xi\int_0^{\xi}\varphi(s)\,ds\frac{d\xi}{\left(x^2+\xi^2\right)^2}. \tag{3.24}$$

Кроме того, из (3.21) при $x=1$ получим следующее равенство

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1\varphi_k(s)\,ds=\int_0^1\varphi(s)\,ds. \tag{3.25}$$

Из равенств (3.22) и (3.23), в силу предельных соотношений (3.24) и (3.25), будем иметь:

$$\lim_{k\to\infty} K\varphi_k(x) = K\varphi(x)$$

при $0 < x \le 1$.

Лемма 3.4 доказана.

Аналогично лемме 3.3 доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.5. ***Пусть последовательность*** $\{\varphi_k(x)\} \subset C[0,1]$ ***удовлетворяет условиям:***

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \varphi(x),\ x \in [0,1],$$

$$|\varphi_k(x)| \le \varphi_0(x), \quad k = 1,2,\ldots, \quad x \in [0,1],$$

где $\varphi_0(x) \in L_1[0,1]$. ***Тогда***

$$\lim_{k\to\infty} (K_0\varphi_k)(x) = (K_0\varphi)(x), \quad x \in [0,1].$$

4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОСТЬ, НОРМА И СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В данном пункте устанавливаются непрерывность, вполне непрерывность и вычисляются норма и спектральный радиус некоторых интегральных операторов.

Рассмотрим интегральный оператор

$$(K_0\varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{1+(x-\xi)^2}.$$

Оператор K_0 действует в пространстве $C[0,1]$ и является вполне непрерывным. Наиболее общим утверждением является следующая лемма.

Лемма 4.1. ***Для любого*** $n \in \mathbb{N}$ ***оператор***

$$K_0 : L_1[0,1] \to C^n[0,1],$$

где $L_1[0,1]$ ***– лебегово пространство суммируемых, а*** $C^n[0,1]$ ***– пространство n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке*** $[0,1]$, ***является вполне непрерывным.***

Доказательство леммы 4.1 проводится непосредственно.

Рассмотрим интегральный оператор

$$(K\varphi)(x)=\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{x^2+\xi^2},\ 0<x\le 1;\quad (K\varphi)(0)=\frac{\varphi(0)}{2}.$$

Лемма 4.2. ***Оператор K действует в пространстве $C[0,1]$ и не является вполне непрерывным.***

Доказательство. Действие оператора K в пространстве $C[0,1]$ следует из следствия 3.3. Докажем, что оператор K не является вполне непрерывным.

Рассмотрим семейство нормированных в пространстве $C[0,1]$ функций $\varphi_n(x)=x^{\frac{1}{n}}$, $n=1,2,\ldots$. Имеем

$$(K\varphi_n)(x)=\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\xi^{\frac{1}{n}}d\xi}{x^2+\xi^2}=|\xi|=\frac{x^{\frac{1}{n}}}{\pi}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{t^{\frac{1}{n}}dt}{1+t^2},\qquad x>0,$$

$$(K\varphi_n)(0)=0,\quad n=1,2,\ldots.$$

Для каждого $x>0$, переходя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty}(K\varphi_n)(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\ge\frac{1}{4}\quad\text{при}\quad 0<x\le 1.$$

Отсюда и из равенств $(K\varphi_n)(0)=0$, $\quad n=1,2,\ldots$ вытекает, что семейство $\{K\varphi_n\}$ не может быть равностепенно непрерывным. Следовательно, в силу теоремы Арцела [13] это семейство не может быть компактным.

Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. ***Справедливо равенство***

$$\boldsymbol{\rho(K)=\|K\|_{C\to C}=\frac{1}{2},}$$

где $\rho(K)$ – спектральный радиус оператора

$$\boldsymbol{K:C[0,1]\to C[0,1].}$$

Доказательство. Имеем

$$\left|K\varphi(x)\right|=\left|\frac{x}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\varphi(\xi)d\xi}{x^2+\xi^2}\right|\le\frac{x}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\left|\varphi(\xi)\right|d\xi}{x^2+\xi^2}\le$$

$$\le\frac{x\cdot\|\varphi\|_C}{\pi}\int\limits_0^1\frac{d\xi}{x^2+\xi^2}=\frac{\|\varphi\|_C}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\le\frac{1}{2}\|\varphi\|_C,$$

если $0<x\le1$ и

$$K\varphi(0)=\frac{1}{2}\varphi(0). \tag{4.1}$$

Следовательно,

$$\|K\varphi\|_C\le\frac{1}{2}\|\varphi\|_C. \tag{4.2}$$

Из (4.2) вытекает непрерывность оператора $K:C[0,1]\to C[0,1]$ и справедливость неравенства

$$\|K\|\le\frac{1}{2}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t)\equiv1$. Тогда $\|\varphi_0\|_C=1$ и из (4.1) будет следовать неравенство $\|K\varphi_0\|_C\ge\frac{1}{2}$. Из полученного неравенства и (4.3) получим равенство $\|K\|_{C\to C}=\frac{1}{2}$.

Далее имеем

$$\left\|K^n\right\|_{C\to C}\le\|K\|_{C\to C}^n=\frac{1}{2^n}, \tag{4.4}$$

$$\left\|K^n\varphi_0\right\|_C\ge\left|K^n\varphi_0(0)\right|=\frac{1}{2^n}\varphi_0(0)=\frac{1}{2^n}. \tag{4.5}$$

Из неравенства (4.5) следует, что

$$\left\|K^n\right\|_{C\to C}\ge\frac{1}{2^n}. \tag{4.6}$$

Из неравенств (4.4) и (4.6) получим: $\left\|K^n\right\|_{C\to C}=\frac{1}{2^n}$. Согласно определению спектрального радиуса

$$\rho(K)=\lim_{k\to\infty}\sqrt[n]{\left\|K^n\right\|}=\frac{1}{2}.$$

Лемма 4.3 доказана.

Рассмотрим систему интегральных уравнений (2.23). Так как и переменная x, и переменная y изменяются на интервале $(0,1)$ независимо друг от друга, их можно обозначить одной буквой, например буквой x. Введем обозначения

$$A=\begin{bmatrix} 0 & SK\varphi_2 & K_0\varphi_3 & K\varphi_4 \\ KS\varphi & 0 & SKS\varphi_3 & K_0\varphi_4 \\ K_0\varphi_1 & SKS\varphi_2 & 0 & KS\varphi_4 \\ K\varphi_1 & K_0\varphi_2 & SK\varphi_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad I=\begin{bmatrix} J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

где операторы K, K_0, S определены равенствами (2.20)-(2.22), 0 – нулевой, а J - единичный операторы: $(0\varphi)(x)=0,\ (J\varphi)(x)=\varphi(x)$ для любой функции $\varphi\in C[0,1]$. В силу введенных обозначений систему (2.23) можно представить в виде

$$(I+A)\overline{\Phi}(x)=\overline{\Psi}(x), \tag{4.8}$$

где

$$\overline{\Phi}(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x),\varphi_4(x))^{\text{т}}, \overline{\Psi}(x)=(\psi_1(x),\psi_2(x),\psi_3(x),\psi_4(x))^{\text{т}},$$

а символ «т» обозначает операцию матричного транспонирования.

Так как каждый составляющий оператор матричного оператора A действует в пространстве $C[0,1]$, то сам оператор A действует в пространстве вектор-функций

$$\overline{C}[0,1]=\left\{\overline{\Phi}=(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\text{т}} : \varphi_i\in C[0,1], i=\overline{1,4}\right\}$$

с нормой

$$\left\|\overline{\Phi}\right\|_{\overline{C}[0,1]}=\max_{1\le i\le 4}\left\|\varphi_i\right\|_{C[0,1]}.$$

Лемма 4.4. ***Для операторов***

$$\boldsymbol{A:\overline{C}[0,1]\to\overline{C}[0,1]}$$

и

$$\boldsymbol{A^2:\overline{C}[0,1]\to\overline{C}[0,1]}$$

число $\boldsymbol{\lambda=1}$ является собственным значением и вектор – функция

$$\boldsymbol{\overline{\Phi}_0=(\varphi_0, \varphi_0, \varphi_0, \varphi_0)^{\text{т}},\ \varphi_0(x)\equiv 1}$$

является единственной собственной функцией этих операторов с точностью до постоянного множителя.

Доказательство. Покажем справедливость равенства $A\overline{\Phi}_0 = \overline{\Phi}_0$. Вычислим первую координату вектор-функции $A\overline{\Phi}_0$:

$$\left(A\overline{\Phi}_0\right)_1 = \left(SK\varphi_0\right)(x) + \left(K_0\varphi_0\right)(x) + \left(K\varphi_0\right)(x) =$$

$$= \frac{1-x}{\pi}\int_0^1 \frac{d\eta}{(1-x)^2+\eta^2} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{d\xi}{1+(x-\xi)^2} + \frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{d\eta}{x^2+\eta^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\eta}{1-x}\bigg|_{\eta=0}^{1} + \operatorname{arctg}(\xi - x)\Big|_{\xi=0}^{1} + \operatorname{arctg}\frac{\eta}{x}\bigg|_{\eta=0}^{1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x} + \operatorname{arctg}(1-x)\right) + \left(\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = 1 = \varphi_0(x).$$

Аналогичными вычислениями можно показать, что и оставшиеся координаты вектор-функции $A\overline{\Phi}_0$ также совпадают с $\varphi_0(x)$.

Отсюда следует равенство $A^2\overline{\Phi}_0 = \overline{\Phi}_0$. Докажем, что равенству

$$A^2\overline{\Phi} = \overline{\Phi} \tag{4.9}$$

удовлетворяет только вектор-функции $\overline{\Phi}_0$ (с точностью до постоянного множителя).

Предположим противное. Пусть вектор-функция $\overline{\Phi}_1$ удовлетворяет равенству (4.9) и является линейно независимой с вектор – функцией $\overline{\Phi}_0$.

Определим числа

$$\mu^+ = \sup\left\{\mu : \overline{\Phi}_0 - \mu\overline{\Phi}_1 \ge 0\right\}, \quad \mu^- = \inf\left\{\mu : \overline{\Phi}_0 - \mu\overline{\Phi}_1 \ge 0\right\}.$$

Здесь неравенства понимаются покоординатно и при всех $x \in [0,1]$.

Заметим, что хотя бы одна из величин μ^+ и μ^- является конечной. Через μ_0 обозначим одну из величин μ^+ и μ^-, имеющую конечное значение (если обе величины конечны, то μ_0 – любая из них).

Рассмотрим функцию

$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_0 - \mu_0\overline{\Phi}_1. \tag{4.10}$$

Введенная вектор – функция является неотрицательной и удовлетворяет равенству (4.9). Введя обозначение $\overline{\Psi} = A\overline{\Phi}$, получим систему равенств

$$\begin{cases} \overline{\Phi} = A\overline{\Psi}, \\ \overline{\Psi} = A\overline{\Phi}. \end{cases} \tag{4.11}$$

Из неотрицательности вектор-функции $\overline{\Phi}$ вытекает неотрицательность вектор – функции $\overline{\Psi}$.

Покажем, что координаты вектор-функции $\overline{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\text{т}}$ строго положительны на отрезке $[0,1]$. Действительно, если вектор-функция $\overline{\Phi}$ не является строго положительной, то найдется точка $x_0 \in [0,1]$, в которой некоторая ее координата обращается в нуль. Для определенности будем предполагать, что $\varphi_1(x_0) = 0$. Для первой координаты первой функции системы (4.11) в точке x_0 получим

$$\varphi_1(x_0) = \frac{1-x_0}{\pi}\int_0^1 \frac{\psi_2(\eta)d\eta}{(1-x_0)^2+\eta^2} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\psi_3(\xi)d\xi}{1+(x_0-\xi)^2} + \frac{x_0}{\pi}\int_0^1 \frac{\psi_4(\eta)d\eta}{x_0^2+\eta^2} = 0. \tag{4.12}$$

Из этого равенства, в силу неотрицательности функций ψ_2, ψ_3 и ψ_4, имеем

$$\begin{cases} \psi_2(\eta) \equiv 0, & \psi_3(\xi) \equiv 0, & \psi_4(\eta) \equiv 0, & \text{если} \quad 0 < x_0 < 1, \\ \psi_2(0) = 0, & \psi_3(\xi) \equiv 0, & \psi_4(\eta) \equiv 0, & \text{если} \quad x_0 = 1, \\ \psi_2(\eta) \equiv 0, & \psi_3(\xi) \equiv 0, & \psi_4(0) = 0, & \text{если} \quad x_0 = 0. \end{cases}$$

Во всех трех случаях имеет место тождество $\psi_3(\xi) \equiv 0$. Поэтому для третьей координаты второй функции системы (4.11) получим

$$\psi_3(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi_1(\xi)d\xi}{1+(x-\xi)^2} + \frac{1-x}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi_2(\eta)d\eta}{(1-x)^2+(1-\eta)^2} + \frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi_4(\eta)d\eta}{x^2+\eta^2} \equiv 0.$$

Из полученного тождества, в силу неотрицательности функций φ_1, φ_2 и φ_4, имеем

$$\varphi_1(\xi) \equiv 0, \quad \varphi_2(\eta) \equiv 0, \quad \varphi_4(\eta) \equiv 0. \tag{4.13}$$

Так как $\varphi_1(\xi) \equiv 0$, то в равенстве (4.12) можно полагать $x_0 = 1/2$. Следовательно, $\psi_2(\eta) \equiv 0$. Для второй координаты второй функции системы (4.12) имеем

$$\psi_2(x)=\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_1(\xi)d\xi}{x^2+(1-\xi)^2}+\frac{1-x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_3(\xi)d\xi}{(1-x)^2+(1-\xi)^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_4(\eta)d\eta}{1+(x-\eta)^2}\equiv 0\,.$$

Из полученного тождества, в силу неотрицательности функций φ_1. φ_3 и φ_4, имеем

$$\varphi_1(\xi)\equiv 0,\quad \varphi_3(\xi)\equiv 0,\quad \varphi_4(\eta)\equiv 0\,. \tag{4.14}$$

Из тождеств (4.13) и (4.14) вытекает, что вектор-функция $\overline{\Phi}(x)$ тождественно равна нулю, т.е. $\overline{\Phi}_0(x)-\mu_0\overline{\Phi}_1(x)\equiv 0$. Полученное тождество противоречит линейной независимости вектор-функций $\overline{\Phi}_0(x)$ и $\overline{\Phi}_1(x)$.

Таким образом, каждая координата вектор-функции $\overline{\Phi}(x)$ строго положительна. Это противоречит выбору величины μ_0. Следовательно, вектор-функция $\overline{\Phi}_0(x)$ является единственной собственной функцией, отвечающей собственному значению $\lambda=1$.

Покажем, что и для интегрального оператора A вектор-функция $\overline{\Phi}_0(x)$ является единственной собственной функцией (с точностью до постоянного множителя), отвечающей собственному значению $\lambda=1$. Если допустить, что имеется еще другая собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda=1$, то она является собственной функцией и для интегрального оператора A^2. Но у оператора A^2 имеется только одна собственная функция (с точностью до постоянного множителя), отвечающая собственному значению $\lambda=1$. Следовательно, и у оператора A всего одна собственная функция (с точностью до постоянного множителя), отвечающая собственному значению $\lambda=1$.

Лемма 4.4 доказана.

Следствие 4.1. ***Однородное уравнение***

$$\boldsymbol{(I+A)\overline{\Phi}=0}$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Пусть вектор-функция $\overline{\Phi}_1(x)$ является решением уравнения $(I+A)\overline{\Phi}=0$. Тогда $A\overline{\Phi}_1=-\overline{\Phi}_1$ и, следовательно, $A^2\overline{\Phi}_1=\overline{\Phi}_1$. Так как у оператора A^2 имеется только одна собственная функция (с точностью до постоянного множителя), отвечающая собственному значению $\lambda = 1$, то

$$\overline{\Phi}_1(x) \equiv \alpha \overline{\Phi}_0(x),$$

где α - некоторое число. Из полученного тождества получим $A\overline{\Phi}_0 = -\overline{\Phi}_0$. Но $\overline{\Phi}_0$ – собственная функция оператора A: $A\overline{\Phi}_0 = \overline{\Phi}_0$, поэтому из последних двух равенств получим тождество $\overline{\Phi}_0(x) \equiv 0$, которое противоречит определению функции $\overline{\Phi}_0$.

Следствие 4.1 доказано.

Лемма 4.5. ***Для спектрального радиуса оператора***

$$\boldsymbol{A : \overline{C} \to \overline{C},}$$

где $\overline{C} = \overline{C}[0,1]$, ***и норм операторов*** A^k, $k = 1,2,\ldots$, ***справедливы равенства***

$$\rho(A) = \left\| A^k \right\|_{\overline{C} \to \overline{C}} = 1.$$

Доказательство. Для любой вектор-функции $\overline{\Phi} \in \overline{C}[0,1]$ имеет место двойное неравенство

$$-\|\Phi\|_{\overline{C}} \overline{\Phi_0}(x) \le \overline{\Phi}(x) \le \|\Phi\|_{\overline{C}} \overline{\Phi_0}(x), \tag{4.15}$$

где $\overline{\Phi_0}(x)$ −собственная функция оператора A, отвечающая собственному значению $\lambda = 1$. Применяя оператор A к каждому члену неравенства (4.15), в силу неотрицательности ядер составляющих операторов оператора A, имеем

$$-\|\Phi\|_{\overline{C}} \overline{\Phi_0}(x) \le \left(A\overline{\Phi}\right)(x) \le \|\Phi\|_{\overline{C}} \overline{\Phi_0}(x).$$

Переходя к нормам в двойном неравенстве, будем иметь

$$\left\|A\overline{\Phi}\right\|_{\overline{C}} \le \left\|\overline{\Phi}\right\|_{\overline{C}}.$$

Из полученного неравенства следует

$$\|A\|_{\overline{C} \to \overline{C}} \le 1. \tag{4.16}$$

Заметим, что $\lambda = 1$ является собственным значением оператора A, поэтому в (4.16) может иметь место только равенство

$$\|A\|_{\overline{C} \to \overline{C}} = 1. \tag{4.17}$$

В силу приведенного выше замечания из (4.17) для любого $k = 2,3,...$ получим равенство $\left\| A^k \right\|_{\overline{C} \to \overline{C}} = 1$, из которого, в свою очередь, следует

$$\rho(A) = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\left\| A^k \right\|_{\overline{C} \to \overline{C}}} = 1.$$

Лемма 4.5 доказана.

5. РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ

Пусть $x_0 \in [0, 1]$ – фиксированная точка. Семейство $\{h_k = h_k(x)\}$ назовем равностепенно непрерывным в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in [0,1]$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|h_k(x) - h_k(x_0)| < \varepsilon$ для всех $k = 1, 2, ...$.

Лемма 5.1. ***Пусть семейство функций*** $\{\boldsymbol{h = h_k(x)}\}$ ***– равномерно ограничено на отрезке*** $[\mathbf{0,1}]$***:***

$$|h_k(x)| \le C, \quad x \in [0,1], \quad k = 1, 2, ...,$$

и равностепенно непрерывно в точке $\boldsymbol{x = 0}$***. Тогда семейство*** $\{\boldsymbol{g_k = Kh_k}\}$ ***равностепенно непрерывно на отрезке*** $[\mathbf{0,1}]$.

Доказательство. Имеем:

$$|Kh_k(x) - Kh_k(0)| = \left| \frac{x}{\pi} \int_0^1 \frac{h_k(\xi)\, d\xi}{x^2 + \xi^2} - \frac{h_k(0)}{2} \right| =$$

$$+ \left| \frac{x}{\pi} \int_0^1 \frac{h_k(\xi)\, d\xi}{x^2 + \xi^2} - \frac{x}{\pi} - \int_0^1 \frac{h_k(0)\, d\xi}{x^2 + \xi^2} + \frac{h_k(0)}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{h_k(0)}{2} \right| \le$$

$$\le \left| \frac{h_k(0)}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{h_k(0)}{2} \right| + \frac{x}{\pi} \int_0^1 \frac{|h_k(\xi) - h_k(0)|}{x^2 + \xi^2} d\xi \equiv I_1 + I_2 . \qquad (5.1)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Число $x_0 > 0$ выберем таким, чтобы

$$\frac{2C}{\pi} x_0 < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (5.2)$$

Тогда для $0<x<x_0$ будем иметь

$$I_1=\left|\frac{h_k(0)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\right)\right|=\frac{|h_k(0)|}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\le$$

$$\le\frac{C}{\pi}\operatorname{arctg}<\frac{C}{\pi}x<\frac{C}{\pi}x_0<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.3}$$

Оценим второе слагаемое I_2:

$$I_2=\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{|h_k(\xi)-h_k(0)|}{x^2+\xi^2}d\xi=\left|\begin{matrix}\xi=xu\\ d\xi=xdu\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{|h_k(xu)-h_k(0)|}{1+u^2}du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{x_0}}\frac{|h_k(xu)-h_k(0)|}{1+u^2}du+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{x}}\frac{|h_k(xu)-h_k(0)|}{1+u^2}du\equiv I_{21}+I_{22}.$$

Для интеграла I_{22} будем иметь

$$I_{22}=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{x}}\frac{|h_k(xu)-h_k(0)|}{1+u^2}du\le\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{x}}\frac{2Cdu}{1+u^2}=\frac{2C}{\pi}\operatorname{arctg}u\Bigg|_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{x}}=\frac{2C}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x_0}\right]=$$

$$\frac{2C}{\pi}[\operatorname{arctg}x_0-\operatorname{arctg}x]\le\le\frac{2C}{\pi}\operatorname{arctg}x_0<\frac{2Cx_0}{\pi}<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.4}$$

Для получения неравенства (5.4) мы воспользовались неравенством (5.2).

Фиксируем точку x_0, удовлетворяющую неравенству (5.2). Рассмотрим интеграл I_{21}. Так как семейство $\{h=h_k\}$ равностепенно непрерывно в точке $x=0$, то по заданному $\varepsilon>0$ можно найти $\delta>0$, что для любого $t:0<t<\delta$ выполняется неравенство

$$|h_k(t)-h_k(0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.5}$$

Пусть x удовлетворяет условию $x<\delta x_0$. Тогда при $t=xu$ и $0<u<\dfrac{1}{x_0}$ из (5.5) вытекает $|h_k(xu)-h_k(0)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Имеем:

$$I_{21}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{x_0}}\frac{\left|h_k(xu)-h_k(0)\right|}{1+u^2}du<\frac{\varepsilon}{3\pi}\int_0^{\frac{1}{x_0}}\frac{du}{1+u^2}=\frac{\varepsilon}{3\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x_0}\le\frac{\varepsilon}{3\pi}\frac{\pi}{2}<\frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.6)$$

Из (5.1), в силу (5.3), (5.4) и (5.6), будем иметь

$$\left|Kh_k(x)-Kh_k(0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Таким образом, нами доказана равностепенная непрерывность семейства $\{g_k=Kh_k\}$ в точке $x=0$.

Докажем равностепенную непрерывность этого семейства на всем отрезке $[0,1]$.

Пусть $\varepsilon>0$-произвольное число. Мы должны показать существование числа $\delta>0$ такого, что, если $|x-y|<\delta$, то $|g(x)-g(y)|<\varepsilon$.

Из равностепенной непрерывности семейства $\{g_k=Kh_k\}$ в точке $x=0$ следует существование $\delta_0>0$, такое, что из условия $0<x\le\delta_0$ вытекает справедливость неравенства $|g(x)-g(0)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Фиксируем δ_0 и рассмотрим семейство $\{g_k=Kh_k\}$ на отрезке $[\delta_0,1]$. Из леммы 3.1 вытекает ограниченность семейства $\{g_k=Kh_k\}$ в пространстве $C^1[\delta_0,1]$. Отсюда следует равностепенная непрерывность этого семейства в $C[\delta_0,1]$, то есть существует $\delta_1>0$, такое, что для любых точек $x,y\in[\delta_0,1]$, удовлетворяющих условию $|x-y|<\delta_1$, вытекает справедливость неравенства $|g(x)-g(y)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Положим $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$. Пусть $x,y\in[0,1]$ и $|x-y|<\delta$. Возможны случаи:

$$1)\ 0\le x,y\le\delta_0;\ \ 2)\ \delta_0\le x,y\le 1;\ \ 3)\ 0\le x<\delta_0<y\le 1.$$

Для случая 1) имеем

$$|g(x)-g(y)|\le|g(x)-g(0)|+|g(0)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

Для случая 2) имеем $|g(x)-g(y)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Для случая 3) имеем

$$\left|g(x)-g(y)\right|<\left|g(x)-g(0)\right|+\left|g(0)-g(\delta_0)\right|+$$
$$+\left|g(\delta_0)-g(y)\right|<\varepsilon .$$

Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2. ***Пусть семейство функций*** $\{h_k=h_k(x)\}\subset C[0,1]$**:**

1) ***равномерно ограничено на отрезке*** $[0,1]$***, то есть*** $\|h_k\|_C\le C$ **;**

2) ***равностепенно непрерывно в точке*** $x=0$**.**

Тогда семейство

$$\left\{\varphi_k=\left(I-K^2\right)^{-1}h_k\right\}$$

равностепенно непрерывно в точке $x=0$.

Доказательство. Так как норма $\|K\|_{C\to C}=\dfrac{1}{2}$, то ряд Неймана [13]

$$\varphi=\left(I-K^2\right)^{-1}h=h+K^2h+K^4h+\ldots$$

сходится равномерно на отрезке $[0,1]$. В силу оценки

$$\left\|K^{2n}h\right\|_C\le\|K\|_{C\to C}^{2n}\|h\|_C\le\frac{C}{2^{2n}}=\frac{C}{4^n},$$

имеет место неравенство

$$\left\|K^{2n}h+K^{2(n+1)}h+\ldots\right\|_C\le C\left(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{4^{n+1}}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{C}{4^n}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)=\frac{C}{3\cdot4^{n-1}}. \qquad (5.7)$$

Номер n выберем таким образом, чтобы $\dfrac{C}{4^{n-1}}<\varepsilon$. Тогда из (5.7) получаем:

$$\left\|K^{2n}h+K^{2(n+1)}h+\ldots\right\|_C<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (5.8)$$

Рассмотрим приращение

$$\varphi(x)-\varphi(0)=\left(I-K^2\right)^{-1}h(x)-\left(I-K^2\right)^{-1}h(0)=$$
$$=\left[h(x)-h(0)\right]+\left[K^2h(x)-K^2h(0)\right]+\ldots .$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ (из равностепенной непрерывности семейства $\{h_k = h_k(x)\}$) следует существование числа $\delta_0 > 0$ такого, что из условия $x < \delta_0$ вытекает неравенство

$$\left|h(x) - h(0)\right| < \frac{\varepsilon}{3n}. \qquad (5.9)$$

Применяя $2k$ $(k = 1, 2, ..., n-1)$ раз лемму 5.1, найдем число $\delta_k > 0$ такое, что из условия $x < \delta_k$ вытекает неравенство

$$\left|K^{2k}h(x) - K^{2k}h(0)\right| < \frac{\varepsilon}{3n} \quad (k = 1, 2, ..., n-1). \qquad (5.10)$$

Положим $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, ..., \delta_{n-1}\}$. Тогда из неравенств (5.9) и (5.10) при $x < \delta$ вытекает, что

$$\Big|\left[h(x) - h(0)\right] + \left[K^2 h(x) - K^2 h(0)\right] + ... +$$
$$+ \left[K^{2(n-1)}h(x) - K^{2(n-1)}h(0)\right]\Big| < n \cdot \frac{\varepsilon}{3n} = \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (5.11)$$

Из неравенства (5.8) будем иметь

$$\Big|\left[K^{2n}h(x) - K^{2n}h(0)\right] + \left[K^{2(n+1)}h(x) - K^{2(n+1)}h(0)\right] + ...\Big| \le$$
$$\le \left|K^{2n}h(x) + K^{2(n+1)}h(x) + ...\right| +$$
$$+ \left|K^{2n}h(0) + K^{2(n+1)}h(0) + ...\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}. \qquad (5.12)$$

Из неравенств (5.11) и (5.12) окончательно получаем

$$\left|\varphi(x) - \varphi(0)\right| < \varepsilon.$$

Лемма 5.2 доказана.

Лемма 5.3. ***Пусть семейство функций*** $\{h_k = h_k(x)\} \subset C[0,1]$***:***

1) ***равномерно ограничено на отрезке*** $[0,1]$***, то есть*** $\|h_k\|_C \le C$***;***

2) ***равностепенно непрерывно на отрезке*** $[0,\sigma]$***, где*** $0 < \sigma \le 1$***.***

Тогда семейство

$$\left\{\varphi_k = \left(I - K^2\right)^{-1} h_k\right\}$$

равностепенно непрерывно на $[0,\sigma]$***.***

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. По заданному ε число n выберем таким образом, чтобы имело место неравенство (5.8). По условию семейство $\{h_k = h_k(x)\}$ равностепенно непрерывно на отрезке $[0,\sigma]$, а семейства

$$\{K^2 h\},\{K^4 h\},...,\{K^{2(n-1)} h\}$$

равностепенно непрерывны на отрезке $[0,1]$ в силу леммы 5.1 и, следовательно, семейство функций

$$\{\psi(x) = h + K^2 h + K^4 h + ... + K^{2(n-1)} h\}$$

равностепенно непрерывно на отрезке $[0,\sigma]$. Поэтому по заданному ε число $\delta > 0$ выберем так, чтобы

$$|\psi(x) - \psi(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (5.13)$$

если $x, y \in [0,\sigma], \quad |x - y| < \delta$. Так как

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le |\psi(x) - \psi(y)| + |R_n h(x)| + |R_n h(y)|,$$

где $R_n h(t) = \varphi(t) - \psi(t)$, то из (5.8) и (5.13) вытекает неравенство $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ для всех $x, y \in [0,\sigma], \quad |x - y| < \delta$.

Лемма 5.3 доказана.

6. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом пункте будут доказаны корректная разрешимость оператора $A:\overline{C}\to\overline{C}$ $\left(\overline{C}=\overline{C}[0,1]\right)$, где операторы I и A определены равенствами (4.7), и однозначная разрешимость системы интегральных уравнений (4.8) в пространстве $\overline{C}[0,1]$.

Теорема 6.1. ***Оператор***

$$(I+A):\overline{C}[0,1]\to\overline{C}[0,1]$$

является корректно разрешимым, то есть существует такое $d>0$, что

$$\left\|(I+A)\overline{\Phi}\right\|_{\overline{C}}\geq d\left\|\overline{\Phi}\right\|_{\overline{C}} \tag{6.1}$$

для любой вектор – функции $\overline{\Phi}\in\overline{C}[0,1]$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть не имеет место неравенство (6.1). Тогда существует последовательность нормированных вектор – функций $\overline{\Phi}_k$,

$$\left\|\overline{\Phi}_k\right\|_{\overline{C}}=1,\quad \overline{\Phi}_k=\left(\varphi_{1k},\ \varphi_{2k},\ \varphi_{3k},\ \varphi_{4k}\right)^{\mathrm{т}},\quad k=1,2,\ldots, \tag{6.2}$$

для которой имеет место предельное соотношение

$$\left\|\overline{\Phi}_k+A\overline{\Phi}_k\right\|_{\overline{C}}\to 0 \text{ при } \quad k\to\infty. \tag{6.3}$$

Соотношение (6.3) в координатах можно записать в следующем виде

$$\begin{cases} \varphi_{1k}+SK\varphi_{2k}+K_0\varphi_{3k}+K\varphi_{4k}=\psi_{1k}\to 0, \\ KS\varphi_{1k}+\varphi_{2k}+SKS\varphi_{3k}+K_0\varphi_{4k}=\psi_{2k}\to 0, \\ K_0\varphi_{1k}+SKS\varphi_{2k}+\varphi_{3k}+KS\varphi_{4k}=\psi_{3k}\to 0, \\ K\varphi_{1k}+K_0\varphi_{2k}+SK\varphi_{3k}+\varphi_{4k}=\psi_{4k}\to 0, \end{cases} \tag{6.4}$$

где сходимость равномерная по $x\in[0,1]$.

Из равенства (6.2) следует, что

$$\left\|\varphi_{ik}\right\|_C\leq 1,\quad i=\overline{1,4},\quad k=1,2,\ldots.$$

В нижеприводимых рассуждениях неоднократно используется процедура выбора подпоследовательности из последовательности $\{\varphi_{ik}\}$, $i=\overline{1,4}$, $k=1,2,\ldots$. Во избежание загромождения записи дополнительными индексами без ограничения общности, будем считать, что сама последовательность функций $\{\varphi_{ik}\}$ удовлетворяет соответствующим предельным соотношениям.

Так как K_0 – вполне непрерывный оператор, то существуют пределы:

$$\begin{cases} (K_0\varphi_{3k})(x) \to \varphi'_{13}(x), \\ (K_0\varphi_{4k})(x) \to \varphi'_{24}(x), \\ (K_0\varphi_{1k})(x) \to \varphi'_{31}(x), \\ (K_0\varphi_{2k})(x) \to \varphi'_{42}(x), \end{cases} \quad k\to\infty \tag{6.5}$$

равномерные по $x\in[0,1]$;

$$\begin{cases} (SK\varphi_{2k})(x) \to \varphi'_{12}(x), \\ (SKS\varphi_{3k})(x) \to \varphi'_{23}(x), \\ (KS\varphi_{4k})(x) \to \varphi'_{34}(x), \\ (SK\varphi_{3k})(x) \to \varphi'_{43}(x), \end{cases} \quad k\to\infty \tag{6.6}$$

в каждой точке $x\in[0,1]$, причем равномерно на каждом отрезке $[0,\sigma]$, $0<\sigma<1$;

$$\begin{cases} (K\varphi_{4k})(x) \to \varphi'_{14}(x), \\ (KS\varphi_{1k})(x) \to \varphi'_{21}(x), \\ (SKS\varphi_{2k})(x) \to \varphi'_{32}(x), \\ (K\varphi_{1k})(x) \to \varphi'_{41}(x), \end{cases} \quad k\to\infty \tag{6.7}$$

в каждой точке $x\in[0,1]$, причем равномерно на каждом отрезке $[\delta,1], 0<\delta<1$;

Из соотношений (6.4), в силу (6.5)-(6.7), будем иметь

$$\begin{cases} \varphi_{1k}(x) \to -\varphi'_{12}(x)-\varphi'_{13}(x)-\varphi'_{14}(x) \equiv \varphi_1(x), \\ \varphi_{2k}(x) \to -\varphi'_{21}(x)-\varphi'_{23}(x)-\varphi'_{24}(x) \equiv \varphi_2(x), \\ \varphi_{3k}(x) \to -\varphi'_{31}(x)-\varphi'_{32}(x)-\varphi'_{34}(x) \equiv \varphi_3(x), \\ \varphi_{4k}(x) \to -\varphi'_{41}(x)-\varphi'_{42}(x)-\varphi'_{43}(x) \equiv \varphi_4(x), \end{cases} \quad k\to\infty, \tag{6.8}$$

в каждой точке $x \in [0,1]$, причем равномерно на каждом отрезке $[\delta,\sigma]$: $0 < \delta < \sigma < 1$.

Таким образом, из соотношений (6.8) получим

$$\overline{\Phi}_k(x) \to \overline{\Phi}(x),\ k \to \infty,\ \overline{\Phi}(x) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\mathrm{T}} \qquad (6.9)$$

в каждой точке $x \in [0,1]$, причем сходимость равномерная на каждом отрезке $[\delta,\sigma]$: $0 < \delta < \sigma < 1$. Заметим, что вектор-функция $\overline{\Phi}(x)$ определена на отрезке $[0,1]$ и непрерывна на интервале $(0,1)$.

Из соотношения (6.9) следует, что

$$A\overline{\Phi}_k(x) \to A\overline{\Phi}(x),\ k \to \infty,$$

во всех точках $x \in [0,1]$ и равномерно на каждом отрезке $[\delta,\sigma]$: $0 < \delta < \sigma < 1$.

Действительно, из свойств оператора K (см. лемму 3.3) следует, что

$$\begin{cases} KS\varphi_{1k} \to KS\varphi_1, \quad K\varphi_{1k} \to K\varphi_1, \\ SK\varphi_{2k} \to SK\varphi_2, \quad SKS\varphi_{2k} \to SKS\varphi_2, \\ SKS\varphi_{3k} \to SKS\varphi_3, \quad SK\varphi_{3k} \to SK\varphi_3, \\ K\varphi_{4k} \to K\varphi_4, \quad KS\varphi_{4k} \to KS\varphi_4, \end{cases}$$

при $k \to \infty$ для всех точек $x \in [0,1]$, причем равномерно на каждом отрезке $[\delta,\sigma]$: $0 < \delta < \sigma < 1$.

Из свойств оператора K_0 (см. леммы 3.5 и 4.1) следует сходимость

$$K_0\varphi_{mk}(x) \to K_0\varphi_m(x) \text{ при } k \to \infty;\ m = 1,2,3,4;$$

равномерная по x на отрезке $[0,1]$.

Покажем, что функция $\overline{\Phi}(x)$ является равномерным пределом последовательности $\{\overline{\Phi}_k(x)\}$ на всем отрезке $[0,1]$. Действительно, так как предельное соотношение (6.9) равномерно на каждом отрезке $[\delta,\sigma]$, $0<\delta < \sigma < 1$, то достаточно доказать равномерную сходимость последовательности $\{\overline{\Phi}_k(x)\}$ в малой окрестности точек $x = 0$ и $x = 1$.

Этот факт установим поэтапно. Сначала установим равномерную сходимость последовательностей $\{\varphi_{1k}(x)\}$ и $\{\varphi_{4k}(x)\}$ в окрестности точки $x = 0$.

С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} \varphi_{1k}(x)+(K\varphi_{4k})(x)=\psi'_{1k}(x)\equiv\psi_{1k}-SK\varphi_{2k}-K_0\varphi_{3k}, \\ (K\varphi_{1k})(x)+\varphi_{4k}(x)=\psi'_{4k}(x)\equiv\psi_{1k}-K_0\varphi_{2k}-SK\varphi_{3k}, \end{cases} \tag{6.10}$$

которая образована из первого и четвертого уравнений системы (6.4).

Применим ко второму уравнению системы (6.10) оператор K и затем, вычитая полученное соотношение из первого уравнения, будем иметь:

$$\varphi-K^2\varphi=h \qquad (\varphi=\varphi_{1k}, \quad h=h_{1k}=\psi'_{1k}-K\psi'_{4k}), \tag{6.11}$$

или

$$(I-K^2)\varphi=h. \tag{6.12}$$

Так как оператор $I-K^2$ является обратимым, то из (6.12) получим $\varphi=(I-K^2)^{-1}h$. Из ограниченности последовательностей $\{\varphi_{2k}(x)\}$ и $\{\varphi_{3k}(x)\}$, в силу леммы 3.1, следует равностепенная непрерывность семейств $\{(SK\varphi_{2k})(x)\}$ и $\{(SK\varphi_{3k})(x)\}$ на отрезке $[0,\sigma]$. Последовательности $\{\psi_{1k}(x)\}$, $\{\psi_{4k}(x)\}$, $\{(K_0\varphi_{2k})(x)\}$ и $\{(K_0\varphi_{3k})(x)\}$ равномерно сходятся на $[0,1]$. Поэтому семейства $\{\psi'_{1k}(x)\}$ и $\{\psi'_{4k}(x)\}$ равномерно ограничены на $[0,1]$ и равностепенно непрерывны на $[0,\sigma]$. Это свойство сохраняется и для семейства $\{h=h_{1k}(x)\}$ в силу леммы 5.1. Отсюда и из леммы 5.3 вытекает равностепенная непрерывность семейства $\left\{\varphi=\varphi_{1k}=(I-K^2)^{-1}h_{1k}\right\}$ на отрезке $[0,\sigma]$.

Полагая $\varphi=\varphi_{4k}(x)$, $h=h_{4k}(x)=\psi'_{4k}(x)-K\psi'_{1k}(x)$ в (6.11) и проведя аналогичное рассуждение, получим равностепенную непрерывность семейства

$$\left\{\varphi=\varphi_{4k}=(I-K^2)^{-1}h_{4k}\right\}$$

на отрезке $[0,\sigma]$.

Равностепенная непрерывность семейств $\{\varphi_{1k}(x)\}$ и $\{\varphi_{4k}(x)\}$ в окрестности точки $x=0$ доказана.

Докажем равностепенную непрерывность семейств $\{\varphi_{2k}(x)\}$ и $\{\varphi_{3k}(x)\}$ в окрестности точки $x=1$. При этом будем использовать установленное ранее свойство равностепенной непрерывности семейств $\{\varphi_{1k}(x)\}$ и $\{\varphi_{4k}(x)\}$ в окрестности точки $x=0$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \varphi_{2k}(x) + (SKS\varphi_{3k})(x) = \psi'_{2k}(x), \\ (SKS\varphi_{2k})(x) + \varphi_{3k}(x) = \psi'_{3k}(x), \end{cases} \tag{6.13}$$

где

$$\begin{cases} \psi'_{2k}(x) \equiv \psi_{2k} - KS\varphi_{1k} - K_0\varphi_{4k}, \\ \psi'_{3k}(x) \equiv \psi_{3k} - K_0\varphi_{1k} - KS\varphi_{4k}, \end{cases}$$

образованную из второго и третьего уравнений системы интегральных уравнений (6.4).

Применим ко второму уравнению системы (6.13) оператор SKS и затем вычтем полученное соотношение из первого уравнения. Будем иметь

$$\varphi_{2k}(x) - \left((SKS)^2 \varphi_{2k}\right)(x) = \psi'_{2k}(x) - (SKS\psi'_{3k})(x),$$

то есть

$$\varphi - (SKS)^2 \varphi = h, \tag{6.14}$$

где $\varphi = \varphi_{2k}(x)$, $\quad h = h_{2k} = \psi'_{2k}(x) - (SKS\psi'_{3k})(x)$.

Уравнение (6.14) можно записать в виде

$$\varphi - SK^2S\varphi = h. \tag{6.15}$$

Применив оператор S к этому равенству, получим

$$\left(I - K^2\right)S\varphi = Sh. \tag{6.16}$$

Так как оператор $I-K^2$ является обратимым, то из (6.16) имеем: $S\varphi = \left(I-K^2\right)^{-1} Sh$. Применим оператор S к этому равенству. Тогда $\varphi = S\left(I-K^2\right)^{-1} Sh$. Из равностепенной непрерывности семейств $\{\varphi_{1k}(x)\}$ и $\{\varphi_{4k}(x)\}$ на отрезке $[0,\sigma]$ вытекает равностепенная непрерывность семейств $\{(KS\varphi_{1k})(x)\}$ и $\{(KS\varphi_{4k})(x)\}$ на отрезке $[1-\sigma,1]$. Последовательности $\{\psi_{2k}(x)\}$, $\{\psi_{3k}(x)\}$, $\{(K_0\varphi_{1k})(x)\}$ и $\{(K_0\varphi_{4k})(x)\}$ равномерно сходятся на отрезке $[0,1]$. Поэтому семейства $\{\psi'_{2k}(x)\}$ и $\{\psi'_{3k}(x)\}$ равномерно ограничены на отрезке $[0,1]$ и равностепенно непрерывны на отрезке $[1-\sigma,1]$. Отсюда, в силу леммы 5.3, вытекает равностепенная непрерывность семейства

$$\left\{\varphi = \varphi_{2k} = S\left(I - K^2\right)^{-1} Sh_{2k}\right\}$$

на отрезке $[1-\sigma,1]$.

Полагая в (6.15)

$$\varphi = \varphi_{3k}(x),\ h = h_{3k}(x) = \psi'_{3k}(x) - \left(SKS\psi'_{2k}\right)(x)$$

и проведя аналогичное рассуждение, получим равностепенную непрерывность семейства

$$\left\{\varphi = \varphi_{3k}(x) = S\left(I - K^2\right)^{-1} Sh_{3k}\right\}$$

на отрезке $[1-\sigma,1]$.

Равностепенная непрерывность семейств $\{\varphi_{2k}(x)\}$ и $\{\varphi_{3k}(x)\}$ в окрестности точки $x=1$ доказана.

Докажем равностепенную непрерывность семейства $\{\varphi_{1k}(x)\}$ в окрестности точки $x=1$ и семейства $\{\varphi_{2k}(x)\}$ в окрестности точки $x=0$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \varphi_{1k}(x) + \left(SK\varphi_{2k}\right)(x) = \psi''_{1k}(x), \\ \left(KS\varphi_{1k}\right)(x) + \varphi_{2k}(x) = \psi''_{2k}(x), \end{cases} \tag{6.17}$$

где

$$\begin{cases} \psi''_{1k}(x) \equiv \psi_{1k} - K_0\varphi_{3k} - K\varphi_{4k}, \\ \psi''_{2k}(x) \equiv \psi_{2k} - SKS\varphi_{2k} - K_0\varphi_{4k}, \end{cases}$$

составленную из первых двух уравнений системы (6.4).

Применим ко второму уравнению системы (6.17) оператор SK и затем, вычитая полученное соотношение из первого уравнения, будем иметь

$$\varphi_{1k}(x) - \left(SK^2S\varphi_{1k}\right)(x) = \psi''_{1k}(x) - \left(SK\psi''_{2k}\right)(x),$$

то есть

$$\left(\left(I - K^2\right)S\varphi_{1k}\right)(x) = \left(S\psi''_{1k}\right)(x) - \left(K\psi''_{2k}\right)(x).$$

Отсюда

$$(S\varphi_{1k})(x) = \left(I - K^2\right)^{-1}\left((S\psi''_{1k})(x) - (K\psi''_{2k})(x)\right)$$

и. следовательно,

$$\varphi_{1k}(x) = S\left(I - K^2\right)^{-1}\left((S\psi''_{1k})(x) - (K\psi''_{2k})(x)\right).$$

Так как оператор K_0 является вполне непрерывным, то семейства $\{K_0\varphi_{3k}\}$ и $\{K_0\varphi_{4k}\}$ – равностепенно непрерывны на отрезке $[0,1]$. Из равностепенной непрерывности семейства $\{\varphi_{2k}\}$ в окрестности точки $x=1$ и семейства $\{\varphi_{4k}\}$ в окрестности точки $x=0$ следует (лемма 5.1) равностепенная непрерывность семейств $\{SKS\varphi_{2k}\}$ и $\{K\varphi_{4k}\}$ на отрезке $[0,1]$. Отсюда вытекает равностепенная непрерывность семейств

$$\{\psi''_{1k} = \psi_{1k} - K_0\varphi_{3k} - K\varphi_{4k}\} \quad \text{и} \quad \{\psi''_{2k} = \psi_{2k} - SKS\varphi_{2k} - K_0\varphi_{4k}\}$$

на отрезке $[0,1]$ и поэтому семейство $\{\varphi_{1k}\}$ равностепенно непрерывно на отрезке $[0,1]$.

Применяя к первому уравнению (6.17) оператор KS и затем вычитая полученное соотношение из второго уравнения, будем иметь

$$\varphi_{2k}(x) - \left(K^2\varphi_{2k}\right)(x) = \psi''_{2k}(x) - (KS\psi''_{1k})(x),$$

то есть

$$\varphi_{2k} = \left(I - K^2\right)^{-1}\left(\psi''_{2k}(x) - (KS\psi''_{1k})(x)\right).$$

Так как семейства функций $\{\psi''_{1k}\}$ и $\{\psi''_{2k}\}$ равностепенно непрерывны на отрезке $[0,1]$, то и семейство $\{\varphi_{2k}\}$ равностепенно непрерывно на отрезке $[0,1]$.

Равностепенная непрерывность семейства $\{\varphi_{1k}\}$ в окрестности точки $x=1$ и семейства $\{\varphi_{2k}\}$ в окрестности точки $x=0$ доказана.

Таким образом, нами установлена равностепенная непрерывность семейств $\{\varphi_{1k}\}$ и $\{\varphi_{2k}\}$ на отрезке $[0,1]$.

Докажем равностепенную непрерывность семейств $\{\varphi_{3k}\}$ и $\{\varphi_{4k}\}$ на отрезке $[0,1]$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \varphi_{3k}(x) + (KS\varphi_{4k})(x) = \psi''_{3k}(x) \equiv \psi_{3k} - K_0\varphi_{1k} - SKS\varphi_{2k}, \\ (SK\varphi_{3k})(x) + \varphi_{4k}(x) = \psi''_{4k}(x) \equiv \psi_{4k} - K\varphi_{1k} - K_0\varphi_{2k}, \end{cases}$$

которая составлена из последних двух уравнений системы (6.4).

Из этой системы находим

$$\begin{aligned}\varphi_{3k}(x) &= \left(I-K^2\right)^{-1}\left(\psi''_{3k}(x)-KS\psi''_{4k}(x)\right),\\ \varphi_{4k}(x) &= S\left(I-K^2\right)^{-1}\left(S\psi''_{3k}(x)-K\psi''_{4k}(x)\right).\end{aligned} \tag{6.18}$$

Так как семейства $\{\psi''_{3k}(x)\}$ и $\{\psi''_{4k}(x)\}$ равностепенно непрерывны на отрезке $[0,1]$, то и семейства $\{\varphi_{3k}(x)\}$ и $\{\varphi_{4k}(x)\}$, определенные равенствами (6.18), равностепенно непрерывны на отрезке $[0,1]$.

Таким образом, нами показано, что семейства $\{\varphi_{1k}(x)\}$, $\{\varphi_{2k}(x)\}$, $\{\varphi_{3k}(x)\}$ и $\{\varphi_{4k}(x)\}$ являются равностепенно непрерывными на отрезке $[0,1]$. Тогда из теоремы Арцела вытекает равномерная сходимость (без ограничения общности) последовательности

$$\overline{\Phi}_k(x)=\left(\varphi_{1k}(x),\ \varphi_{2k}(x),\ \varphi_{3k}(x),\ \varphi_{4k}(x)\right)^{\text{т}}$$

к функции

$$\overline{\Phi}(x)=\left(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \varphi_4(x)\right)^{\text{т}},$$

причем $\overline{\Phi}\in\overline{C}$.

Переходя к пределу в (6.4) при $k\to\infty$, получим

$$\begin{cases}\varphi_1+SK\varphi_2+K_0\varphi_3+K\varphi_4=0,\\ KS\varphi_1+\varphi_2+SKS\varphi_3+K_0\varphi_4=0,\\ K_0\varphi_1+SKS\varphi_2+\varphi_3+KS\varphi_4=0,\\ K\varphi_1+K_0\varphi_2+SK\varphi_3+\varphi_4=0,\end{cases} \tag{6.19}$$

Так как $\left\|\overline{\Phi}_k\right\|_{\overline{C}}=1$ и $\left\|\overline{\Phi}_k-\overline{\Phi}\right\|_{\overline{C}}\to 0$, то $\left\|\overline{\Phi}\right\|_{\overline{C}}=1$. Это равенство противоречит утверждению следствия 4.1, так как система (6.19) не имеет ненулевого решения.

Теорема 6.1 доказана.

Теорема 6.2. ***Система интегральных уравнений* (4.8) *однозначно разрешима в пространстве*** $\overline{C}[0,1]$**.**

Доказательство. В силу теоремы 6.1 достаточно доказать, что образ оператора $I+A$ совпадает со всем пространством $\overline{C}[0,1]$. Пусть $\overline{\Psi}\in\overline{C}[0,1]$ – произвольная вектор – функция. Покажем, что уравнение

$$\overline{\Phi}+A\overline{\Phi}=\overline{\Psi} \tag{6.20}$$

разрешимо в $\overline{C}[0,1]$. Пусть $0<\lambda<1$ – произвольное число. Тогда существует вектор – функция $\overline{\Phi}_\lambda \in \overline{C}[0,1]$ такая, что

$$\overline{\Phi}_\lambda + \lambda A \overline{\Phi}_\lambda = \overline{\Psi}, \tag{6.21}$$

где $\overline{\Phi_\lambda}$ определяется равенством

$$\overline{\Phi}_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}\overline{\Psi}.$$

Существование обратного оператора $(I+\lambda A)^{-1}$ следует из равенства $\|A\|_{\overline{C}\to\overline{C}}=1$ и условия $0<\lambda<1$.

Из неравенства (6.1) при $\lambda>1-\dfrac{d}{2}$ будем иметь:

$$\left\|\overline{\Phi}_\lambda\right\|_{\overline{C}} \le \frac{1}{d}\left\|\overline{\Phi}_\lambda + A\overline{\Phi}_\lambda\right\|_{\overline{C}} = \frac{1}{d}\left\|\overline{\Phi}_\lambda + \lambda A\overline{\Phi}_\lambda + (1-\lambda)A\overline{\Phi}_\lambda\right\|_{\overline{C}} \le$$

$$\le \frac{1}{d}\left\|\overline{\Phi}_\lambda + \lambda A\overline{\Phi}_\lambda\right\|_{\overline{C}} + \frac{1-\lambda}{d}\left\|A\overline{\Phi}_\lambda\right\|_{\overline{C}} \le$$

$$\le \frac{1}{d}\left\|\overline{\Psi}\right\|_{\overline{C}} + \frac{1-\lambda}{d}\left\|\overline{\Phi}_\lambda\right\|_{\overline{C}} \le \frac{1}{d}\left\|\overline{\Psi}\right\|_{\overline{C}} + \frac{1}{2}\left\|\overline{\Phi}_\lambda\right\|_{\overline{C}}.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\left\|\overline{\Phi}_\lambda\right\|_{\overline{C}} \le \left\|(I+\lambda A)^{-1}\overline{\Psi}\right\|_{\overline{C}} \le \frac{2}{d}\left\|\overline{\Psi}\right\|_{\overline{C}}$$

при $1-\dfrac{d}{2}<\lambda<1$ для любой вектор-функции $\overline{\Psi}\in\overline{C}[0,1]$.

Пусть $1-\dfrac{d}{2}<\lambda,\lambda'<1$. Тогда имеем

$$\overline{\Phi}_\lambda - \overline{\Phi}_{\lambda'} = (I+\lambda A)^{-1}\overline{\Psi} - (I+\lambda' A)^{-1}\overline{\Psi} = (I+\lambda A)^{-1}(\lambda'-\lambda)(I+\lambda' A)^{-1}\overline{\Psi}.$$

Переходя к норме в этом равенстве, получим:

$$\left\|\overline{\Phi}_\lambda - \overline{\Phi}_{\lambda'}\right\|_{\overline{C}} \le |\lambda'-\lambda|\left\|(I+\lambda' A)^{-1}\right\|_{\overline{C}\to\overline{C}}\left\|(I+\lambda A)^{-1}\right\|_{\overline{C}\to\overline{C}}\left\|\overline{\Psi}\right\|_{\overline{C}} \le |\lambda'-\lambda|\cdot\frac{4}{d^2}\left\|\overline{\Psi}\right\|_{\overline{C}}.$$

Пусть $1-\dfrac{d}{2}<\lambda_k<1,\ \lambda_k\to 1,\ k\to\infty$. В последнем неравенстве, полагая $\lambda=\lambda_k,\ \lambda'=\lambda_m$, получим, что последовательность $\left\{\overline{\Phi}_{\lambda_k}\right\}$ является фундаментальной. Пусть $\overline{\Phi}_{\lambda_k}\to\overline{\Phi},\quad k\to\infty$. Переходя в равенстве (6.21) к пределу при $\lambda=\lambda_k$, $k\to\infty$, получим равенство (6.20). Это означает, что образом оператора $I+A$ является $\overline{C}[0,1]$. Отсюда и из (6.1) вытекает существование $(I+A)^{-1}$ и справедливость оценки

$$\left\|(I+A)^{-1}\right\|_{\overline{C}\to\overline{C}}\le\frac{1}{d}.$$

Теорема 6.2 доказана.

Определение. Будем говорить, что вектор-функция

$$\overline{\Psi}(x)=\left(\psi_1(x),\psi_2(x),\psi_3(x),\psi_4(x)\right)^{\mathrm{т}}$$

удовлетворяет **условию согласованности в угловых точках области**, если имеют место равенства

$$\psi_1(0)=\psi_4(0),\ \psi_1(1)=\psi_2(0),\ \psi_3(1)=\psi_2(1),\ \psi_3(0)=\psi_4(1). \qquad (6.22)$$

Теорема 6.3. ***Пусть вектор-функция***

$$\overline{\Psi}(x)=\left(\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \psi_3(x),\ \psi_4(x)\right)^{\mathrm{т}}$$

удовлетворяет условию согласованности* (6.22). *Тогда решение

$$\overline{\Phi}(x)=\left(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \varphi_4(x)\right)^{\mathrm{т}}$$

системы* (2.23) *удовлетворяет условию согласованности.

Доказательство. При $x=1$ из первого и при $x=0$ из второго уравнений системы (2.23) будем иметь

$$\begin{cases}\varphi_1(1)+SK\varphi_2(1)+K_0\varphi_3(1)+K\varphi_4(1)=\psi_1(1),\\ KS\varphi_1(0)+\varphi_2(0)+SKS\varphi_3(0)+K_0\varphi_4(0)=\psi_2(0).\end{cases} \qquad (6.23)$$

Так как

$$SK\varphi(1)=\frac{\varphi(0)}{2},\quad K_0\varphi(1)=KS\varphi(1),$$

$$KS\varphi(0)=\frac{\varphi(1)}{2},\quad SKS\varphi(0)=KS\varphi(1),\quad K_0\varphi(0)=K\varphi(1),$$

то подставляя эти равенства в (6.23), получаем:

$$\begin{cases}\varphi_1(1)+\dfrac{\varphi_2(0)}{2}+KS\varphi_3(1)+K\varphi_4(1)=\psi_1(1),\\ \dfrac{\varphi_1(1)}{2}+\varphi_2(0)+KS\varphi_3(1)+K\varphi_4(1)=\psi_2(0).\end{cases} \qquad (6.24)$$

Из (6.24), в силу второго из равенств (2.23), будем иметь: $\varphi_1(1)=\varphi_2(0)$.

Аналогичными рассуждениями при $x=1$ из второго и третьего уравнений системы (2.23) получим $\varphi_2(1)=\varphi_3(1)$, при $x=0$ из третьего и при $x=1$ из четвертого уравнений системы (2.23), получим $\varphi_3(0)=\varphi_4(1)$, при $x=0$ из первого и четвертого уравнений системы (2.23) получим $\varphi_1(0)=\varphi_4(0)$.

Теорема 6.3 доказана.

7. СЛАБАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА K В ПРОСТРАНСТВЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

В этом пункте доказываются утверждения, используемые в доказательстве теоремы об ограниченности решения задачи Дирихле в пространстве ограниченных измеримых функций на отрезке $[0,1]$.

Лемма 7.1. ***Пусть*** $\{\varphi_k(x)\}$ ***– последовательность ограниченных измеримых функций:***

$$\|\varphi_k\|_{L_\infty[0,1]} \le N, \quad k=1,2,\dots\ .$$

Тогда существуют функция $\varphi_0 \in L_\infty[0,1]$ ***и подпоследовательность*** $\{\varphi_{k_j}(x)\}$ ***последовательности*** $\{\varphi_k(x)\}$***, удовлетворяющие условию***

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^x \left(\varphi_{k_j}(\xi)-\varphi_0(\xi)\right)d\xi = 0, \quad x\in[0,1].$$

Доказательство. Положим

$$\psi_k(x)=\int_0^x \varphi_k(\xi)\,d\xi. \tag{7.1}$$

Семейство $\{\psi_k\}$ равномерно ограничено:

$$|\psi_k(x)| \le \|\varphi_k\|_{L_\infty[0;1]}|x| \le \|\varphi_k\|_{L_\infty[0;1]} \le N$$

и равностепенно непрерывно, так как

$$|\varphi_k(x)-\varphi_k(x')| = \left|\int_x^{x'} \varphi_k(\xi)\,d\xi\right| \le \|\varphi_k\|_{L_\infty[0;1]}|x-x'| \le K|x-x'|, \ \ K=\mathrm{const}, \tag{7.2}$$

т.е. функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют условию Липшица. Поэтому, в силу теоремы Арцела, без ограничения общности, можно считать, что существует функция $\psi_0(x)$, удовлетворяющая равенству

$$\lim_{k\to\infty}\max_{0\le x\le 1}\left|\psi_k(x)-\psi_0(x)\right|=0. \tag{7.3}$$

Очевидно, функция $\psi_0(x)$ удовлетворяет условию Липшица, которое следует из (7.2). Следовательно, функция $\psi_0(x)$ является абсолютно непрерывной. Поэтому почти всюду имеет место неравенство $\left|\psi_0'(x)\right|\le M$, означающее, что $\varphi_0(x)=\psi_0'(x)\in L_\infty[0;1]$. Из этого равенства и абсолютной непрерывности функции $\psi_0(x)$ следует равенство

$$\psi_0(x)=\int_0^x \varphi_0(\xi)\,d\xi, \tag{7.4}$$

так как $\psi_0(0)=0$.

Таким образом, из (7.3), в силу (7.1) и (7.4), получим:

$$\lim_{k\to\infty}\max_{0\le x\le 1}\left|\int_0^x\big(\varphi_k(\xi)-\varphi_0(\xi)\big)d\xi\right|=0.$$

Лемма 7.1 доказана.

Лемма 7.2. ***Пусть*** $\{\varphi_k(x)\}$ ***является последовательностью ограниченных измеримых функций***

$$\|\varphi_k\|_{L_\infty[0,1]}\le N,\quad k=1,2,\dots ,$$

удовлетворяющих условию

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^x\big(\varphi_k(\xi)-\varphi_0(\xi)\big)d\xi=0.$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty}(\Pi\varphi_k)(x,y)=(\Pi\varphi_0)(x,y),$$

где

$$(\Pi\varphi)(x,y)=\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{x^2+(y-\eta)^2},\quad 0<x\le 1,\quad 0\le y\le 1.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, имеем:

$$(\Pi\varphi_k)(x,y)=\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_k(\eta)d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}=$$

$$\frac{x}{\pi}\left.\frac{\int_0^\eta\varphi_k(s)ds}{x^2+(\eta-y)^2}\right|_{\eta=0}^{1}+\frac{2x}{\pi}\int_0^1\frac{(\eta-y)\int_0^\eta\varphi_k(s)ds}{\left(x^2+(\eta-y)^2\right)^2}d\eta=$$

$$=\frac{x}{\pi\left(x^2+(1-y)^2\right)}\int_0^1\varphi_k(s)ds+\frac{2x}{\pi}\int_0^1\frac{(\eta-y)}{\left(x^2+(\eta-y)^2\right)^2}\int_0^\eta\varphi_0(s)dsd\eta+$$

$$+\frac{2x}{\pi}\int_0^1\left[\frac{(\eta-y)}{\left(x^2+(\eta-y)^2\right)^2}\int_0^\eta\left(\varphi_k(s)-\varphi_0(s)\right)ds\right]d\eta.$$

Подынтегральная функция

$$\chi_k(\eta)=\frac{(\eta-y)}{\left(x^2+(\eta-y)^2\right)^2}\int_0^\eta\left(\varphi_k(s)-\varphi_0(s)\right)ds$$

является ограниченной и стремится к нулю при каждом $\eta\in[0;1]$. Тогда, согласно теореме Лебега, можно переходить к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{k\to\infty}(\Pi\varphi_k)(x,y)=\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_0(\eta)d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}+$$

$$+\frac{2x}{\pi}\int_0^1\frac{(\eta-y)}{\left(x^2+(\eta-y)^2\right)^2}\int_0^\eta\varphi_0(s)dsd\eta=(\Pi\varphi_0)(x,y).$$

Лемма 7.2 доказана.

Лемма 7.3. ***Пусть*** $\boldsymbol{\varphi\in L_\infty[0;1]}$. ***Тогда для каждой точки*** $\boldsymbol{(x,y)\in G=(0,1)\times(0,1)}$ ***справедлива оценка***

$$\boldsymbol{\left|(\Pi\varphi)(x,y)\right|\le\|\varphi\|_{L_\infty[0;1]}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\left|(\Pi\varphi)(x,y)\right| = \left|\frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}\right| \le \frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{|\varphi(\eta)|\,d\eta}{x^2+(y-\eta)^2} \le$$

$$\le \frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}\left\|\varphi(\eta)\right\|_{L_\infty[0;1]} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)\left\|\varphi(\eta)\right\|_{L_\infty[0;1]} \le \left\|\varphi(\eta)\right\|_{L_\infty[0;1]}.$$

Лемма 7.3 доказана.

8. ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ПУАССОНА С ПЛОТНОСТЬЮ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ОГРАНИЧЕННЫХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\varphi(x)$ – ограниченная измеримая функция на всей числовой оси. Определим функцию

$$\overline{\varphi}(x) = \lim_{h\to 0+}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi(\xi+x)\,d\xi,\quad 0<h\le h_0<\infty \tag{8.1}$$

во всех точках $x\in\mathbb{R}$, где существует предел в правой части (8.1). Множество таких точек обозначим $D\left(\overline{\varphi}\right)$. Согласно теореме Лебега ([12], теорема 5, стр. 275), ,множество $D\left(\overline{\varphi}\right)$ имеет полную меру на любом отрезке числовой оси и справедливо равенство $\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)$ почти всюду. Вне множества $D\left(\overline{\varphi}\right)$ функцию $\overline{\varphi}(x)$ продолжим равенством $\overline{\varphi}(x)=0$.

Гармоническую функцию

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}\equiv\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\varphi}(\xi)\,d\xi}{y^2+(x-\xi)^2},\qquad y>0,$$

на граничные точки $(x,0)$ области $y>0$ продолжим по формуле:

$$\overline{u}(x,y)=\begin{cases} u(x,y), & \text{если}\quad y>0,\ -\infty<x<\infty,\\ \overline{\varphi}(x), & \text{если}\quad y=0,\ x\in D\left(\overline{\varphi}\right).\end{cases} \tag{8.2}$$

Лемма 8.1. ***Во всех точках*** $\boldsymbol{(x,0)}$***, где*** $\boldsymbol{x \in D(\overline{\varphi})}$***, существует предел функции*** $\boldsymbol{u(x,y)}$ ***вдоль нормали к этой точке и справедливо равенство***

$$\lim_{y\to 0+} u(x,y) = \overline{\varphi}(x), \qquad x \in D(\overline{\varphi}). \tag{8.3}$$

Доказательство. Воспользуясь тождеством

$$\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{y^2+(x-\xi)^2} = 1 \quad \text{при} \quad y>0,\ -\infty<x<\infty, \tag{8.4}$$

получим

$$u(x,y)-\overline{\varphi}(x) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)-\overline{\varphi}(x)}{y^2+(x-\xi)^2}d\xi = \left|\xi - x \to \xi\right| =$$

$$= \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x+\xi)-\overline{\varphi}(x)}{y^2+\xi^2}d\xi = \frac{y}{\pi}\int_{|\xi|\le\delta} + \frac{y}{\pi}\int_{|\xi|>\delta} \equiv I_{1\delta}+I_{2\delta}. \tag{8.5}$$

Для интеграла $I_{1\delta}$ будем иметь:

$$I_{1\delta} = \frac{y}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\varphi(x+\xi)-\overline{\varphi}(x)}{y^2+\xi^2}d\xi =$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = \dfrac{y}{\pi\left(y^2+\xi^2\right)} & dv = \left(\varphi(x+\xi)-\overline{\varphi}(x)\right)d\xi \\ du = -\dfrac{2y\xi d\xi}{\pi\left(y^2+\xi^2\right)^2} & v = \displaystyle\int_0^{\xi}\left(\varphi(x+s)-\overline{\varphi}(x)\right)ds \end{array} \right| =$$

$$= \frac{y}{\pi\left(y^2+\delta^2\right)}\cdot\left(v(\delta)-v(-\delta)\right) + \frac{2y}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\xi v(\xi)}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}d\xi. \tag{8.6}$$

Преобразуем каждое слагаемое по отдельности:

$$v(\delta)-v(-\delta) = \int_0^{\delta}\left[\varphi(x+s)-\overline{\varphi}(x)\right]ds -$$

$$\int_0^{-\delta}\left[\varphi(x+s)-\overline{\varphi}(x)\right]ds = \int_{-\delta}^{\delta}\left[\varphi(x+s)-\overline{\varphi}(x)\right]ds,$$

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\xi v(\xi)}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}d\xi = \int_0^{\delta} + \int_{-\delta}^{0} = \left| \begin{array}{c} \text{во втором интеграле} \\ \xi \to -\xi \end{array} \right| =$$

$$=\int_0^\delta \frac{\xi v(\xi)}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}d\xi-\int_0^\delta \frac{\xi v(-\xi)}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}d\xi=\int_0^\delta \frac{\xi\left[v(\xi)-v(-\xi)\right]}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}d\xi=\int_0^\delta \frac{2\xi^2 w(\xi)}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}d\xi,$$

где

$$w(\xi,x)=\frac{1}{2\xi}\int_{-\xi}^{\xi}\left[\varphi(x+s)-\overline{\varphi}(x)\right]ds=\frac{1}{2\xi}\left[v(\xi)-v(-\xi)\right].$$

Заметим, что функция $w(\xi,x)$ является непрерывной по первой переменной при $\xi>0$ и, в силу определения функции $\overline{\varphi}(x)$, при каждом $x\in D\left(\overline{\varphi}\right)$ имеет место предельное соотношение $w(\xi,x)\to 0,\ \ \xi\to 0$.

Пусть $\varepsilon>0$ - заданное число. Для данной точки $x\in D\left(\overline{\varphi}\right)$ величину $\delta>0$ выберем таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\sup\limits_{0<\xi<\delta}\left|w(\xi,x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Оценивая по модулю (8.6), будем иметь

$$\left|I_{1\delta}\right|\le\frac{2y\delta}{y^2+\delta^2}\left|w(\delta,x)\right|+\frac{4y}{\pi}\int_0^\delta\frac{\xi^2 d\xi}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}\cdot\sup_{0<\xi<\delta}\left|w(\xi,x)\right|. \tag{8.7}$$

Так как

$$\frac{2y\delta}{\pi\left(y^2+\delta^2\right)^2}+\frac{4y}{\pi}\int_0^\delta\frac{\xi^2 d\xi}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}<1,\ \ \left|w(\delta,x)\right|\le\sup_{0<\xi<\delta}\left|w(\xi,x)\right|,$$

то из неравенства (8.7) получаем:

$$\left|I_{1\delta}\right|\le\sup_{0<\xi<\delta}\left|w(\xi,x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.8}$$

Фиксируем δ и оценим интеграл $I_{2\delta}$. Имеем:

$$\left|I_{2\delta}\right|\le\left|\frac{y}{\pi}\int_{|\xi|>\delta}\frac{\varphi(x+\xi)-\overline{\varphi}(x)}{y^2+\xi^2}d\xi\right|\le\frac{y}{\pi}\int_{|\xi|>\delta}\frac{\left|\varphi(x+\xi)\right|+\left|\overline{\varphi}(x)\right|}{y^2+\xi^2}d\xi\le$$

$$\le\frac{4y}{\pi}\int_\delta^\infty\frac{d\xi}{y^2+\xi^2}\cdot\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{R})}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}\right)\cdot\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{R})}.$$

Величину $y_0>0$ выберем такой, чтобы при $0<y<y_0$ выполнялось неравенство

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}\right)\cdot\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{R})}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$|I_{2\delta}|\le\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.9}$$

Из (8.8) и (8.9) получим

$$\left|u(x,y)-\overline{\varphi}(x)\right|\le|I_{1\delta}|+|I_{2\delta}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \tag{8.10}$$

Так как $\varepsilon>0$ – произвольное число, то из (8.10) следует справедливость равенства (8.3).

Лемма 8.1 доказана.

Пусть функция $\alpha(y)$ удовлетворяет условиям: $\alpha(y)>0$ при $y>0$ и $\alpha(y)\to 0$ при $y\to 0+$. Для данной точки $x_0\in D(\overline{\varphi})$ и функции $\alpha(y)$ определим множество

$$G(x_0,\alpha)=\left\{(x,y):|x_0-x|\le y\alpha(y),\ y>0\right\}.$$

Функцию $\overline{u}(x,y)$ назовем $G(x_0,\alpha)$ – непрерывной в точке $(x_0,0)$, если

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\(x,y)\in G(x_0)}}\overline{u}(x,y)\equiv\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\(x,y)\in G(x_0)}}u(x,y)=\overline{\varphi}(x_0). \tag{8.11}$$

Теорема 8.1. ***Пусть $\varphi(x)$ – ограниченная измеримая функция на всей оси и $x_0\in D(\overline{\varphi})$. Тогда функция $\overline{u}(x,y)$, определенная в* (8.2)*, является $G(x_0,\alpha)$ – непрерывной в точке $(x_0,0)$.***

Доказательство. Так как в точке $x_0\in D(\overline{\varphi})$ существует предел в правой части (8.1), то по заданному $\varepsilon>0$ можно найти $h_0>0$ такое, что

$$\left|\overline{\varphi}(x_0)-\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi(x_0+\xi)\,d\xi\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{при}\quad 0<h<h_0. \tag{8.12}$$

Воспользуясь тождеством (8.4), аналогично равенству (8.5), будем иметь

$$u(x,y)-\overline{\varphi}(x_0)=I_{1\delta}+I_{2\delta},$$

где

$$I_{1\delta}=\frac{y}{\pi}\int\limits_{|\xi|\le\delta}\frac{\varphi(x+\xi)-\overline{\varphi}(x_0)}{y^2+\xi^2}d\xi\,,$$

$$I_{2\delta}=\frac{y}{\pi}\int\limits_{|\xi|>\delta}\frac{\varphi(x+\xi)-\overline{\varphi}(x_0)}{y^2+\xi^2}d\xi\,. \qquad (8.13)$$

Имеем:

$$I_{1\delta}=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{\varphi(x+\xi)-\overline{\varphi}(x_0)}{y^2+\xi^2}d\xi=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\dfrac{y}{\pi\left(y^2+\xi^2\right)} & dv=\varphi(x+\xi)-\overline{\varphi}(x_0) \\ du=-\dfrac{2y\xi d\xi}{\pi\left(y^2+\xi^2\right)^2} & v=\displaystyle\int\limits_0^{\xi}\left[\varphi(x+s)-\overline{\varphi}(x_0)\right]ds \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{y}{\pi\left(y^2+\xi^2\right)}\cdot v(\xi)\Bigg|_{\xi=-\delta}^{\delta}+\frac{2y}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{\xi v(\xi)}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}d\xi\,.$$

Так как

$$v(\xi)-v(-\xi)=\int\limits_0^{\xi}-\int\limits_0^{-\xi}=\int\limits_0^{\xi}+\int\limits_{-\xi}^{0}=\int\limits_{-\xi}^{\xi}\left[\varphi(x+s)-\overline{\varphi}(x_0)\right]ds\,,$$

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{\xi v(\xi)}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}d\xi=\int\limits_0^{\delta}+\int\limits_{-\delta}^{0}=\left|\begin{matrix}\text{во втором интеграле}\\ \xi\to-\xi\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\limits_0^{\delta}\frac{\xi v(\xi)}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}d\xi+\int\limits_{\delta}^{0}\frac{-\xi v(-\xi)}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}(-d\xi)=$$

$$=\int\limits_0^{\delta}\frac{\xi\left[v(\xi)-v(-\xi)\right]}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}d\xi=2\int\limits_0^{\delta}\frac{\xi^2 w(\xi,x,x_0)}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}d\xi\,,$$

где

$$w(\xi,x,x_0)=\frac{1}{2\xi}\int\limits_{-\xi}^{\xi}\left[\varphi(x+s)-\overline{\varphi}(x_0)\right]ds\,,$$

то интеграл (8.13) можно представить в виде

$$I_{1\delta}=\frac{2y\delta}{y^2+\delta^2}\cdot\frac{1}{2\pi}w(\xi,x,x_0)+\frac{4y}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\xi^2 w(\xi,x_0,x_0)}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}d\xi+$$

$$+\frac{4y}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\xi^2}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}\left[w(\xi,x,x_0)-w(\xi,x_0,x_0)\right]d\xi. \qquad (8.14)$$

Покажем непрерывность функции $w(\xi,x,x_0)$ по x в точке $x=x_0$ при каждом фиксированном $\xi:0<\xi\le\delta$. Действительно, имеем представление

$$w(\xi,x,x_0)=\frac{1}{2\xi}\int_{-\xi}^{\xi}\varphi(x+s)ds-\overline{\varphi}(x_0)=|x+s=u|=\frac{1}{2\xi}\int_{x-\xi}^{x+\xi}\varphi(u)du-\overline{\varphi}(x_0).$$

Полагая $x<x'$, рассмотрим разность:

$$w(\xi,x,x_0)-w(\xi,x',x_0)=\frac{1}{2\xi}\left[\int_{x-\xi}^{x+\xi}\varphi(u)du-\int_{x'-\xi}^{x'+\xi}\varphi(u)du\right]=$$

$$=\frac{1}{2\xi}\int_x^{x'}\left[\varphi(s-\xi)-\varphi(s+\xi)\right]ds. \qquad (8.15)$$

Из представления (8.15), при фиксированном $\xi:0<\xi\le\delta$ и $x\to x'$, будем иметь: $w(\xi,x',x_0)\to w(\xi,x,x_0)$ при $x'\to x$, в частности,

$$w(\delta,x,x_0)\to w(\delta,x_0,x_0) \quad \text{при} \quad x\to x_0. \qquad (8.16)$$

Условие (8.12) для функции $w(\xi,x,x_0)$ имеет вид

$$\left|w(h,x_0,x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad 0<h<h_0. \qquad (8.17)$$

Пусть $\delta:0<\delta<h_0$ – фиксированное число. Тогда в силу (8.16) существует $\sigma=\sigma(\delta)>0$ такое, что

$$\left|w(\delta,x,x_0)-w(\delta,x_0,x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad |x-x_0|<\sigma. \qquad (8.18)$$

Из (8.17) и (8.18) следуют неравенства

$$\left|w(\delta,x,x_0)\right|\le\left|w(\delta,x,x_0)-w(\delta,x_0,x_0)\right|+\left|w(\delta,x_0,x_0)\right|<\frac{2\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, для первого слагаемого в правой части (8.14) справедлива оценка

$$\frac{2y\delta}{y^2+\delta^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\left|w(\delta,x,x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\tag{8.19}$$

как только $0<\delta<h_0$ и $\left|x-x_0\right|<\sigma$.

Для второго слагаемого в правой части (8.14) справедлива оценка

$$\left|\frac{4y}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\xi^2 w(\xi,x_0,x_0)}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}d\xi\right|<\frac{\varepsilon}{3},\tag{8.20}$$

в силу выбора δ.

Рассмотрим последнее слагаемое. Имеем:

$$\frac{4y}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\xi^2}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}\left[w(\xi,x,x_0)-w(\xi,x_0,x_0)\right]d\xi=\left|\begin{matrix}\xi=ys\\ d\xi=yds\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\delta/y}\frac{s^2}{\left(1+s^2\right)^2}\left[w(ys,x,x_0)-w(ys,x_0,x_0)\right]ds=$$

$$=\frac{2}{\pi y}\int_0^{\delta/y}\frac{s}{\left(1+s^2\right)^2}\left(\int_x^{x_0}\left[\varphi(t-ys)-\varphi(t+ys)\right]dt\right)ds.$$

Оценив по модулю, получаем:

$$\left|\frac{4y}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\xi^2}{\left(y^2+\xi^2\right)^2}\left[w(\xi,x,x_0)-w(\xi,x_0,x_0)\right]d\xi\right|\le$$

$$\le\frac{2}{\pi y}\int_0^{\delta/y}\frac{s}{\left(1+s^2\right)^2}\left(\int_x^{x_0}\left[\ \left|\varphi(t-ys)\right|+\left|\varphi(t+ys)\right|\right]dt\right)ds\le$$

$$\le\frac{2}{\pi y}\int_0^{\delta/y}\frac{sds}{\left(1+s^2\right)^2}\cdot 2\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{R})}\le\frac{2\left|x_0-x\right|}{\pi y}\cdot\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{R})}\le$$

$$\le\frac{2\alpha(y)}{\pi}\cdot\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{R})}.\tag{8.21}$$

Так как $(x,y)\in G(x_0,\alpha)$, то существует $y_0>0$ такое, что при $0<y<y_0$ выполняется неравенство

$$\frac{2\alpha(y)}{\pi}\cdot\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{R})}<\frac{\varepsilon}{3},\quad (x,y)\in G(x_0,\alpha),\ 0<y<y_0\,. \tag{8.22}$$

Учитывая (8.19), (8.20), (8.21) и (8.22), получим окончательно:

$$|I_{1\delta}|<\varepsilon\,. \tag{8.23}$$

Далее фиксируем δ и оценим интеграл $I_{2\delta}$. Имеем:

$$|I_{2\delta}|\le\left|\frac{y}{\pi}\int\limits_{|\xi|>\delta}\frac{\varphi(x+\xi)-\overline{\varphi}(x_0)}{y^2+\xi^2}d\xi\right|\le\frac{y}{\pi}\int\limits_{|\xi|>\delta}\frac{|\varphi(x+\xi)|+|\overline{\varphi}(x_0)|}{y^2+\xi^2}d\xi\le$$

$$\le\frac{4y}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{d\xi}{y^2+\xi^2}\cdot\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{R})}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}\right)\cdot\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{R})}\,.$$

Величину $y_0>0$ будем считать настолько малой, чтобы наряду с (8.22) при $0<y<y_0$ выполнялось и неравенство

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}\right)\cdot\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{R})}<\varepsilon\,.$$

Тогда

$$|I_{2\delta}|\le\varepsilon\,. \tag{8.24}$$

Из (8.23) и (8.24) получаем:

$$\left|u(x,y)-\overline{\varphi}(x_0)\right|\le|I_{1\delta}|+|I_{2\delta}|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\,. \tag{8.25}$$

Так как $\varepsilon>0$ – произвольное число, то из (8.25) следует справедливость равенства (8.11).

Теорема 8.1 доказана.

9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1.1 – 1.3

Доказательство теоремы 1.1. Эквивалентность условий а) и б) имеет место и в том случае, если условие гармоничности функции $u(x,y)$ заменить на условие непрерывности (доказательство следует из теоремы Кантора, см. [11]).

Импликация б) $\Rightarrow$ в). Дано, что гармоническая функция $u(x,y)$ непрерывна на $\overline{G}$. Определим непрерывную функцию $\Psi(x,y)=u(x,y)\big|_{\Gamma}$. Положим

$$\psi_1(x)=\Psi(x,0),\quad \psi_2(x)=\Psi(1,x),\quad \psi_3(x)=\Psi(x,1),\quad \psi_3(x)=\Psi(0,x).$$

По этим функциям, в силу теоремы 6.2, однозначно определяется решение

$$\overline{\Phi}(x)=\left(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \varphi_4(x)\right)^{\text{т}}$$

системы (2.23). Определим гармоническую в области G функцию

$$v(x,y)=\sum_{i=1}^{4}v_i(x,y),$$

где

$$v_i(x,y)=\left(\Pi_i\varphi_i\right)(x,y),\quad i=\overline{1,4},$$

операторы Π_i, $i=\overline{1,4}$ определены равенствами (1.4).

Так как вектор-функция

$$\overline{\Psi}(x)=\left(\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \psi_3(x),\ \psi_4(x)\right)^{\text{т}}$$

является непрерывной на Γ, то она удовлетворяет условию согласованности и поэтому, в силу теоремы 6.3, вектор-функция $\overline{\Phi}(x)$ также удовлетворяет условию согласованности. Следовательно, вектор-функция $\Phi(x,y)$ – непрерывна на Γ и, поэтому, в силу теоремы 2.1, гармоническая функция $v(x,y)$ непрерывно продолжима на $\overline{G}$. След продолжения функции $v(x,y)$ на границе Γ совпадает с контурной функцией $\Psi(x,y)$: $v(x,y)\big|_{\Gamma}=\Psi(x,y)$. Отсюда и из (1.2) в силу принципа максимального значения гармонической функции [1] они совпадают и на квадрате G: $u(x,y)\equiv v(x,y)$.

Импликация б) $\Rightarrow$ в) доказана.

Импликации в) $\Rightarrow$ б) следует из теоремы 2.1. Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2.

Импликация а)$\Rightarrow$б). Пусть $u(x,y)$ – ограниченная гармоническая функция в области G, то есть

$$\left|u(x,y)\right| \le M, \quad (x,y)\in G.$$

Определим функции

$$u_\varepsilon(x,y) = u\left(\varepsilon x + \frac{1-\varepsilon}{2}, \varepsilon y + \frac{1-\varepsilon}{2}\right), \quad 0<\varepsilon<1.$$

Так как функция $u(x,y)$ определена в области G, то функции $u_\varepsilon(x,y)$ определены в области

$$G_\varepsilon = \left[\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}, \frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}\right] \times \left[\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}, \frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}\right],$$

которая содержит замкнутую область $\overline{G} = G \bigcup \Gamma$. Функции $u_\varepsilon(x,y)$ являются непрерывными на замкнутой области $\overline{G}$ при всех $\varepsilon: 0<\varepsilon<1$. След функции $u_\varepsilon(x,y)$ на границе Γ обозначим через $\Psi_\varepsilon(x,y)$:

$$\Psi_\varepsilon(x,y) = u_\varepsilon(x,y)\big|_\Gamma.$$

По этой функции определим вектор-функцию

$$\overline{\Psi}_\varepsilon(x) = \left(\psi_{1\varepsilon}(x),\ \psi_{2\varepsilon}(x),\ \psi_{3\varepsilon}(x),\ \psi_{4\varepsilon}(x)\right)^{\mathrm{т}},$$

где

$$\psi_{1\varepsilon}(t) = \Psi_\varepsilon(t,0),\ \psi_{2\varepsilon}(t) = \Psi_\varepsilon(1,t),\ \psi_{3\varepsilon}(t) = \Psi_\varepsilon(t,1),\ \psi_{4\varepsilon}(t) = \Psi_\varepsilon(0,t).$$

Заметим, что для любого $\varepsilon: 0<\varepsilon<1$ вектор-функция $\overline{\Psi}_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию согласованности.

Из теорем 6.1 и 6.2 вытекает существование вектор-функции

$$\overline{\Phi}_\varepsilon(x) = \left(\varphi_{1\varepsilon}(x),\ \varphi_{2\varepsilon}(x),\ \varphi_{3\varepsilon}(x),\ \varphi_{4\varepsilon}(x)\right)^{\mathrm{т}},$$

удовлетворяющей интегральному уравнению

$$(I+A)\overline{\Phi}_\varepsilon = \overline{\Psi}_\varepsilon(x)$$

и допускающей оценку

$$\left\|\overline{\Phi}_\varepsilon\right\|_{\overline{C}} \le \frac{1}{d}\left\|\overline{\Psi}_\varepsilon\right\|_{\overline{C}},$$

где d – некоторая константа.

Так как гармоническая функция $u_\varepsilon(x,y)$ является непрерывной на замкнутой области $\overline{G}=G\bigcup\Gamma$, то, в силу теоремы 1.1 пункт в), она допускает представление

$$u_\varepsilon=\sum_{i=1}^{4}u_{i\varepsilon},\quad u_{i\varepsilon}=\left(\Pi_i\varphi_{i\varepsilon}\right)(x,y),\quad (x,y)\in G,\quad i=\overline{1,4}. \tag{9.1}$$

Пусть задана последовательность $\{\varepsilon_k\}:\varepsilon_k\to 1-0$ при $k\to\infty$. Без ограничения общности, в силу леммы 7.1, будем считать, что для данной последовательности $\{\varepsilon_k\}$ существуют функции

$$\varphi_{1,1}(x),\quad \varphi_{2,1}(x),\quad \varphi_{3,1}(x),\quad \varphi_{4,1}(x)\in L_\infty[0;1],$$

удовлетворяющие соотношениям:

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^x\left(\varphi_{i\varepsilon_k}(\xi)-\varphi_{i,1}(\xi)\right)d\xi=0,\qquad i=\overline{1,4}.$$

Согласно лемме 8.2 имеет место предельное соотношение

$$u_{i\varepsilon_k}(x,y)\to u_{i,1}(x,y),\quad (x,y)\in G,\quad i=\overline{1,4}\ \text{при}\ k\to\infty. \tag{9.2}$$

В равенстве (9.1) при $\varepsilon=\varepsilon_k$, переходя к пределу при $k\to\infty$, в силу (9.2), будем иметь

$$\lim_{k\to\infty}u_{\varepsilon_k}(x,y)=\sum_{i=1}^{4}u_{i1}(x,y). \tag{9.3}$$

С другой стороны, по определению функции u_ε имеем:

$$\lim_{k\to\infty}u_{\varepsilon_k}(x,y)=u(x,y). \tag{9.4}$$

Из (9.3) и (9.4) следует, что функция $u(x,y)$ представлена в виде суммы четырех функций, каждая из которых имеет вид (1.4).

Импликация а)$\Rightarrow$б) доказана.

Импликация б) $\Rightarrow$ а). Так как

$$\Pi_1=T\Pi,\ \Pi_2=S\Pi,\ \Pi_3=ST\Pi,\ \Pi_4=\Pi,$$

где

$$(\Pi\varphi)(x,y)=\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{x^2+(y-\eta)^2},\ (Tu)(x,y)=u(y,x),\ (Su)(x,y)=u(1-x,y),$$

то, в силу леммы 7.1, верна импликация б) $\Rightarrow$ а).

Теорема 1.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.3. Необходимость утверждения теоремы очевидна.

Достаточность. Если функция $\Psi(x,y)$ является непрерывной на Γ, то вектор-функция

$$\overline{\Psi}(x)=\left(\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \psi_3(x),\ \psi_4(x)\right)^{\text{т}},$$

где ψ_i, $i=\overline{1,4}$ – определенные выше, принадлежит пространству вектор-функций $\overline{C}[0,1]$ и удовлетворяют условию согласованности. Тогда, в силу теоремы 6.1, система интегральных уравнений (2.23) имеет единственное решение $\overline{\Phi}\in\overline{C}[0,1]$, которое, в силу теоремы 6.3, удовлетворяет условию согласованности. Отсюда, в силу теоремы 1.1, следует, что гармоническая функция $u(x,y)=\left(\Pi\overline{\Phi}\right)(x,y)$ непрерывно продолжима на замкнутую область $\overline{G}$ и ее след на Γ совпадает с вектор-функцией $\overline{\Psi}(x,y)$.

Теорема 1.3 доказана.

10. ТОЧКИ ЛЕБЕГА

В данном параграфе, наряду с известным понятием – точка Лебега функций пространства $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ – пространство функций интегрируемых по Лебегу на каждом конечном промежутке, вводятся новые понятия – точка типа Лебега и Шварца. Изучается поведение гармонических функций вблизи границы, с использованием точек типа Лебега и Шварца, и устанавливается асимптотика этих функций.

Определение 10.1. Точка $x\in(\mathbb{R})$ называется **точкой Лебега** [12, С. 275] локально интегрируемой по Лебегу функции $\varphi\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, если $\varphi(x)\neq\pm\infty$ и

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h\left|\varphi(x+t)-\varphi(x)\right|dt=0.$$

Если $\varphi\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, то [12, С. 275] почти всякая точка $x\in(\mathbb{R})$ является точкой Лебега этой функции.

Ниже всюду будем предполагать, что функция φ принадлежит пространству $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Определение 10.2. Точку $x\in(\mathbb{R})$ назовем **точкой типа Лебега** функции $\varphi\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, если существуют пределы

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_0^h \varphi(x+t)\,dt = a_+(x,\varphi), \tag{10.1}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{-h}^0 \varphi(x+t)\,dt = a_-(x,\varphi), \tag{10.2}$$

где $a_+(x,\varphi)$ и $a_-(x,\varphi)$ – некоторые числа.

Отметим, что точка типа Лебега является инвариантом класса эквивалентных функций, то есть не зависит от выбора функции из класса эквивалентных функций. Тогда как точка Лебега зависит от выбора представителя из класса эквивалентных функций.

Любая точка Лебега x_0 функции $\varphi\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ является точкой типа Лебега этой функции, причем $a_+(x_0,\varphi)=a_-(x_0,\varphi)=\varphi(x_0)$. Обратное не верно: не всякая точка типа Лебега функции φ является точкой Лебега этой функции. Например, для функции Хевисайда

$$\chi(x)=\begin{cases}0, & \text{если } \ x\le 0,\\ 1, & \text{если } \ x>0,\end{cases}$$

точка $x_0=0$ является точкой типа Лебега этой функции, причем $a_+(x_0,\varphi)=1$, $a_-(x_0,\varphi)=0$. Однако эта точка не является точкой Лебега функции Хевисайда, так как предел

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \left|\varphi(x+t)-\varphi(0)\right|dt = \lim_{|h|\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \left|\varphi(x+t)\right|dt$$

не существует. Все остальные точки: $x\neq 0$ являются точками Лебега функции Хевисайда.

Более того, множество точек типа Лебега может совпадать с числовой осью, а множество точек Лебега – нет. Например, только иррациональные числа являются точками Лебега функции Дирихле

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x-\text{рационально},\\ 1, & \text{если} \quad x-\text{иррационально},\end{cases}$$

тогда как все точки из $(\mathbb{R})$ являются точками типа Лебега этой функции.

Определение 10.3. Точку типа Лебега $x\in(\mathbb{R})$ функции $\varphi\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ назовем **устранимой**, если $a_+(x,\varphi)=a_-(x,\varphi)$, при этом будем использовать обозначение $a(x,\varphi)\equiv a_+(x,\varphi)=a_-(x,\varphi)$.

Определение 10.4. Точку $x\in(\mathbb{R})$ назовем **точкой Шварца** функции $\varphi\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, если неопределенный интеграл от функции φ: $v(\xi)=\int\limits_0^{\xi}\varphi(s)\,ds$ дифференцируем по Шварцу в этой точке [12, С. 323], то есть существует конечный предел

$$s(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{v(x+h)-v(x-h)}{2h}.$$

Точка Шварца является инвариантом класса эквивалентных функций, то есть не зависит от выбора функции из класса эквивалентных функций.

Отметим, что каждая точка x типа Лебега функции φ является точкой Шварца этой функции, причем $s(x)=\frac{1}{2}\big(a_+(x)+a_-(x)\big)$. В частности, все точки Лебега функции φ являются точками Шварца этой функции. В силу теоремы 5 [12, С. 275] почти при всех $x\in(\mathbb{R})$ имеет место равенство $s(x)=\varphi(x)$. Обратное не верно. Действительно, рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn} x, & \text{если} \quad \dfrac{1}{2^{2n-1}}\le|x|\le\dfrac{1}{2^{2n-2}},\\ 0, & \text{если} \quad \dfrac{1}{2^{2n}}<|x|<\dfrac{1}{2^{2n-2}},\\ 0, & \text{если} \quad |x|>1.\end{cases}$$

Точка $x_0=0$ является точкой Шварца функции $\varphi(x)$, так как

$$v(x_0+h)-v(x_0-h)=\int\limits_{-h}^{h}\varphi(s)\,ds\equiv 0,\qquad h\in(\mathbb{R}),$$

поэтому

$$\lim_{h\to 0+}\frac{v(x_0+h)-v(x_0-h)}{2h}=0.$$

Однако точка $x_0=0$ не является точкой типа Лебега функции $\varphi(x)$. Действительно, имеем: $\frac{1}{h_{1n}}\int_0^{h_{1n}}\varphi(s)\,ds=\frac{2}{3}$, если $h=h_{1n}=\frac{1}{2^{2n-1}}$ и $\frac{1}{h_{2n}}\int_0^{h_{2n}}\varphi(s)\,ds=\frac{4}{3}$, если $h=h_{2n}=\frac{1}{2^{2n}}$. Следовательно, предел $\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_0^h\varphi(s)\,ds$ не существует. Из нечетности функции $\varphi(x)$ вытекает, что предел $\lim_{h\to 0-}\frac{1}{h}\int_0^h\varphi(s)\,ds$ также не существует.

Определение 10.5. Функцию $\overline{\varphi}(x)$ назовем **функцией Лебега** класса эквивалентных функций, содержащего данную функцию φ, если

$$\overline{\varphi}(x)=\begin{cases} s(x), & \text{если } x-\text{точка Шварца функции } \varphi,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Функция Лебега является единственной в классе эквивалентных ей функций. Если данный класс содержит непрерывную функцию, то она и является функцией Лебега этого класса.

Пусть $\varphi\in L_\infty(\mathbb{R})$. Изучим поведение гармонической функции

$$u(x,\,y;\,\varphi)\equiv u(x,\,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{y^2+(x-\xi)^2} \tag{10.3}$$

при $y\to 0+$.

Лемма 10.1. ***Пусть*** $\boldsymbol{\varphi\in L_\infty(\mathbb{R})}$ ***и*** $\boldsymbol{x_0\in(\mathbb{R})}$ ***ее точка Шварца. Тогда***

$$\lim_{y\to 0+}u(x_0,y)=s(x_0).$$

Доказательство. Полагая $v(\xi)=\int\limits_{x_0}^{\xi}\varphi(s)\,ds$ и интегрируя по частям

$$\left[\begin{array}{ll} u(\xi)=\dfrac{1}{y^2+(x_0-\xi)^2} & dv(\xi)=\varphi(\xi)\,d\xi \\ du(\xi)=\dfrac{-2(\xi-x_0)\,d\xi}{\left(y^2+(x_0-\xi)^2\right)^2} & v(\xi)=\int\limits_{x_0}^{\xi}\varphi(s)\,ds \end{array}\right],$$

получим

$$u(x_0,\,y)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{y^2+(x_0-\xi)^2}=\frac{y}{\pi}\frac{\int\limits_{x_0}^{\xi}\varphi(s)\,ds}{y^2+(x_0-\xi)^2}\Bigg|_{\xi=-\infty}^{\infty}+$$

$$+\frac{2y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x_0)v(\xi)}{\left(y^2+(x_0-\xi)^2\right)^2}d\xi=\left|\xi=x_0+t\right|=\frac{2y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{tv(x_0+t)}{\left(y^2+t^2\right)^2}dt=$$

$$=\frac{2y}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{tv(x_0+t)}{\left(y^2+t^2\right)^2}dt+\frac{2y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{tv(x_0+t)}{\left(y^2+t^2\right)^2}dt=$$

$$=\frac{2y}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{tv(x_0+t)}{\left(y^2+t^2\right)^2}dt-\frac{2y}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{tv(x_0-t)}{\left(y^2+t^2\right)^2}dt=\frac{2y}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{t\left(v(x_0+t)-v(x_0-t)\right)}{\left(y^2+t^2\right)^2}dt=$$

$$=\frac{4y}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\left[\frac{1}{2t}\left(v(x_0+t)-v(x_0-t)\right)-s(x_0)\right]t^2}{\left(y^2+t^2\right)^2}dt+\frac{4ys(x_0)}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{t^2}{\left(y^2+t^2\right)^2}dt\equiv I_1+I_2\,.$$

Оценим модуль первого слагаемого. Пусть $\delta>0$ – произвольное число. Тогда

$$I_1\le\frac{4y}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\left|\frac{1}{2t}\left(v(x_0+t)-v(x_0-t)\right)-s(x_0)\right|t^2}{\left(y^2+t^2\right)^2}dt=$$

$$=\frac{4y}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}\frac{\left|\frac{1}{2t}\left(v(x_0+t)-v(x_0-t)\right)-s(x_0)\right|t^2}{\left(y^2+t^2\right)^2}dt+$$

$$+\frac{4y}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\left|\frac{1}{2t}\left(v\left(x_0+t\right)-v\left(x_0-t\right)\right)-s\left(x_0\right)\right|t^2}{\left(y^2+t^2\right)^2}dt\equiv I_{11}+I_{12}.$$

Величину $\delta: 0<\delta<\frac{\pi}{2}$ выберем такой, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\frac{1}{2t}\left(v\left(x_0+t\right)-v\left(x_0-t\right)\right)-s\left(x_0\right)\right|<\varepsilon \quad \text{при} \quad 0<t<\delta.$$

Воспользуясь неопределенным интегралом

$$\int\frac{t^2dt}{\left(y^2+t^2\right)^2}=\frac{1}{2y}\operatorname{arctg}\frac{t}{y}-\frac{t}{2\left(y^2+t^2\right)}, \tag{10.4}$$

будем иметь

$$I_{11}<\frac{4y\varepsilon}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{t^2}{\left(y^2+t^2\right)^2}dt=\frac{4y\varepsilon}{\pi}\left(\frac{1}{2y}\operatorname{arctg}\frac{t}{y}-\frac{t}{2\left(y^2+t^2\right)}\right)\Bigg|_{t=0}^{\delta}=$$

$$=\frac{4y\varepsilon}{\pi}\left(\frac{1}{2y}\operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}-\frac{\delta}{2\left(y^2+\delta^2\right)}\right)<\frac{2\varepsilon}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}<\varepsilon.$$

Фиксируем δ. Так как функция $\frac{1}{2t}\left(v\left(x_0+t\right)-v\left(x_0-t\right)\right)-s\left(x_0\right)$ является ограниченной на всей оси, то найдется число c такое, что

$$\left|\frac{1}{2t}\left(v\left(x_0+t\right)-v\left(x_0-t\right)\right)-s\left(x_0\right)\right|<c \quad \text{при} \quad 0<t<\infty.$$

Оценим I_{12}. Полагая $y_0=\frac{\pi\delta\varepsilon}{4c}$ при $0<y<y_0$, имеем

$$I_{12}<\frac{4cy}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{t^2}{\left(y^2+t^2\right)^2}dt=\frac{4cy}{\pi}\left(\frac{1}{2y}\operatorname{arctg}\frac{t}{y}-\frac{t}{2\left(y^2+t^2\right)}\right)\Bigg|_{t=\delta}^{\infty}=$$

$$=\frac{4cy}{\pi}\left(\frac{1}{2y}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2y}\operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}+\frac{\delta}{2\left(y^2+\delta^2\right)}\right)=$$

$$=\frac{2c}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{\delta}+\frac{\delta y}{2\left(y^2+\delta^2\right)}\right)<\frac{2c}{\pi}\left(\frac{y}{\delta}+\frac{y}{\delta}\right)=\frac{4cy}{\pi\delta}<\varepsilon.$$

Итак, нами получена оценка

$$\left|I_1\right| < 2\varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < y < y_0. \tag{10.5}$$

Воспользуясь (10.4), вычислим интеграл I_2:

$$I_2 = \frac{4ys(x_0)}{\pi}\left(\frac{1}{2y}\operatorname{arctg}\frac{t}{y} - \frac{t}{2\left(y^2+t^2\right)}\right)\Bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{4ys(x_0)}{\pi}\frac{\pi}{4y} = s(x_0).$$

Отсюда и из (10.5) вытекает соотношение

$$\left|u(x_0,\, y) - s(x_0)\right| = \left|I_1\right| < 2\varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < y < y_0.$$

Лемма 10.1 доказана.

Заметим, что если функция ψ эквивалентна функции $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R})$, то из представления (10.3) следует тождество $u(x,y;\psi) \equiv u(x,y;\varphi)$. В силу этого замечания, без ограничения общности, можно считать, что рассматриваемая функция $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R})$ является функцией Лебега класса эквивалентных ей функций. Поэтому из леммы 10.1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 10.1. ***Пусть $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R})$ является функцией Лебега класса эквивалентных ей функций и $x_0 \in (\mathbb{R})$ ее точка Шварца. Тогда***

$$\lim_{y\to 0+} u(x_0, y; \varphi) = \varphi(x_0).$$

Определение 10.6. Говорят, что функция $u(x,y)$, определенная в (10.3), имеет **некасательный предел** в точке $(x_0,0)$, $x_0 \in (\mathbb{R})$, если для каждого α: $0 < \alpha < +\infty$ существует конечный предел

$$\lim_{\substack{y\to 0+ \\ |x-x_0|<\alpha y}} u(x,y).$$

Заметим, что если в точке $(x_0,0)$, $x_0 \in (\mathbb{R})$ существует некасательный предел, то значение этого предела не зависит от величины α.

Пусть $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R})$ и $x_0 \in (\mathbb{R})$ ее точка типа Лебега. Положим $a_+ = a_+(x_0)$, $a_- = a_-(x_0)$, где $a_+(x_0)$ и $a_-(x_0)$ определены равенствами (10.1) и (10.2). Введем обозначения:

$$I_+(h,\, y)=\frac{2y}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{(t-h)t}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}\left(\frac{1}{t}v(x_0+t)-a_+\right)dt\,,$$

$$I_-(h,\, y)=\frac{2y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(t-h)t}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}\left(\frac{1}{t}v(x_0+t)-a_-\right)dt\,,$$

где $v(x)=\int\limits_0^x \varphi(s)\,ds$ – неопределенный интеграл функции от φ,

$$I_0(h,\, y)=\frac{2a_+y}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{(t-h)t}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}dt+\frac{2a_-y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(t-h)t}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}dt\,.$$

Тогда гармоническую функцию $u(x,y)$ можно представить в виде

$$u(x,y)=I_0(h,\, y)+I_+(h,\, y)+I_-(h,\, y)\,, \tag{10.6}$$

где переменные x и h связаны равенством $h=x-x_0$.

Действительно, интегрируя по частям, получим

$$u(x,\, y)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}=\frac{y}{\pi}\frac{v(\xi)}{y^2+(x-\xi)^2}\Bigg|_{\xi=-\infty}^{\infty}+$$

$$+\frac{2y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)v(\xi)}{\left(y^2+(x-\xi)^2\right)^2}d\xi=\frac{2y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)v(\xi)}{\left(y^2+(x-\xi)^2\right)^2}d\xi\,.$$

В полученном интеграле, произведя замену $\xi=x_0+t$ и введя обозначение $h=x-x_0$, будем иметь

$$u(x,y)=\frac{2y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(t-h)v(x_0+t)}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}dt=\frac{2y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(t-h)t}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}\cdot\frac{1}{t}v(x_0+t)\,dt=$$

$$=\frac{2y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(t-h)t}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}\left(\frac{1}{t}v(x_0+t)-a_-\right)dt+\frac{2a_-y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(t-h)t}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}dt+$$

$$+\frac{2a_+y}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{(t-h)t}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}dt+\frac{2y}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{(t-h)t}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}\left(\frac{1}{t}v(x_0+t)-a_+\right)dt=$$

$$=I_-(h,\, y)+I_0(h,\, y)+I_+(h,\, y)\,.$$

Лемма 10.2. ***Пусть*** $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R})$ ***и*** $x_0 \in (\mathbb{R})$ ***ее точка типа Лебега. Тогда справедливы равенства***

$$\lim_{\substack{|h|\le\alpha y\\ y\to 0+}} I_+(h,\, y)=0, \qquad \lim_{\substack{|h|\le\alpha y\\ y\to 0+}} I_-(h,\, y)=0.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ – задан. Число $\delta>0$ выберем таким, чтобы на промежутке $(0,\delta]$ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{1}{t}v(x_0+t)-a_+\right|<\varepsilon \qquad \text{при} \quad 0<t\le\delta.$$

При $t\in(\delta,\infty)$ функция $\frac{1}{t}v(x_0+t)-a_+$ – ограничена и, следовательно, $\left|\frac{1}{t}v(x_0+t)-a_+\right|<c_+$ при $t\in(\delta,\infty)$, где $c_+>0$ – некоторое число.

Полагая, что

$$y_0=\min\left\{\frac{\delta}{2\alpha},\, \frac{\delta\varepsilon(\pi+4\alpha)}{12c_+}\right\},$$

покажем справедливость оценки

$$\left|I_+(h,\, y)\right|\le\frac{\pi+4\alpha}{\pi}\varepsilon, \qquad |h|<\alpha y,\ 0<y<y_0 \tag{10.7}$$

Заметим, что в силу выбора y_0, имеют место соотношения

$$|h|<\alpha y<\alpha y_0\le\frac{\delta}{2}.$$

Имеем

$$\left|I_+(h,\, y)\right|\le\frac{2y}{\pi}\int_0^\infty\frac{|(t-h)t|}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}\left|\frac{1}{t}v(x_0+t)-a_+\right|dt<$$

$$<\frac{2y\varepsilon}{\pi}\int_0^\delta\frac{|(t-h)t|}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}dt+\frac{2yc_+}{\pi}\int_\delta^\infty\frac{|(t-h)t|}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}dt.$$

Полагая

$$I_{+1}(h,\, y)=\frac{2y}{\pi}\int_0^\delta\frac{|(t-h)t|}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}dt, \quad I_{+2}(h,\, y)=\frac{2y}{\pi}\int_\delta^\infty\frac{|(t-h)t|}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}dt,$$

получим

$$\left| I_{+}(h,\,y) \right| < \varepsilon I_{+1}(h,\,y) + c_{+} I_{+2}(h,\,y). \tag{10.8}$$

Оценим $I_{+1}(h,\,y)$. Рассмотрим два случая: а) $h<0$, б) $h>0$.

Случай а) $h<0$. Тогда $\left|(t-h)t\right| = (t-h)t$ и, следовательно,

$$I_{+1}(h,\,y) = \frac{2y}{\pi}\left(\frac{1}{2y}\operatorname{arctg}\frac{t-h}{y} - \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{y^2+(t-h)^2} \right)\Bigg|_{t=0}^{\delta} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\delta-h}{y} + \operatorname{arctg}\frac{h}{y} \right) - \frac{y}{\pi}\left(\frac{\delta}{y^2+(\delta-h)^2} - 0 \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{y\delta}{\pi\left(y^2+(\delta-h)^2\right)} < 1.$$

Случай б) $h>0$. Тогда $h<\dfrac{\delta}{2}$. Так как

$$I_{+1}(h,\,y) = \frac{2y}{\pi}\int_0^h \frac{\left|(t-h)t\right|}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}\,dt + \frac{2y}{\pi}\int_h^\delta \frac{\left|(t-h)t\right|}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}\,dt$$

и

$$\frac{2y}{\pi}\int_0^h \frac{\left|(t-h)t\right|}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}\,dt = -\frac{2y}{\pi}\int_0^h \frac{(t-h)t}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{0}{y} + \operatorname{arctg}\frac{h}{y} \right) + \frac{y}{\pi}\left(\frac{h}{y^2} - 0 \right) =$$

$$= \frac{h}{\pi y} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{h}{y} \le \frac{h}{\pi y} \le \frac{\alpha h}{\pi\cdot h} = \frac{\alpha}{\pi},$$

$$\frac{2y}{\pi}\int_h^\delta \frac{\left|(t-h)t\right|}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}\,dt = \frac{2y}{\pi}\int_h^\delta \frac{(t-h)t}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\delta-h}{y} + \operatorname{arctg}\frac{0}{y} \right) - \frac{y}{\pi}\left(\frac{\delta}{y^2+(\delta-h)^2} - \frac{h}{y^2} \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\delta-h}{y} - \frac{y\delta}{\pi\left(y^2+(\delta-h)^2\right)} + \frac{h}{\pi y} < \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha h}{\pi\cdot h} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\pi},$$

то $I_{+1}(h, y) < \frac{1}{2} + \frac{2\alpha}{\pi}$.

Учитывая, что $h < \frac{\delta}{2}$, оценим $I_{+2}(h, y)$. Имеем

$$I_{+2}(h, y) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t-h}{y}\Bigg|_{t=\delta}^{\infty} - \frac{y}{\pi}\frac{t}{y^2+(t-h)^2}\Bigg|_{t=\delta}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\delta-h}{y}\right) - \frac{y}{\pi}\left(0 - \frac{\delta}{y^2+(\delta-h)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{\delta-h} + \frac{y\delta}{\pi\left(y^2+(\delta-h)^2\right)} < \frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{\delta-h} + \frac{y\delta}{\pi\left(y^2+(\delta-h)^2\right)} <$$

$$< \frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{\frac{\delta}{2}} + \frac{y\delta}{\pi\left(0+\left(\frac{\delta}{2}\right)^2\right)} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2y}{\delta} + \frac{4y}{\delta}\right) = \frac{6y}{\pi\delta}.$$

Из этих оценок и (10.8) получим

$$\left|I_{+}(h, y)\right| < \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{2\alpha}{\pi}\right) + c_{+}\frac{6y}{\pi\delta} < \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{2\alpha}{\pi}\right) + c_{+}\frac{6y_0}{\pi\delta} \le \frac{\pi+4\alpha}{\pi}\varepsilon$$

для всех $(h, y): |h| < \alpha y,\ 0 < y < y_0$, которое доказывает справедливость (10.7). Отсюда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, следует справедливость $\lim\limits_{\substack{|h|\le\alpha y \\ y\to 0+}} I_{+}(h, y) = 0$.

Справедливость второго равенства $\lim\limits_{\substack{|h|\le\alpha y \\ y\to 0+}} I_{-}(h, y) = 0$ доказывается аналогичным образом.

Лемма 10.2 доказана.

В следующем утверждении устанавливается асимптотика гармонической функции в окрестности точки типа Лебега границы области.

Теорема 10.1. ***Пусть*** $\varphi \in L_{\infty}(\mathbb{R})$ ***и*** $x_0 \in (\mathbb{R})$ ***ее точка типа Лебега. Тогда для каждого*** $\alpha: 0 < \alpha < +\infty$ ***справедливо равенство***

$$\lim_{\substack{|x-x_0|\le\alpha y \\ y\to 0+}}\left[u(x, y) - \frac{a_{+} - a_{-}}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x-x_0}{y}\right] = \frac{a_{+} + a_{-}}{2}. \qquad (10.9)$$

Доказательство. Найдем выражение для интеграла $I_0(h,\, y)$, участвующего в (10.6). Воспользуясь неопределенным интегралом

$$\int \frac{(t-h)tdt}{\left(y^2+(t-h)^2\right)^2} = \frac{1}{2y}\operatorname{arctg}\frac{t-h}{y} - \frac{t}{2\left(y^2+(t-h)^2\right)},$$

будем иметь

$$I_0(h,\, y) = a_+ \cdot \frac{2y}{\pi}\left(\frac{1}{2y}\operatorname{arctg}\frac{t-h}{y} - \frac{t}{2\left(y^2+(t-h)^2\right)}\right)\Bigg|_{t=0}^{\infty} +$$

$$+a_- \cdot \frac{2y}{\pi}\left(\frac{1}{2y}\operatorname{arctg}\frac{t-h}{y} - \frac{t}{2\left(y^2+(t-h)^2\right)}\right)\Bigg|_{t=-\infty}^{0} =$$

$$= a_+\left[\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t-h}{y}\Bigg|_{t=0}^{\infty} - \frac{y}{\pi}\cdot\frac{t}{y^2+(t-h)^2}\Bigg|_{t=0}^{\infty}\right] +$$

$$+a_-\left[\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t-h}{y}\Bigg|_{t=-\infty}^{0} - \frac{y}{\pi}\cdot\frac{t}{y^2+(t-h)^2}\Bigg|_{t=-\infty}^{0}\right] =$$

$$= a_+\left[\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}\left(\frac{-h}{y}\right)\ \right) - \frac{y}{\pi}\cdot(0-0)\right] +$$

$$+a_-\left[\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-h}{y}\right) - \operatorname{arctg}(-\infty) - \ \right) - \frac{y}{\pi}\cdot(0-0)\right] =$$

$$= a_+\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{h}{y}\right) + a_-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{h}{y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(a_+ + a_-) + \frac{1}{\pi}(a_+ - a_-)\operatorname{arctg}\frac{h}{y}.$$

Итак

$$I_0 = \frac{1}{2}(a_+ + a_-) + \frac{1}{\pi}(a_+ - a_-)\operatorname{arctg}\frac{h}{y}.$$

Отсюда, из представления (10.6) и леммы 10.2, вытекает справедливость утверждения теоремы.

Теорема 10.1 доказана.

Признак существования некасательного предела функции $u(x,y)$ приводится в следующей теореме.

Теорема 10.2. ***Пусть $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R})$ и $x_0 \in (\mathbb{R})$ ее точка типа Лебега. Для существования некасательного предела функции $u(x,y)$, определенной в (10.3) в точке $(x_0, 0)$, необходимо и достаточно, чтобы x_0 являлась устранимой точкой типа Лебега функции φ.***

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $u(x,y)$ имеет некасательный предел в точке $(x_0, 0)$, то есть для каждого $\alpha: 0<\alpha<+\infty$ существует конечный предел

$$\lim_{\substack{|x-x_0|<\alpha y \\ y\to 0+}} u(x,y) = A.$$

Фиксируем одно α, например $\alpha=1$. Тогда из (10.9), получим:

$$\frac{a_+ - a_-}{\pi} \lim_{\substack{|x-x_0|\le y \\ y\to 0+}} \operatorname{arctg}\frac{x-x_0}{y} = A - \frac{a_+ + a_-}{2}. \qquad (10.10)$$

Так как предел в левой части полученного равенства зависит от траектории стремления точки $(x,\, y)$ к $(x_0,\, 0)$, например,

$$\lim_{\substack{|x-x_0|\le y \\ y\to 0+}} \operatorname{arctg}\frac{x-x_0}{2(x-x_0)} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \quad \text{при } y = 2(x-x_0),$$

$$\lim_{\substack{|x-x_0|\le y \\ y\to 0+}} \operatorname{arctg}\frac{x-x_0}{3(x-x_0)} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} \quad \text{при } y = 3(x-x_0),$$

а правая часть от этой траектории не зависит и является постоянной величиной, то для выполнения равенства (10.10) необходимо и достаточно выполнение равенства $a_+ - a_- = 0$. Это означает, что x_0 является устранимой точкой типа Лебега функции φ.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть x_0 – устранимая точка типа Лебега функции $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R})$, то есть $a_+ = a_-$. Тогда из (10.9) получим

$$\lim_{\substack{|x-x_0|<\alpha y \\ y\to 0+}} u(x,\, y) = \frac{a_+ + a_-}{2}.$$

Достаточность доказана.

Теорема 10.2 доказана.

11. ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим гармоническую функцию $u(x,y)$, заданную в области $G=(0,1)\times(0,1)$, с границей Γ.

Определение 11.1. Функция $\Psi(x,y)$, $(x,y)\in\Gamma$, называется **поточечным граничным значением** гармонической в области G функции $u(x,y)$, если имеют место условия

а) $\lim\limits_{y\to 0+} u(x,y)=\Psi(x,0)\equiv\psi_1(x)$ почти при всех x: $0<x<1$;

б) $\lim\limits_{x\to 1-} u(x,y)=\Psi(1,y)\equiv\psi_2(y)$ почти при всех y: $0<y<1$;

в) $\lim\limits_{y\to 1-} u(x,y)=\Psi(x,1)\equiv\psi_3(x)$ почти при всех x: $0<x<1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0+} u(x,y)=\Psi(0,y)\equiv\psi_4(y)$ почти при всех y: $0<y<1$.

Если $\Psi(x, y)$ является поточенным граничным значением функции $u(x,y)$, то используем обозначение $u|_\Gamma=\Psi$.

Пусть $\varphi\in L_\infty[0,1]$. Определим функцию

$$u(x,y)=(\Pi_1\varphi)(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{y^2+(\xi-x)^2},\quad y>0. \tag{11.1}$$

Заметим, что функция $u(x,y)$, определенная равенством (11.1), не зависит от представителя класса эквивалентных функций, которому принадлежит функция $\varphi(\xi)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\varphi(\xi)$ является функцией Лебега этого класса.

Существование граничных значений функции (11.1) связано с введенными понятиями и доказанными в предыдущем параграфе утверждениями.

Действительно, пусть $\varphi\in L_\infty[0,1]$. Отождествим эту функцию с функцией $\varphi\in L_\infty(\mathbb{R})$, совпадающей с данной функцией на отрезке $[0,1]$ и продолженной нулем вне этого отрезка. Для этой функции понятия «точка типа Лебега» и «точка Шварца» в точках $x=0$ и $x=1$ совпадают, а именно:

а) если $x=0$ является точкой Шварца функции φ, то она является и точкой типа Лебега этой функции, причем

$$a_-(0)=0,\quad a_+(0)=2s(0),$$

б) если $x=1$ является точкой Шварца функции φ, то она является и точкой типа Лебега этой функции, причем

$$a_+(1)=0,\quad a_-(1)=2s(1).$$

Заметим, что гармоническая функция $u(x,\,y)$, определенная равенством (10.3), тождественно равна гармонической функции $(\Pi_1\varphi)(x,\,y)$, определенной равенством (11.1) с плотностью $\varphi(x)$, продолженной нулем вне отрезка $[0,1]$.

Из леммы 10.1 следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 11.1. ***Пусть*** $\boldsymbol{\varphi\in L_\infty[0,1]}$ ***и*** $\boldsymbol{x_0\in\mathbb{R}}$ ***ее точка Шварца. Тогда***

$$\lim_{y\to 0+}(\Pi_1\varphi)(x,\,y)=s(x_0).$$

Пусть вектор-функция $\overline{\Phi}=(\varphi_1,\,\varphi_2,\,\varphi_3,\,\varphi_4)^{\mathrm{T}}$ соответствует контурной функции $\Phi(x,\,y)$.

Определение 11.2. Внутренними точками типа Лебега контурной функции $\Phi(x,\,y)$ назовем точки:

а) $(x,\,0)$, где $x\in(0,1)$ – точка типа Лебега функции φ_1;

б) $(1,\,y)$, где $y\in(0,1)$ – точка типа Лебега функции φ_2;

в) $(x,1)$, где $x\in(0,1)$ – точка типа Лебега функции φ_3;

г) $(0,\,y)$, где $y\in(0,1)$ – точка типа Лебега функции φ_4.

Определение 11.3. Угловыми точками типа Лебега контурной функции $\Phi(x,\,y)$ назовем точки:

а) $(0,\,0)$, если существуют конечные пределы:

$$a_+(0;\varphi_1)\equiv\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_0^h\varphi_1(s)\,ds \quad\text{и}\quad a_+(0;\varphi_4)\equiv\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_0^h\varphi_4(s)\,ds;$$

б) $(1,\,0)$, если существуют конечные пределы:

$$a_-(1;\varphi_1)\equiv\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\int_{-h}^{0}\varphi_1(1+s)\,ds \quad \text{и} \quad a_+(0;\varphi_2)\equiv\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}\varphi_2(s)\,ds;$$

в) $(1,1)$, если существуют конечные пределы:

$$a_-(1;\varphi_2)\equiv\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\int_{-h}^{0}\varphi_2(1+s)\,ds \quad \text{и} \quad a_-(1;\varphi_3)\equiv\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\int_{-h}^{0}\varphi_3(1+s)\,ds;$$

г) $(0,1)$, если существуют конечные пределы:

$$a_+(0;\varphi_3)\equiv\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}\varphi_3(s)\,ds \quad \text{и} \quad a_-(1;\varphi_4)\equiv\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\int_{-h}^{0}\varphi_4(1+s)\,ds.$$

Определение 11.4. Внутренними точками Шварца контурной функции $\Phi(x,y)$ назовем точки:

а) $(x,0)$, где $x\in(0,1)$ – точка Шварца функции φ_1;

б) $(1,y)$, где $y\in(0,1)$ – точка Шварца функции φ_2;

в) $(x,1)$, где $x\in(0,1)$ – точка Шварца функции φ_3;

г) $(0,y)$, где $y\in(0,1)$ – точка Шварца функции φ_4.

Определение 11.5. Угловыми точками Шварца контурной функции $\Phi(x,y)$ назовем точки:

а) $(0,0)$, если существует конечный предел:

$$\lim_{h\to0+}\frac{1}{2h}\left[\int_{0}^{h}\varphi_1(s)\,ds+\int_{0}^{h}\varphi_4(s)\,ds\right];$$

б) $(1,0)$, если существует конечный предел:

$$\lim_{h\to0+}\frac{1}{2h}\left[\int_{-h}^{0}\varphi_1(1+s)\,ds+\int_{0}^{h}\varphi_2(s)\,ds\right];$$

в) $(1,1)$, если существует конечный предел:

$$\lim_{h\to0+}\frac{1}{2h}\left[\int_{-h}^{0}\varphi_2(1+s)\,ds+\int_{-h}^{0}\varphi_3(1+s)\,ds\right];$$

г) $(0,1)$, если существует конечный предел:

$$\lim_{h\to0+}\frac{1}{2h}\left[\int_{0}^{h}\varphi_3(s)\,ds+\int_{-h}^{0}\varphi_4(1+s)\,ds\right].$$

Пусть функции $\varphi_i \in L_\infty[0,1]$, $i=\overline{1,4}$, а вне отрезка $[0,1]$ продолжены нулем. Положим

$$u_1(x,y;\varphi_1)=\frac{y}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_1(\xi)d\xi}{y^2+(x-\xi)^2},$$

$$u_2(x,y;\varphi_2)=\frac{1-x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_2(\eta)d\eta}{(1-x)^2+(y-\eta)^2},$$

$$u_3(x,y;\varphi_3)=\frac{1-y}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_3(\xi)d\xi}{(1-y)^2+(x-\xi)^2},$$

$$u_4(x,y;\varphi_4)=\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_4(\eta)d\eta}{x^2+(y-\eta)^2},$$

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^4 u_i(x,y;\varphi_i). \tag{11.2}$$

Теорема 11.1. ***Пусть*** $\boldsymbol{\varphi_i \in L_\infty[0,1]}$ ***и*** $\boldsymbol{x_0 \in (0,1)}$ ***– точка типа Лебега функции*** $\boldsymbol{\varphi_1}$***. Тогда для каждого*** $\boldsymbol{\alpha: 0<\alpha<+\infty}$ ***справедливо равенство***

$$\lim_{\substack{|x-x_0|<\alpha y\\ y\to 0}}\left[u(x,y)-\frac{a_+(x_0,\varphi_1)-a_-(x_0,\varphi_1)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x-x_0}{y}\right]=$$

$$=\frac{a_+(x_0,\varphi_1)+a_-(x_0,\varphi_1)}{2}+u_2(x_0,0;\varphi_2)+u_3(x_0,0;\varphi_3)+u_4(x_0,0;\varphi_4).$$

Действительно, так как

$$u-\frac{a_+(x_0,\varphi_1)-a_-(x_0,\varphi_1)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x-x_0}{y}=$$

$$=\left(u_1-\frac{a_+(x_0,\varphi_1)-a_-(x_0,\varphi_1)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x-x_0}{y}\right)+(u_2+u_3+u_4)$$

и функции u_2, u_3, u_4 являются непрерывными в точке $(x_0,0)$, то из теоремы 10.1 вытекает справедливость утверждения теоремы.

Как следствие из этой теоремы вытекает следующее утверждение:

Теорема 11.2. ***Пусть*** $\boldsymbol{\varphi_i \in L_\infty[0,1]}$ ***и*** $\boldsymbol{x_0 \in (0,1)}$ ***– точка типа Лебега функции*** $\boldsymbol{\varphi_1}$***. Тогда для существования некасательного предела у функции*** $\boldsymbol{u(x,y)}$ ***в точке*** $\boldsymbol{(x_0,0)}$ ***необходимо и достаточно, чтобы*** $\boldsymbol{x_0}$ ***явля-***

лась устранимой точкой типа Лебега функции φ_1. При этом справедливо равенство

$$\lim_{\substack{|x-x_0|<\alpha y \\ y\to 0}} u(x,\,y) = a(x_0,\varphi_1) + u_2(x_0,\,0;\,\varphi_2) + u_3(x_0,\,0;\,\varphi_3) + u_4(x_0,\,0;\,\varphi_4).$$

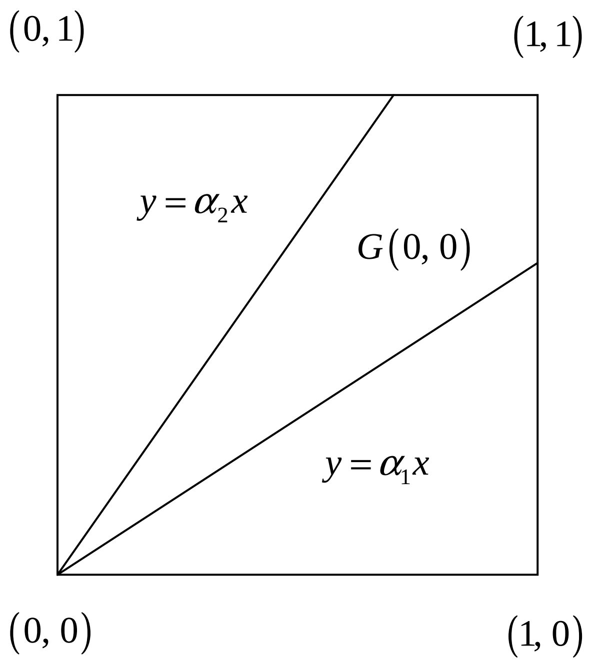
Пусть α_1 и α_2 – произвольные вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам: $0<\alpha_1<\alpha_2<+\infty$. Положим:

$$G(0,0) = G_{0,0}(\alpha_1,\,\alpha_2) = \{(x,\,y)\in G:\ \alpha_1 x \le y \le \alpha_2 x\},$$

$$G(1,0) = G_{1,0}(\alpha_1,\,\alpha_2) = \{(x,\,y)\in G:\ \alpha_1(1-x) \le y \le \alpha_2(1-x)\},$$

$$G(1,1) = G_{1,1}(\alpha_1,\,\alpha_2) = \{(x,\,y)\in G:\ \alpha_1(1-x) \le 1-y \le \alpha_2(1-x)\},$$

$$G(0,1) = G_{0,1}(\alpha_1,\,\alpha_2) = \{(x,\,y)\in G:\ \alpha_1 x \le 1-y \le \alpha_2 x\}.$$



Определение 11.6. Будем говорить, что гармоническая функция $u(x,\,y)$ имеет **некасательный предел в угловой точке** $(x_0,\,y_0)$ квадрата G, если для любых $\alpha_1,\,\alpha_2$: $0<\alpha_1<\alpha_2<+\infty$ существует конечный предел

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0) \\ (x,\,y)\in G(x_0,\,y_0)}} u(x,\,y).$$

Теорема 11.3. ***Пусть $\varphi_1, \varphi_4 \in L_\infty[0,1]$ и $t=0$ – точка типа Лебега этих функций. Тогда справедливо равенство***

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(0,\,0)\\(x,\,y)\in G(0,\,0)}}\Big[u_1(x,\,y;\varphi_1)+u_4(x,\,y;\varphi_4)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(a_+(0,\varphi_1)\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+a_+(0,\varphi_4)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)\Big]=\frac{a_+(0,\varphi_1)+a_+(0,\varphi_4)}{2}. \quad (11.3)$$

Доказательство. Так как $t=0$ – точка типа Лебега функции $\varphi_1(t)$, то существуют конечные пределы

$$a_+(0,\varphi_1)=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_0^h\varphi_1(t)\,dt, \quad a_-(0,\varphi_1)=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{-h}^0\varphi_1(t)\,dt=0.$$

Аналогично и для функции $\varphi_4(t)$:

$$a_+(0,\varphi_4)=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_0^h\varphi_4(t)\,dt, \quad a_-(0,\varphi_4)=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{-h}^0\varphi_4(t)\,dt=0.$$

В силу теоремы 10.1 для гармонической функции $u_1(x,\,y;\,\varphi_1)$ при $x_0=0$, $\alpha=\dfrac{1}{\alpha_1}$, имеем

$$\lim_{\substack{|x|\le\frac{1}{\alpha_1}y\\ y\to 0+}}\left[u_1(x,\,y;\,\varphi_1)-\frac{a_+(0,\varphi_1)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right]=\frac{a_+(0,\varphi_1)}{2}, \quad (11.4)$$

а для гармонической функции $u_4(x,\,y;\,\varphi_4)$ при $x_0=0$, $\alpha=\alpha_2$, имеем

$$\lim_{\substack{|y|\le\alpha_2 x\\ x\to 0+}}\left[u_4(x,\,y;\,\varphi_4)-\frac{a_+(0,\varphi_4)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]=\frac{a_+(0,\varphi_4)}{2}. \quad (11.5)$$

Множество $G_{0,0}(\alpha_1,\,\alpha_2)$ является пересечением множеств, по которым вычисляются пределы (11.4) и (11.5). Поэтому в множестве $G_{0,0}(\alpha_1,\,\alpha_2)$ имеют место равенства (11.4) и (11.5) одновременно. Складывая эти равенства, получим справедливость равенства (11.3).

Теорема 11.3 доказана.

Заметим, что гармонические функции $u_2(x, y; \varphi_2)$ и $u_3(x, y; \varphi_3)$ являются непрерывными в точке $(0, 0)$. Из этого и теоремы 11.3 вытекает справедливость следующего утверждения:

Теорема 11.4. ***Пусть $\varphi_i \in L_\infty[0, 1]$, $i = \overline{1, 4}$ и $t = 0$ – точка типа Лебега функций φ_1 и φ_4. Тогда справедливо равенство***

$$\lim_{\substack{(x, y)\to(x_0, y_0)\\ (x, y)\in G(x_0, y_0)}} \left[u(x, y) - \frac{1}{\pi}\left(a_+(0,\varphi_1)\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + a_+(0,\varphi_4)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \right) \right] =$$

$$\frac{a_+(0,\varphi_1) + a_+(0,\varphi_4)}{2} + u_2(0, 0; \varphi_2) + u_3(0, 0; \varphi_3).$$

Определение 11.7. Угловая точка (x_0, y_0) квадрата G называется **устранимой точкой типа Лебега контурной функции** $\Phi(x, y)$, если она является точкой типа Лебега этой функции и справедливо равенство:

1) $a_+(0,\varphi_4) = a_+(0,\varphi_1) \equiv a_{41}$, если $(x_0, y_0) = (0, 0)$;

2) $a_-(1,\varphi_1) = a_+(0,\varphi_2) \equiv a_{12}$, если $(x_0, y_0) = (1, 0)$;

3) $a_-(1,\varphi_2) = a_-(1,\varphi_3) \equiv a_{23}$, если $(x_0, y_0) = (1, 1)$;

4) $a_+(0,\varphi_3) = a_-(1,\varphi_4) \equiv a_{34}$, если $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Теорема 11.5. ***Пусть $\varphi_i \in L_\infty[0, 1]$, $i = \overline{1, 4}$ и угловая точка $(0, 0)$ является точкой типа Лебега функций φ_1 и φ_4. Тогда для существования некасательного предела гармонической функции $u(x, y)$ в этой угловой точке необходимо и достаточно, чтобы она являлась устранимой. При этом справедливо равенство***

$$\lim_{\substack{(x, y)\to(x_0, y_0)\\ (x, y)\in G(x_0, y_0)}} u(x, y) = \frac{3a_{41}}{2} + u_2(0, 0; \varphi_2) + u_3(0, 0; \varphi_3). \tag{11.6}$$

Доказательство. Так как $(0, 0)$ является устранимой точкой типа Лебега, то $a_+(0,\varphi_4) = a_+(0,\varphi_1) = a_{41}$ и

$$\frac{1}{\pi}\left(a_+(0,\varphi_1)\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + a_+(0,\varphi_4)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} a_{41}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{\pi} a_{41} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} a_{41}.$$

Отсюда и из непрерывности функций $u_2(x,\ y;\ \varphi_2)$ и $u_3(x,\ y;\ \varphi_3)$ в точке $(0,\ 0)$ вытекает справедливость равенства (11.6).

Теорема доказана.

Теорема 11.6. ***Пусть*** $\Phi(x,y)\in L_\infty(\Gamma)$. ***Тогда гармоническая в области*** G ***функция (11.2) имеет поточечное граничное значение*** $u|_\Gamma$, ***причем во всех точках Шварца функции*** $\Phi(x,y)$ ***на границе*** Γ, ***кроме угловых точек, справедливы равенства:***

$$\begin{cases} u|_{\Gamma_1}(x)=\varphi_1(x)+SK\varphi_2(x)+K_0\varphi_3(x)+K\varphi_4(x), \\ u|_{\Gamma_2}(y)=KS\varphi_1(y)+\varphi_2(y)+SKS\varphi_3(y)+K_0\varphi_4(y), \\ u|_{\Gamma_3}(x)=K_0\varphi_1(x)+SKS\varphi_2(x)+\varphi_3(x)+KS\varphi_4(x), \\ u|_{\Gamma_4}(y)=K\varphi_1(y)+K_0\varphi_2(y)+SK\varphi_3(y)+\varphi_4(y), \end{cases} \tag{11.7}$$

где

$$(K\varphi)(t)=\frac{t}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\xi)d\xi}{t^2+\xi^2},$$

$$(K_0\varphi)(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\xi)d\xi}{1+(t-\xi)^2},$$

$$(S\varphi)(t)=\varphi(1-t).$$

Доказательство. Пусть Γ_1 – нижняя сторона квадрата G и $(x,y)\in\Gamma_1$ – точка Шварца контурной функции $\Phi(x,y)\in L_\infty(\Gamma)$, не совпадающая с угловыми точками, то есть $y=0$ и $0<x<1$. Тогда точка x является точкой Шварца функции φ_1: $\overline{\Phi}=(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4)^{\mathrm{T}}$. Поэтому в силу леммы 11.1, имеем

$$\lim_{y\to0+}u_1(x,y)=\lim_{y\to0+}\frac{y}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_1(\xi)d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}=\varphi_1(x)$$

почти при всех $x\in(0,1)$. Так как $u_2(x,y)$, $u_3(x,y)$, $u_4(x,y)$ являются непрерывными на интервале $(0,1)$, то

$$\lim_{y\to0+}u_2(x,y)=\lim_{y\to0+}\frac{1-x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_2(\eta)d\eta}{(1-x)^2+(y-\eta)^2}=(SK\varphi_2)(x),$$

$$\lim_{y\to 0+} u_3(x,y) = \lim_{y\to 0+} \frac{1-y}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_3(\xi)\,d\xi}{(1-y)^2 + (x-\xi)^2} = (K_0\varphi_3)(x),$$

$$\lim_{y\to 0+} u_4(x,y) = \lim_{y\to 0+} \frac{x}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_4(\eta)\,d\eta}{x^2 + (y-\eta)^2} = (K\varphi_4)(x).$$

Таким образом, нами получено равенство

$$u\big|_{\Gamma_1} = \lim_{y\to 0+} u(x,y) = \sum_{i=1}^{4} \lim_{y\to 0+} u_i(x,y) = \varphi_1(x) + SK\varphi_2(x) + K_0\varphi_3(x) + K\varphi_4(x)$$

почти при всех $x \in (0,1)$.

Оставшиеся три равенства доказываются аналогично.

Теорема 11.6 доказана.

Заметим, что в равенствах (11.7) можно отождествить переменные x и y. Поэтому во втором и четвертом уравнении вместо переменной y запишем переменную x. В силу этого замечания в равенствах (11.7) можно пропустить переменные x и y:

$$\begin{aligned}
u\big|_{\Gamma_1} &= \varphi_1 + SK\varphi_2 + K_0\varphi_3 + K\varphi_4,\\
u\big|_{\Gamma_2} &= KS\varphi_1 + \varphi_2 + SKS\varphi_3 + K_0\varphi_4,\\
u\big|_{\Gamma_3} &= K_0\varphi_1 + SKS\varphi_2 + \varphi_3 + KS\varphi_4,\\
u\big|_{\Gamma_4} &= K\varphi_1 + K_0\varphi_2 + SK\varphi_3 + \varphi_4.
\end{aligned}$$

Введя обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & SK & K_0 & K \\ KS & 0 & SKS & K_0 \\ K_0 & SKS & 0 & KS \\ K & K_0 & SK & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix}, \quad J\varphi_i = \varphi_i,\ i = \overline{1,4},$$

утверждение теоремы 11.6 можно записать в компактной форме:

$$u\big|_{\Gamma} = (I + A)\overline{\Phi}.$$

Аналогичная связь между граничным значением гармонической функции, непрерывной вплоть до границы, и непрерывной плотностью была установлена в § 2.

12. РЕГУЛЯРИЗАТОР И ЕГО ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Как было показано (см. теорема 1.1), задача Дирихле

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad G; \quad u\big|_{\Gamma} = \Psi \qquad (12.1)$$

однозначно разрешима для каждой непрерывной функции Ψ, заданной на контуре Γ. Решение $u(x, y)$ этой задачи непрерывно продолжимо вплоть до границы замкнутой области $\overline{G} = G \bigcup \Gamma$ и представимо с помощью оператора Пуассона – потенциала двойного слоя [1]

$$u(M) = \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma} \Phi(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\ln\frac{1}{R_{MQ}}ds_Q .$$

Искомая плотность Φ находится как решение системы интегральных уравнений

$$(I + A)\overline{\Phi} = \overline{\Psi}, \qquad (12.2)$$

где $\overline{\Phi}$ и $\overline{\Psi}$ – вектор-функции, соответствующие контурным функциям Φ и Ψ. При этом норма и спектральный радиус матрицы-оператора

$$A : \overline{C}[0, 1] \to \overline{C}[0, 1]$$

равны единице, что не позволяют решения

$$\overline{\Phi} = (I + A)^{-1}\overline{\Psi}$$

системы (12.2) представить в виде ряда Неймана. В связи с этим ниже предлагается понятие регуляризатора и регуляризованного оператора Пуассона для представления решения задачи (12.1). Соответствующая система интегральных уравнений вида (12.2) с регуляризованным оператором имеет матрицу-оператор, норма которого меньше единицы. Это позволяет представить искомую плотность в виде достаточно быстро сходящихся рядов.

Пусть $\Phi \in L_\infty(\Gamma)$ – заданная функция. **Регуляризатором** для оператора Пуассона Π назовем оператор Π^+, определенный равенством

$$\Pi^+\Phi = \Pi_1^+\varphi_1 + \Pi_2^+\varphi_2 + \Pi_3^+\varphi_3 + \Pi_4^+\varphi_4, \qquad (12.3)$$

где

$$\left(\Pi_1^+\varphi_1\right)(x,\, y) = \frac{y}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi_1(t)\,dt}{y^2 + (x+t)^2} + \frac{y}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\varphi_1(t)\,dt}{y^2 + (2-x-t)^2},$$

$$\left(\Pi_2^+\varphi_2\right)(x,\,y)=\frac{1-x}{\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_2(t)\,dt}{(1-x)^2+(y+t)^2}+\frac{1-x}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_2(t)\,dt}{(1-x)^2+(2-y-t)^2},$$

$$\left(\Pi_3^+\varphi_3\right)(x,\,y)=\frac{1-y}{\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_3(t)\,dt}{(1-y)^2+(x+t)^2}+\frac{1-y}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_3(t)\,dt}{(1-y)^2+(2-x-t)^2},$$

$$\left(\Pi_4^+\varphi_4\right)(x,\,y)=\frac{x}{\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_4(t)\,dt}{x^2+(y+t)^2}+\frac{x}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_4(t)\,dt}{x^2+(2-y-t)^2}.$$

Заметим, что операторы Π_1^+, Π_2^+ и Π_3^+ можно выразить через Π_4^+:

$$\left(\Pi_1^+\varphi_1\right)(x,\,y)=\left(\Pi_4^+\varphi_1\right)(y,\,x),\quad \left(\Pi_2^+\varphi_2\right)(x,\,y)=\left(\Pi_4^+\varphi_2\right)(1-x,\,y),$$

$$\left(\Pi_3^+\varphi_3\right)(x,\,y)=\left(\Pi_4^+\varphi_3\right)(1-y,\,x).$$

Рассмотрим множества:

$$\Gamma_0=\bigcup_{i=1}^{4}\Gamma_{i,0},\quad \mathbb{R}_0^2=\mathbb{R}^2\setminus\Gamma_0,$$

где

$$\Gamma_{1,0}=\left\{(x,\,0):-\frac{1}{2}\le x\le 0\right\}\cup\left\{(x,\,0):1\le x\le\frac{3}{2}\right\},$$

$$\Gamma_{2,0}=\left\{(1,\,y):-\frac{1}{2}\le y\le 0\right\}\cup\left\{(1,\,y):1\le y\le\frac{3}{2}\right\},$$

$$\Gamma_{3,0}=\left\{(x,\,1):-\frac{1}{2}\le x\le 0\right\}\cup\left\{(x,\,1):1\le x\le\frac{3}{2}\right\},$$

$$\Gamma_{4,0}=\left\{(0,\,y):-\frac{1}{2}\le y\le 0\right\}\cup\left\{(0,\,y):1\le y\le\frac{3}{2}\right\}.$$

Установим, что регуляризатор каждой непрерывной функции на Γ ставит в соответствие гармоническую функцию, непрерывно продолжимую на $\overline{G}$. Вначале докажем утверждение, устанавливающее, что этот оператор ограниченной и измеримой функции на Γ ставит в соответствие гармоническую функцию в $\mathbb{R}_0^2$.

Лемма 12.1. ***Пусть*** $\Phi \in L_\infty(\Gamma)$. ***Тогда*** $\left(\Pi^+\Phi\right)(x, y)$ ***является гармонической функцией в области*** $\mathbb{R}_0^2$.

Доказательство. Функция $\dfrac{t}{t^2+s^2}$ является гармонической во всей плоскости, кроме начала координат, то есть точки $(s, t) = (0, 0)$. Тогда для любой функции $\varphi \in L_1\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ интеграл

$$\frac{t}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{t^2+(s+\tau)^2} \tag{12.4}$$

является гармонической функцией всюду, за исключением точек множества $\left\{(s, 0): -\dfrac{1}{2} \le s \le 0\right\}$ и, следовательно – непрерывной. Это следует из дифференцируемости функции (12.4) под знаком интеграла и гармоничности функции $\dfrac{t}{t^2+s^2}$.

Первое слагаемое, в представлении функции $\Pi_1^+\varphi_1$, получится из (12.4) при подстановке: $s = x,\ t = y,\ \tau = \xi,\ \varphi = \varphi_1$. Поэтому это слагаемое является гармонической функцией всюду, кроме точек множества $\left\{(x, 0): -\dfrac{1}{2} \le x \le 0\right\}$.

Второе слагаемое, в представлении функции $\Pi_1^+\varphi_1$, получится из (12.4) при подстановке: $s = 1-x,\ t = y,\ \tau = 1-\xi,\ \varphi = \varphi_1$. Поэтому это слагаемое является гармонической функцией всюду, кроме точек множества $\left\{(x, 0): 1 \le x \le \dfrac{3}{2}\right\}$.

Таким образом, $\Pi_1^+\varphi_1$ является гармонической функцией всюду, кроме точек множества

$$\Gamma_{1,0} = \left\{(x, 0): -\frac{1}{2} \le x \le 0\right\} \cup \left\{(x, 0): 1 \le x \le \frac{3}{2}\right\}.$$

Проведя аналогичные рассуждения, можно установить, что $\Pi_i^+\varphi_i$ – гармоническая функция всюду, кроме точек множества $\Gamma_{i,0}$, $i = 2, 3, 4$.

Отсюда делаем вывод о том, что сумма этих функций является гармонической и, следовательно, непрерывной функцией во всей плоскости, кроме точек множества $\Gamma_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{4} \Gamma_{i,0}$, то есть в области $\mathbb{R}_0^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_0$.

Лемма 12.1 доказана.

Следствие 12.1. ***Пусть*** $\Phi \in C(\Gamma)$. ***Тогда функция*** $\left(\Pi^+\Phi\right)(x, y)$ ***гармонична в области*** $\mathbb{R}_0^2$.

Все точки области G, кроме четырех ее угловых точек, принадлежат области $\mathbb{R}_0^2$. Поэтому функция $\left(\Pi^+\Phi\right)(x, y)$ является непрерывной в области G, кроме четырех ее угловых точек, не только когда $\Phi \in C(\Gamma)$, но и для функций $\Phi \in L_\infty(\Gamma)$.

Лемма 12.2. ***Пусть*** $x = 0$ ***является точкой типа Лебега функции*** $\varphi_1 \in L_\infty\left[0, \frac{1}{2}\right]$. ***Тогда справедливо равенство***

$$\lim_{\substack{(x,\, y)\to(0,\, 0)\\ x\ge 0,\, y\ge 0,\, x+y\ne 0}} \left(v_1(x, y) - \frac{a_+(0, \varphi_1)}{\pi} \operatorname{arctg}\frac{x}{y} \right) = \frac{a_+(0, \varphi_1)}{2}, \tag{12.5}$$

где

$$v_1(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi_1(t)\,dt}{y^2 + (x+t)^2}.$$

Доказательство. Имеем

$$v_1(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\varphi_1(t) - a_+(0, \varphi_1)\right)dt}{y^2 + (x+t)^2} +$$

$$+ \frac{y a_+(0, \varphi_1)}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{y^2 + (x+t)^2} \equiv I_1(x, y) + I_2(x, y).$$

Рассмотрим каждое слагаемое по отдельности. Интегрируя по частям первое слагаемое, имеем:

$$I_1(x,\,y)=\frac{y}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left(\varphi_1(t)-a_+(0,\,\varphi_1)\right)dt}{y^2+(x+t)^2}=\frac{y}{\pi}\frac{1}{y^2+(x+t)^2}\int_0^t\left(\varphi_1(s)-a_+(0,\,\varphi_1)\right)ds\Big|_{s=0}^{t}+$$

$$+\frac{y}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2(x+t)}{\left(y^2+(x+t)^2\right)^2}\left(\int_0^t\left(\varphi_1(s)-a_+(0,\,\varphi_1)\right)ds\right)dt=$$

$$=\frac{y}{\pi}\frac{1}{y^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\varphi_1(s)-a_+(0,\,\varphi_1)\right)ds+$$

$$+\frac{2y}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{(x+t)t}{\left(y^2+(x+t)^2\right)^2}\left(\frac{1}{t}\int_0^t\left(\varphi_1(s)-a_+(0,\,\varphi_1)\right)ds\right)dt+$$

$$+\frac{2y}{\pi}\int_{\delta}^{\frac{1}{2}}\frac{(x+t)t}{\left(y^2+(x+t)^2\right)^2}\left(\frac{1}{t}\int_0^t\left(\varphi_1(s)-a_+(0,\,\varphi_1)\right)ds\right)dt\equiv$$

$$\equiv I_{11}(x,\,y)+I_{12}(x,\,y)+I_{13}(x,\,y),$$

где $0<\delta<\frac{1}{2}$ – произвольное число.

Так как $\varphi_1\in L_\infty\left[0,\,\frac{1}{2}\right]$, то первое слагаемое удовлетворяет соотношению $I_{11}(x,y)\to 0$ при $y\to 0$.

Пусть задано $\varepsilon>0$. Так как $x=0$ является точкой типа Лебега функции φ_1, то величину $0<\delta<\frac{1}{2}$ выберем такой, чтобы выполнялось соотношение $\left|I_{12}(x,y)\right|<\varepsilon$. Фиксируя это значение δ, величину $0<y_0<\frac{1}{2}$ выберем такой, чтобы при $0<y<y_0$ выполнялось соотношение $\left|I_{13}(x,y)\right|<\varepsilon$.

Таким образом, нами доказано, что $I_1(x,y)\to 0$ при $y\to 0$.

Непосредственно вычисляя второе слагаемое, имеем

$$I_2(x,y)=\frac{a_+(0,\,\varphi_1)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{y}-\frac{a_+(0,\,\varphi_1)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Переходя при $(x,\ y)\to(0,\ 0)$, $x\ge 0, y\ge 0, x+y\ne 0$ к пределу в равенстве

$$v_1(x,y)+\frac{a_+(0,\varphi_1)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=I_1(x,y)+\frac{a_+(0,\varphi_1)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{y},$$

получим справедливость (12.5).

Лемма 12.2 доказана.

Установим асимптотику гармонической функции $u=\Pi^+\Phi$, порожденную регуляризатором (12.3) в угловых точках области $\overline{G}$.

Рассмотрим точку $(0,\ 0)$. Представим функцию $u=\Pi^+\Phi$ в следующем виде

$$u(x,y)=v_{00}(x,y)+w_{00}(x,y),$$

где

$$v_{00}(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_1(t)dt}{y^2+(x+t)^2}+\frac{x}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_4(t)dt}{x^2+(y+t)^2},$$

$$w_{00}(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_1(t)dt}{y^2+(x+t)^2}+\frac{1-x}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_2(t)dt}{(1-x)^2+(y+t)^2}+$$

$$+\frac{1-x}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_2(t)dt}{(1-x)^2+(2-y-t)^2}+\frac{1-y}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_3(t)dt}{(1-y)^2+(x+t)^2}+$$

$$+\frac{1-y}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_3(t)dt}{(1-y)^2+(2-x-t)^2}+\frac{x}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_4(t)dt}{x^2+(y+t)^2}.$$

Заметим, что каждое слагаемое, составляющее функцию w_{00}, является непрерывными функциями в точке $(0,\ 0)$ и справедливо равенство

$$w_{00}\equiv w_{00}(0,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_2(t)dt}{1+t^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_2(t)dt}{1+(2-t)^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_3(t)dt}{1+t^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_3(t)dt}{1+(2-t)^2}.$$

Если $x=0$ является устранимой точкой типа Лебега функций φ_1 и φ_4, то из леммы 12.2 для функции $v_{00}(x,y)$, имеем

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(0,\,0)\\(x,\,y)\in\overline{G}\setminus(0,\,0)}}\left[v_{00}+\frac{a_+(0,\varphi_1)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\frac{a_+(0,\varphi_4)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_+(0,\varphi_1)+a_+(0,\varphi_4)\right).$$

Таким образом, нами доказано равенство, устанавливающее асимптотику гармонической функции $u=\Pi^+\Phi$ в окрестности точки $(0,0)$:

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(0,\,0)\\(x,\,y)\in\overline{G}\setminus(0,\,0)}}\left[u(x,\,y)+\frac{a_+(0,\varphi_1)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\frac{a_+(0,\varphi_4)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-w_{00}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_+(0,\varphi_1)+a_+(0,\varphi_4)\right). \tag{12.6}$$

Проведя аналогичные рассуждения для остальных слагаемых, имеем

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(1,\,0)\\(x,\,y)\in\overline{G}\setminus(1,\,0)}}\left[u(x,\,y)+\frac{a_-(1,\varphi_1)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}+\frac{a_+(0,\varphi_2)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{1-x}-w_{10}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_-(1,\varphi_1)+a_+(0,\varphi_2)\right), \tag{12.7}$$

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(1,\,1)\\(x,\,y)\in\overline{G}\setminus(1,\,1)}}\left[u(x,\,y)+\frac{a_-(1,\varphi_2)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1-y}{1-x}+\frac{a_-(1,\varphi_3)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1-y}-w_{11}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_1(1,\varphi_2)+a_-(0,\varphi_3)\right), \tag{12.8}$$

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(0,\,1)\\(x,\,y)\in\overline{G}\setminus(0,\,1)}}\left[u(x,\,y)+\frac{a_+(0,\varphi_3)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-y}+\frac{a_-(0,\varphi_4)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1-y}{x}-w_{01}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_+(0,\varphi_3)+a_-(1,\varphi_4)\right), \tag{12.9}$$

где

$$w_{10}\equiv w_{10}(1,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_3(t)\,dt}{1+t^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_3(t)\,dt}{1+(2-t)^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_4(t)\,dt}{1+t^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_4(t)\,dt}{1+(2-t)^2},$$

$$w_{11}\equiv w_{11}(1,1)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_1(t)\,dt}{1+t^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_1(t)\,dt}{1+(2-t)^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_4(t)\,dt}{1+t^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_4(t)\,dt}{1+(2-t)^2},$$

$$w_{01} \equiv w_{01}(0,1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi_1(t)\,dt}{1+t^2} + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\varphi_1(t)\,dt}{1+(2-t)^2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi_2(t)\,dt}{1+t^2} + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\varphi_2(t)\,dt}{1+(2-t)^2}.$$

Полученные результаты можно подытожить в следующем виде:

Тоеорема 12.1. ***Если угловая точка (x_0, y_0) контура Γ является точкой типа Лебега контурной функции $\Phi \in L_\infty(\Gamma)$, то в этой точке имеет место соответствующее асимптотическое равенство (12.6) – 12.9) (для каждой угловой точки – свое равенство).***

Как следствие из этой теоремы вытекает существование непрерывного продолжения гармонической функции $u = \Pi^+\Phi$ до данной угловой точки (x_0, y_0).

Тоеорема 12.2. ***Пусть угловая точка (x_0, y_0) контура Γ является точкой типа Лебега контурной функции $\Phi \in L_\infty(\Gamma)$. Для того чтобы в этой точке существовало непрерывное продолжение функции $u = \Pi^+\Phi$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка являлась устранимой точкой типа Лебега.***

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Необходимость. Дано существование предела

$$\lim_{\substack{(x,\, y)\to(0,\, 0)\\ (x,\, y)\in \overline{G}\setminus(0,\, 0)}} u(x, y) = u_{00}.$$

Тогда из (*1) вытекает существование предела

$$\lim_{\substack{(x,\, y)\to(0,\, 0)\\ (x,\, y)\in \overline{G}\setminus(0,\, 0)}} \left[\frac{a_+(0,\varphi_1)}{\pi} \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{a_+(0,\varphi_4)}{\pi} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - w_{00} \right] = a_{14}.$$

Отсюда, в частности, имеем:

а) при $x = 0$ и $y \to 0+$, вытекает

$$\lim_{\substack{(x,\, y)\to(0,\, 0)\\ (x,\, y)\in \overline{G}\setminus(0,\, 0)}} \left[\frac{a_+(0,\varphi_1)}{\pi} \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{a_+(0,\varphi_4)}{\pi} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - w_{00} \right] = \frac{a_+(0,\varphi_4)}{2} = a_{14};$$

б) при $y = 0$ и $x \to 0+$, вытекает

$$\lim_{\substack{(x,\, y)\to(0,\, 0)\\ (x,\, y)\in \overline{G}\setminus(0,\, 0)}}\left[\frac{a_+(0,\varphi_1)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\frac{a_+(0,\varphi_4)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-w_{00}\right]=\frac{a_+(0,\varphi_1)}{2}=a_{14}\,.$$

Из этих равенств будем иметь: $a_+(0,\varphi_1)=a_+(0,\varphi_4)$, то есть точка $(0,0)$ является устранимой точкой типа Лебега.

Достаточность. Пусть $a_+(0,\varphi_1)=a_+(0,\varphi_4)$. Так как при $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y>0$ имеет место тождество

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{\pi}{2},$$

то из (12.6) получим существование предела функции $u=\Pi^{+}\Phi$ при $(x,y)\to(0,0)$, $(x,y)\in\overline{G}\setminus(0,0)$.

Остальные угловые точки рассматриваются аналогично.

Теорема 12.2 доказана.

Следствие 12.2. ***Пусть*** $\boldsymbol{\Phi\in C(\Gamma)}$. ***Тогда функция*** $\boldsymbol{(\Pi^{+}\Phi)(x,y)}$ ***является непрерывно продолжимой на замкнутую область*** $\boldsymbol{\overline{G}}$.

Справедливость этого утверждения следует из того, что, если $\Phi\in C(\Gamma)$, то угловые точки области G являются устранимыми точками типа Лебега функции Φ, причем

$$\begin{aligned}&a_+(0,\varphi_4)=a_+(0,\varphi_1)=\Phi(0,\,0),\quad a_-(1,\varphi_1)=a_+(0,\varphi_2)=\Phi(1,\,0),\\ &a_-(1,\varphi_2)=a_-(1,\varphi_3)=\Phi(1,\,1),\quad a_+(0,\varphi_3)=a_-(1,\varphi_4)=\Phi(0,1).\end{aligned}$$

Найдем поточечное граничное значение регуляризатора $\Pi^{+}\Phi$. В пространстве $L_\infty[0,1]$ введем операторы F и F_0:

$$(F\varphi)(t)=\frac{t}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi(s)ds}{t^2+s^2}+\frac{t}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi(s)ds}{t^2+(2-s)^2},$$

$$(F_0\varphi)(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi(s)ds}{1+(t+s)^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi(s)ds}{1+(2-t-s)^2}.$$

Отметим, что функции $(F\varphi)(t)$ и $(F_0\varphi)(t)$ бесконечно дифференцируемы на промежутках $(0,1]$ и $[0,1]$, соответственно.

Пусть для $\varphi \in L_\infty[0,1]$ точка $t=0$ является точкой типа Лебега. Тогда, доопределяя $(F\varphi)(t)$ в точке $t=0$ равенством $(F\varphi)(0)=\dfrac{a_+(0,\varphi)}{2}$, получим непрерывную функцию на отрезке $[0,1]$.

Обозначим через $C(0,1]$ пространство непрерывных и ограниченных на полуинтервале $(0,1]$ функций. Тогда оператор $F: L_\infty[0,1]\to C(0,1]$ – непрерывен, а оператор $F_0 : L_\infty[0,1]\to C[0,1]$ – вполне непрерывен.

Пусть $\Phi \in L_\infty(\Gamma)$. Непосредственно из определения функции $\Pi^+\Phi$ и леммы 12.1 получаем поточечное граничное значение этой функции, совпадающее с ее значением:

$$\Pi^+\Phi\Big|_{\Gamma_1} = \Pi_1^+\varphi_1 + \Pi_2^+\varphi_2 + \Pi_3^+\varphi_3 + \Pi_4^+\varphi_4\Big|_{y=0} =$$

$$=\frac{1-x}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_2(\eta)\,d\eta}{(1-x)^2+\eta^2}+\frac{1-x}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_2(\eta)\,d\eta}{(1-x)^2+(2-\eta)^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_3(\xi)\,d\xi}{1+(x+\xi)^2}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_3(\xi)\,d\xi}{1+(2-x-\xi)^2}+\frac{x}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_4(\eta)\,d\eta}{x^2+\eta^2}+\frac{x}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_4(\eta)\,d\eta}{x^2+(2-\eta)^2}=$$

$$=(SF\varphi_2)(x)+(F_0\varphi_3)(x)+(F\varphi_4)(x),\quad 0<x<1,$$

$$\Pi^+\Phi\Big|_{\Gamma_2} = \Pi_1^+\varphi_1 + \Pi_2^+\varphi_2 + \Pi_3^+\varphi_3 + \Pi_4^+\varphi_4\Big|_{x=1} =$$

$$=\frac{y}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_1(\xi)\,d\xi}{y^2+(1+\xi)^2}+\frac{y}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_1(\xi)\,d\xi}{y^2+(1-\xi)^2}+\frac{1-y}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_3(\xi)\,d\xi}{(1-y)^2+(1+\xi)^2}+$$

$$\frac{1-y}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_3(\xi)\,d\xi}{(1-y)^2+(1-\xi)^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_4(\eta)\,d\eta}{1+(y+\eta)^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_4(\eta)\,d\eta}{1+(2-y-\eta)^2}=$$

$$=(FS\varphi_1)(y)+(SFS\varphi_3)(y)+(F_0\varphi_4)(y),\quad 0<y<1,$$

$$\Pi^+\Phi\Big|_{\Gamma_3} = \Pi_1^+\varphi_1 + \Pi_2^+\varphi_2 + \Pi_3^+\varphi_3 + \Pi_4^+\varphi_4\Big|_{y=1} =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_1(\xi)d\xi}{1+(x+\xi)^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_1(\xi)d\xi}{1+(2-x-\xi)^2}+\frac{1-x}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_2(\eta)d\eta}{(1-x)^2+(1+\eta)^2}+$$

$$\frac{1-x}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_2(\eta)d\eta}{(1-x)^2+(1-\eta)^2}+\frac{x}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_4(\eta)d\eta}{x^2+(1+\eta)^2}+\frac{x}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_4(\eta)d\eta}{x^2+(1-\eta)^2}=$$

$$=(F_0\varphi_1)(x)+(SFS\varphi_2)(x)+(FS\varphi_4)(x),\quad 0<x<1,$$

$$\Pi^+\Phi\Big|_{\Gamma_4}=\Pi_1^+\varphi_1+\Pi_2^+\varphi_2+\Pi_3^+\varphi_3+\Pi_4^+\varphi_4\Big|_{x=0}=$$

$$=\frac{y}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_1(\xi)d\xi}{y^2+\xi}+\frac{y}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_1(\xi)d\xi}{y^2+(2-\xi)^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_2(\eta)d\eta}{1+(y+\eta)^2}+$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_2(\eta)d\eta}{1+(2-y-\eta)^2}+\frac{1-y}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_3(\xi)d\xi}{(1-y)^2+\xi^2}+\frac{1-y}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi_3(\xi)d\xi}{(1-y)^2+(2-\xi)^2}=$$

$$=(F\varphi_1)(y)+(F_0\varphi_2)(y)+(SF\varphi_3)(y),\quad 0<y<1.$$

Таким образом, поточечным граничным значением гармонической функции $\Pi^+\Phi$ является:

$$\begin{cases}\Pi^+\Phi\Big|_{\Gamma_1}=\Pi^+\Phi(x,0)=(SF\varphi_2)(x)+(F_0\varphi_3)(x)+(F\varphi_4)(x),\\ \Pi^+\Phi\Big|_{\Gamma_1}=\Pi^+\Phi(1,y)=(FS\varphi_1)(x)+(SFS\varphi_3)(x)+(F_0\varphi_4)(x),\\ \Pi^+\Phi\Big|_{\Gamma_3}=\Pi^+\Phi(x,1)=(F_0\varphi_1)(x)+(SFS\varphi_2)(x)+(FS\varphi_4)(x),\\ \Pi^+\Phi\Big|_{\Gamma_4}=\Pi^+\Phi(0,y)=(F\varphi_1)(y)+(F_0\varphi_2)(y)+(SF\varphi_3)(y).\end{cases}\tag{12.10}$$

Матричная запись этих равенств имеет вид:

$$\overline{\Pi^+\Phi\Big|_{\Gamma}}=A^+\overline{\Phi},\tag{12.11}$$

где

$$A^+=\begin{bmatrix}0 & SF & F_0 & F\\ FS & 0 & SFS & F_0\\ F_0 & SFS & 0 & FS\\ F & F_0 & SF & 0\end{bmatrix}.\tag{12.12}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Теорема 12.3. ***Пусть $\Phi \in L_\infty(\Gamma)$. Тогда гармоническая функция $(\Pi^+\Phi)(x, y)$ имеет поточечное граничное значение $\Pi^+\Phi\big|_\Gamma$, определенное равенствами*** **(12.10).**

13. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ОПЕРАТОР ПУАССОНА И ЕГО ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Пусть Π - оператор Пуассона, а Π^+ - регуляризатор этого оператора, определенный равенством (12.3). При представлении решения задачи Дирихле в виде степенного ряда, с достаточно высокой скоростью сходимости, большой интерес представляет оператор $\Pi - \Pi^+$, которого назовем **регуляризованным оператором Пуассона.**

Установим, что регуляризованный оператор Пуассона каждой ограниченной функции на Γ ставит в соответствие ограниченную в G гармоническую функцию, а непрерывной – непрерывно продолжимую на $\overline{G}$ гармоническую функцию.

Для любой ограниченно измеримой функции $\Phi \in L_\infty(\Gamma)$, разность между граничным значением образа этой функции при действии регуляризованного оператора Пуассона и самой функции является непрерывной функцией на контуре Γ и бесконечно дифференцируемой на Γ, кроме, быть может, угловых точек этого контура. Справедлива следующая теорема.

Теорема 13.1. ***Пусть функция $\Phi \in L_\infty(\Gamma)$. Тогда:***

1) функция $(\Pi - \Pi^+)\Phi$ является ограниченной гармонической в G и имеет поточечное граничное значение $(\Pi - \Pi^+)\Phi\big|_\Gamma$;

2) функция $(\Pi - \Pi^+)\Phi\big|_\Gamma - \Phi$ эквивалентна непрерывной функции $\Phi^+ = \Phi^+(x, y)$ на Γ;

3) функция Φ^+ – бесконечно дифференцируема на Γ, за исключением, быть может, угловых точек;

4) справедливо равенство $\overline{\Phi}^+ = B\overline{\Phi}$.

Доказательство. 1) из гармоничности функций $\Pi\Phi$ в G, $\Pi^+\Phi$ в $\mathbb{R}_0^2$ и включения $G \subset \mathbb{R}_0^2$ вытекает гармоничность функции $\left(\Pi - \Pi^+\right)\Phi$ в G, а из леммы 2.1 – ее ограниченность.

Из теоремы 11.6 (равенства 11.7) вытекает существование поточечного граничного значения функции $\Pi\Phi$:

$$\Pi\Phi\big|_{\Gamma_1} = \varphi_1 + SK\varphi_2 + K_0\varphi_3 + K\varphi_4, \quad \Pi\Phi\big|_{\Gamma_2} = KS\varphi_1 + \varphi_2 + SKS\varphi_3 + K_0\varphi_4,$$

$$\Pi\Phi\big|_{\Gamma_3} = K_0\varphi_1 + SKS\varphi_2 + \varphi_3 + KS\varphi_4, \quad \Pi\Phi\big|_{\Gamma_4} = K\varphi_1 + K_0\varphi_2 + SK\varphi_3 + \varphi_4,$$

где

$$\left(K\varphi\right)\left(x\right) = \frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi\left(\xi\right)d\xi}{x^2+\xi^2}, \quad \left(K_0\varphi\right)\left(x\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi\left(\xi\right)d\xi}{1+\left(x-\xi\right)^2}, \quad \left(S\varphi\right)\left(x\right) = \varphi\left(1-x\right).$$

Эти равенства в матричной форме имеют вид:

$$\overline{\Pi\Phi\big|_{\Gamma}} = \left(I + A\right)\overline{\Phi}.$$

В теореме 12.3 утверждается существование граничного значения функции $\Pi^+\Phi$, определенное в (12.3) и в матричной форме в (12.12): $\overline{\Pi^+\Phi\big|_{\Gamma}} = A^+\overline{\Phi}$. Поэтому функция $\left(\Pi - \Pi^+\right)\Phi$ имеет поточечное граничное значение $\left(\Pi - \Pi^+\right)\Phi\big|_{\Gamma}$, определяемое равенством

$$\overline{\left(\Pi - \Pi^+\right)\Phi\big|_{\Gamma}} = \left(I + B\right)\overline{\Phi},$$

где матрица – оператор B имеет вид:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & 0 & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & 0 & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & 0 \end{bmatrix}, \tag{13.1}$$

а ее элементы определяются равенствами

$$B_{12} = SK - SF, \; B_{13} = K_0 - F_0, \; B_{14} = K - F,$$

$$B_{21} = KS - FS, \; B_{23} = SKS - SFS, \; B_{24} = K_0 - F_0,$$

$$B_{31}=K_0-F_0,\ B_{32}=SKS-SFS,\ B_{34}=KS-FS\,,$$
$$B_{41}=K-F,\ B_{42}=K_0-F_0,\ B_{43}=SK-SF\,,$$
$$(F\varphi)(t)=\frac{t}{\pi}\int_0^{\frac12}\frac{\varphi(s)\,ds}{t^2+s^2}+\frac{t}{\pi}\int_{\frac12}^{1}\frac{\varphi(s)\,ds}{t^2+(2-s)^2}\,,$$
$$(F_0\varphi)(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac12}\frac{\varphi(s)\,ds}{1+(t+s)^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\frac12}^{1}\frac{\varphi(s)\,ds}{1+(2-t-s)^2}\,.$$

Итак,

$$\left(\Pi-\Pi^+\right)\Phi\Big|_{\Gamma_1}=\varphi_1(x)+\Phi^+(x,0),\qquad \left(\Pi-\Pi^+\right)\Phi\Big|_{\Gamma_2}=\varphi_2(y)+\Phi^+(0,y),$$
$$\left(\Pi-\Pi^+\right)\Phi\Big|_{\Gamma_3}=\varphi_3(x)+\Phi^+(x,1),\qquad \left(\Pi-\Pi^+\right)\Phi\Big|_{\Gamma_4}=\varphi_4(y)+\Phi^+(0,y),$$

где

$$\Phi^+(x,0)=(B_{12}\varphi_2)(x)+(B_{13}\varphi_3)(x)+(B_{14}\varphi_4)(x),$$
$$\Phi^+(1,y)=(B_{21}\varphi_1)(y)+(B_{23}\varphi_3)(y)+(B_{24}\varphi_4)(y),$$
$$\Phi^+(x,1)=(B_{31}\varphi_1)(x)+(B_{32}\varphi_2)(x)+(B_{34}\varphi_4)(x),$$
$$\Phi^+(0,y)=(B_{41}\varphi_1)(y)+(B_{42}\varphi_2)(y)+(B_{43}\varphi_3)(y).$$

Утверждения пункта 1) доказаны.

Докажем утверждение пункта 2). Покажем существование непрерывного продолжения у функции $\Phi^+(x,y)$ в угловых точках $(0,\,0)$, $(1,\,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. Действительно, вычислим контурные пределы в точке $(0,\,0)$:

$$\lim_{x\to0}\Phi^+(x,0)=(B_{12}\varphi_2)(0)+(B_{13}\varphi_3)(0)+(B_{14}\varphi_4)(0)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{\frac12}^{1}\left[\frac{1}{1+\eta^2}-\frac{1}{1+(2-\eta)^2}\right]\varphi_2(\eta)\,d\eta+\frac{1}{\pi}\int_{\frac12}^{1}\left[\frac{1}{1+\xi^2}-\frac{1}{1+(2-\xi)^2}\right]\varphi_3(\xi)\,d\xi\,,$$
$$\lim_{y\to0}\Phi^+(0,y)=(B_{21}\varphi_1)(0)+(B_{23}\varphi_3)(0)+(B_{24}\varphi_4)(0)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{\frac12}^{1}\left[\frac{1}{1+\eta^2}-\frac{1}{1+(2-\eta)^2}\right]\varphi_2(\eta)\,d\eta+\frac{1}{\pi}\int_{\frac12}^{1}\left[\frac{1}{1+\xi^2}-\frac{1}{1+(2-\xi)^2}\right]\varphi_3(\xi)\,d\xi\,.$$

Отсюда следует равенство $\lim\limits_{x\to 0}\Phi^+(x,0)=\lim\limits_{y\to 0}\Phi^+(0,y)$, которое означает непрерывность функции $\Phi^+(x,y)$ в угловой точке $(0,\,0)$.

Аналогично доказывается непрерывность функции $\Phi^+(x,y)$ в остальных угловых точках.

Утверждение пункта 2) доказано.

Докажем утверждение пункта 3). Так как ядра всех интегральных операторов, участвующих в представлении функций $\Phi^+(x,0)$, $\Phi^+(1,y)$, $\Phi^+(x,1)$, $\Phi^+(0,y)$, бесконечно дифференцируемы при $0<x<1$ и $0<y<1$, то функция $\Phi^+(x,y)$ является бесконечно дифференцируемой на Γ за исключением угловых точек.

Утверждение пункта 3) доказано. Справедливость утверждения пункта 4) следует из пунктов 1) и 2).

Теорема 13.1 доказана.

Для удобства ссылки, результаты п. 2) и п. 3) доказанной теоремы, сформулируем в виде следующего утверждения:

Следствие 13.1. ***Оператор B действует из пространства вектор – функций $\overline{L}_\infty[0,1]$ в пространство $\overline{C}[0,1]$, причем для любой функции $\overline{\Phi}\in\overline{L}_\infty[0,1]$ функция $B\overline{\Phi}$ удовлетворяет условию согласованности, то есть контурная функция, соответствующая вектор-функции $B\overline{\Phi}$ является непрерывной на контуре Γ.***

Из теоремы 13.1 для непрерывных функций следует утверждение:

Теорема 13.2. ***Пусть функция $\Phi\in C(\Gamma)$. Тогда:***

1) функция $\left(\Pi-\Pi^+\right)\Phi$ – гармоническая в G и имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}$;

2) функция $\Phi^+=\left(\Pi-\Pi^+\right)\Phi\big|_\Gamma-\Phi$ – непрерывна на контуре Γ;

3) функция Φ^+ – бесконечно дифференцируема на контуре Γ, за исключением, быть может, угловых точек;

4) справедливо равенство $\overline{\Phi}^+=B\overline{\Phi}$.

Доказательство. 1). Так как из $\Phi \in C(\Gamma)$ вытекает $\Phi \in L_\infty(\Gamma)$, то гармоничность функции $(\Pi - \Pi^+)\Phi$ в области G вытекает из пункта 1) теоремы 13.1.

Из включения $\Phi \in C(\Gamma)$ вытекает, что все точки контура Γ, включая и угловые, являются устранимыми точками типа Лебега функции Φ. Тогда из теоремы 13.1 п. 1) и п. 2) вытекает существование непрерывного продолжения функции $(\Pi - \Pi^+)\Phi$ до угловых точек контура Γ.

Справедливость пункта 2) вытекает из непрерывной продолжимости функции $(\Pi - \Pi^+)\Phi$ на $\overline{G}$ и непрерывности функции Φ на Γ.

Справедливость пунктов 3) и 4) является следствием, соответственно, пунктов 3) и 4) теоремы 13.1

Теорема 13.2 доказана.

14. ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМ ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО РЕГУЛЯРИЗОВАННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В предыдущем параграфе равенством (13.1) был определен матрица-оператор B и установлено его действие из пространства $\overline{L}_\infty[0,1]$, в частности, из $\overline{C}[0,1]$ в пространство $\overline{C}[0,1]$. В следующем утверждении вычислены значения нормы оператора B, действующего в этих пространствах.

Теорема 14.1. ***Для норм матрицы-оператора B справедливы равенства:***

$$\|\boldsymbol{B}\|_{\overline{L}_\infty[0,1]\to\overline{L}_\infty[0,1]} = \boldsymbol{m}_\infty, \tag{14.1}$$

$$\|\boldsymbol{B}\|_{\overline{C}[0,1]\to\overline{C}[0,1]} = \boldsymbol{m}_\infty. \tag{14.2}$$

где

$$\boldsymbol{m}_\infty = \frac{1}{\pi}\mathbf{arctg}\frac{3}{4} \qquad \left(0,204 < \frac{1}{\pi}\mathbf{arctg}\frac{3}{4} < 0,205\right).$$

Доказательство. Докажем равенство (14.1). Пусть $\overline{\Phi}\in\overline{L}_{\infty}[0,1]$. Тогда для первой координаты $\left(B\overline{\Phi}\right)_1$ вектор-функции $B\overline{\Phi}$ имеем:

$$\left|\left(B\overline{\Phi}\right)_1(x)\right|\le\left|(B_{12}\varphi_2)(x)\right|+\left|(B_{13}\varphi_3)(x)\right|+\left|(B_{14}\varphi_4)(x)\right|\le$$

$$\le\left[\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1-x}{(1-x)^2+\eta^2}-\frac{1-x}{(1-x)^2+(2-\eta)^2}\right)d\eta+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+(x-\xi)^2}-\frac{1}{1+(x+\xi)^2}\right)d\xi+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{1+(x-\xi)^2}-\frac{1}{1+(2-x-\xi)^2}\right)d\xi+$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x}{x^2+\eta^2}-\frac{x}{x^2+(2-\eta)^2}\right)d\eta\right]\left\|\overline{\Phi}\right\|_{\overline{L}_{\infty}[0,\,1]}.$$

Вычислим точные значения этих интегралов.

Для первого интеграла имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1-x}{(1-x)^2+\eta^2}-\frac{1-x}{(1-x)^2+(2-\eta)^2}\right)d\eta=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{d\left(\frac{\eta}{1-x}\right)}{1+\left(\frac{\eta}{1-x}\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{d\left(\frac{\eta-2}{1-x}\right)}{1+\left(\frac{\eta-2}{1-x}\right)^2}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\eta}{1-x}\Bigg|_{\eta=\frac{1}{2}}^{1}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2-\eta}{1-x}\Bigg|_{\eta=\frac{1}{2}}^{1}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}-\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}}{1-x}\right)-\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{-1}{1-x}-\operatorname{arctg}\frac{-\frac{3}{2}}{1-x}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}-\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}}{1-x}-\operatorname{arctg}\frac{\frac{3}{2}}{1-x}\right).$$

Аналогично вычисляются остальные интегралы:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+(x-\xi)^2}-\frac{1}{1+(x+\xi)^2}\right)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}+x\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}-x\right)\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{1+(x-\xi)^2}-\frac{1}{1+(2-x-\xi)^2}\right)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg}(1-x)-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}-x\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}-x\right)\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x}{x^2+\eta^2}-\frac{x}{x^2+(2-\eta)^2}\right)d\eta=\frac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2x}-\operatorname{arctg}\frac{3}{2x}\right).$$

Складывая вычисленные значения, будем иметь

$$\left|\left(B\overline{\Phi}\right)_1(x)\right|\le\frac{1}{\pi}\left[2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}+\operatorname{arctg}(1-x)\right)+2\left(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)-\right.$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}}{1-x}-\operatorname{arctg}\frac{\frac{3}{2}}{1-x}-\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}}{x}-\operatorname{arctg}\frac{\frac{3}{2}}{x}-$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}+x\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}-x\right)\right]\left\|\overline{\Phi}\right\|_{\overline{L}_\infty[0,\,1]}.$$

Воспользуясь равенством

$$\operatorname{arctg}A+\operatorname{arctg}\frac{1}{A}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \text{если}\quad A>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если}\quad A<0,\end{cases}\tag{14.3}$$

будем иметь

$$\left|\left(B\overline{\Phi}\right)_1(x)\right|\le\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}2(1-x)+\operatorname{arctg}(2x)+\operatorname{arctg}\frac{2(1-x)}{3}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{3}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2x}{2}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{3-2x}{2}\right)\right]\left\|\overline{\Phi}\right\|_{\overline{L}_\infty[0,\,1]}.$$

Имеет место тождество

$$\operatorname{arctg} A+\operatorname{arctg} B=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{A+B}{1-AB}, & \text{если} \quad AB<1,\\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} A, & \text{если} \quad AB=1,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{A+B}{1-AB}+\pi\operatorname{sgn} A, & \text{если} \quad AB>1.\end{cases} \tag{14.4}$$

В силу этого тождества неравенств

$$2(1-x)\cdot 2x\le 1 \left(2(1-x)\cdot 2x=1 \text{ при } x=\frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{2(1-x)}{3}\cdot\frac{2x}{3}=\frac{1}{9}\cdot 4x(1-x)\le\frac{1}{9}<1,$$

$$\frac{1+2x}{2}\cdot\frac{3-2x}{2}=\frac{1}{4}\cdot\big(3+4x(1-x)\big)\le\frac{1}{4}<1$$

и обозначения

$$b(z)=\operatorname{arctg}\frac{2}{1-z}+\operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{z}{9}}-\operatorname{arctg}\frac{2}{1-\frac{1}{4}\cdot(3+z)},$$

произведем дальнейшее упрощение:

$$\left|\left(B\overline{\Phi}\right)_1(x)\right|\le\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{2}{1-4x(1-x)}+\operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}\cdot 4x(1-x)}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\frac{2}{1-\frac{1}{4}\cdot\big(3+4x(1-x)\big)}\right]\left\|\overline{\Phi}\right\|_{\overline{L}_\infty[0,1]}\equiv\frac{1}{\pi}b\big(4x(1-x)\big)\left\|\overline{\Phi}\right\|_{\overline{L}_\infty[0,1]}. \tag{14.5}$$

Произведём замену $z=4x(1-x)$ и заметим, что, если $0\le x\le 1$, то и $0\le z\le 1$. Переписав тождество (14.3) в виде

$$\operatorname{arctg} A=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{A} \quad \text{при} \quad A>0, \tag{14.6}$$

в силу введенного обозначения будем иметь

$$b(z)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1-z}{2}-\operatorname{arctg}\frac{9-z}{6}-\operatorname{arctg}\frac{1-z}{8}.$$

Так как $\frac{1-z}{2}\cdot\frac{9-z}{6}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{6}<1$, то, используя тождество (14.4), получим

$$b(z)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{24-8z}{3+10z-z^2}+\operatorname{arctg}\frac{1-z}{8}.$$

При $0\le z\le 1$ выполняется неравенство $\frac{24-8z}{3+10z-z^2}>0$, поэтому, применяя тождество (14.6), будем иметь

$$b(z)=\operatorname{arctg}\frac{3+10z-z^2}{24-8z}+\operatorname{arctg}\frac{1-z}{8}.$$

Так как

$$\frac{3+10z-z^2}{24-8z}\cdot\frac{1-z}{8}<\frac{3+10}{24-8}\cdot\frac{1}{8}<1,$$

то, используя тождество (14.4), наконец, получим

$$b(z)=\operatorname{arctg}\frac{48(1+z)}{189-71z+11z^2-z^3}.$$

Так как

$$\left(189-71z+11z^2-z^3\right)'=-71+22z-3z^2<0 \quad \text{при} \quad 0\le z\le 1,$$

то знаменатель дроби убывает на отрезке $0\le z\le 1$, а на этом отрезке числитель дроби возрастает и, следовательно, функция $b(z)$ на этом отрезке является возрастающей. Тогда

$$\max_{0\le z\le 1} b(z)=b(1)=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

Отсюда и в силу (14.5) окончательно получим

$$\left\|\left(B\overline{\Phi}\right)_1\right\|_{\overline{L}_\infty[0,1]}\le\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\left\|\overline{\Phi}\right\|_{\overline{L}_\infty[0,1]}.$$

Это оценка имеет место и для остальных координат. Таким образом, имеем

$$\left\|B\overline{\Phi}\right\|_{\overline{L}_\infty[0,1]}=\max_{1\le i\le 4}\left\|\left(B\overline{\Phi}\right)_i\right\|_{\overline{L}_\infty[0,1]}\le\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}. \tag{14.7}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться в справедливости равенств

$$\left\|B\overline{\Phi}_0\right\|_{\overline{L}_\infty[0,1]}=\left\|B\overline{\Phi}_0\right\|_{\overline{C}[0,1]}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}, \tag{14.8}$$

где

$$\overline{\Phi}_0(x) = \left(\varphi_0(x), \varphi_0(x), \varphi_0(x), \varphi_0(x)\right)^{\mathrm{T}}, \ \varphi_0(x) \equiv 1, \ x \in [0, 1].$$

Таким образом, из (14.7) следует равенство

$$\|\boldsymbol{B}\|_{\overline{L}_\infty[0,1] \to \overline{L}_\infty[0,1]} = \boldsymbol{m}_\infty.$$

Равенство (14.1) доказано.

Справедливость равенства (14.2) вытекает из (14.8) неравенства

$$\|\boldsymbol{B}\|_{\overline{C}[0,1] \to \overline{C}[0,1]} \le \|\boldsymbol{B}\|_{\overline{L}_\infty[0,1] \to \overline{L}_\infty[0,1]}$$

и включения $\Phi_0 \in \overline{C}[0, 1]$.

Теорема 14.1 доказана.

15. НЕПРЕРЫВНАЯ ПРОДОЛЖИМОСТЬ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Если гармоническая функция представлена с помощью регуляризованного оператора Пуассона, то можно исследовать проблему существования непрерывного продолжения частных производных этой гармонической функции. Здесь решающую роль играет тот факт, что граничный оператор B сопоставляет функциям, не обладающим достаточной гладкостью, функции с достаточно высокой гладкостью. В этом параграфе доказывается утверждение существования непрерывного продолжения частных производных гармонических функций, представленных регуляризованным оператором Пуассона с достаточно гладкой плотностью, до замкнутой области $\overline{G}$. При доказательстве необходимого условия основной теоремы этого пункта нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 15.1. ***Пусть A, B, C, D – постоянные величины. Тогда для ограниченности функции***

$$\boldsymbol{f}(x, y) = \frac{Ay}{x^2 + y^2} + \frac{By}{(1-x)^2 + y^2} + \frac{C(1-y)}{(1-x)^2 + (1-y)^2} + \frac{D(1-y)}{x^2 + (1-y)^2}$$

в области G необходимо и достаточно выполнение равенств

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0.$$

Доказательство. Справедливость условия достаточности очевидна.

Если функция $f(x, y)$ является ограниченной, то при $(x, y) \to (0, 0)$ дробь $\dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}$ является неограниченной, а оставшиеся дроби имеют конечные пределы. Поэтому, очевидно, получаем равенство $A = 0$. При стремлении (x, y) к другим угловым точкам получим равенства нулю остальных постоянных.

Лемма 15.1 доказана.

Представим область G и контур Γ в следующем виде:

$$G = G_{00} \bigcup G_{10} \bigcup G_{11} \bigcup G_{01},\ \Gamma = \Gamma_{00} \bigcup \Gamma_{10} \bigcup \Gamma_{11} \bigcup \Gamma_{01},$$

где
$$G_{00} = \left(0, \frac{3}{4}\right) \times \left(0, \frac{3}{4}\right),\quad G_{10} = \left(\frac{1}{4}, 1\right) \times \left(0, \frac{3}{4}\right),$$

$$G_{11} = \left(\frac{1}{4}, 1\right) \times \left(\frac{1}{4}, 1\right),\quad G_{01} = \left(0, \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}, 1\right),$$

$$\Gamma_{00} = \overline{G}_{00} \bigcap \Gamma, \qquad \Gamma_{10} = \overline{G}_{10} \bigcap \Gamma, \qquad \Gamma_{11} = \overline{G}_{11} \bigcap \Gamma, \qquad \Gamma_{01} = \overline{G}_{01} \bigcap \Gamma.$$

Представим в развернутом виде регуляризованную гармоническую функцию $u = \Pi\Phi - \Pi^{+}\Phi$:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{4} u_i(x, y) \equiv \sum_{i=1}^{4} \left(\Pi_i \varphi_i - \Pi_i^{+} \varphi_i\right)(x, y),$$

где
$$(\Pi_1 \varphi_1)(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{y \varphi_1(\xi)\, d\xi}{y^2 + (x - \xi)^2},$$

$$\left(\Pi_1^{+} \varphi_1\right)(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y \varphi_1(\xi)\, d\xi}{y^2 + (x + \xi)^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{y \varphi_1(\xi)\, d\xi}{y^2 + (2 - x - \xi)^2},$$

$$(\Pi_2 \varphi_2)(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1 - x}{(1 - x)^2 + (y - \eta)^2} \cdot \varphi_2(\eta)\, d\eta,$$

$$\left(\Pi_2^{+} \varphi_2\right)(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - x)\varphi_2(\eta)\, d\eta}{(1 - x)^2 + (y + \eta)^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1 - x)\varphi_2(\eta)\, d\eta}{(1 - x)^2 + (2 - y - \eta)^2},$$

$$\left(\Pi_3\varphi_3\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{(1-y)\varphi_3(\xi)\,d\xi}{(1-y)^2+(x-\xi)^2},$$

$$\left(\Pi_3^+\varphi_3\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1-y)\varphi_3(\xi)\,d\xi}{(1-y)^2+(x+\xi)^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{(1-y)\varphi_3(\xi)\,d\xi}{(1-y)^2+(2-x-\xi)^2},$$

$$\left(\Pi_4\varphi_4\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{x\varphi_4(\eta)\,d\eta}{x^2+(y-\eta)^2},$$

$$\left(\Pi_4^+\varphi_4\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\varphi_4(\eta)\,d\eta}{x^2+(y+\eta)^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x\varphi_4(\eta)\,d\eta}{x^2+(2-y-\eta)^2}.$$

Для доказательства существования непрерывного продолжения регуляризованной гармонической функции $u=u(x,\,y)$ до замкнутой области, удобно эту функцию представить в следующем виде:

$$u=w_{00}+\widetilde{w}_{00}+u_{00},\quad u_{00}=u_2+u_3\qquad\text{в области } G_{00}, \tag{15.1}$$

$$u=w_{10}+\widetilde{w}_{10}+u_{10},\quad u_{10}=u_3+u_4\qquad\text{в области } G_{10}, \tag{15.2}$$

$$u=w_{11}+\widetilde{w}_{11}+u_{11},\quad u_{11}=u_4+u_1\qquad\text{в области } G_{11}, \tag{15.3}$$

$$u=w_{01}+\widetilde{w}_{01}+u_{01},\quad u_{01}=u_1+u_2\qquad\text{в области } G_{01}, \tag{15.4}$$

где
$$w_{00}=\Pi_1\varphi_1-\Pi_{1,0}\varphi_1+\Pi_4\varphi_4-\Pi_{4,0}\varphi_4,$$

$$\left(\Pi_{1,0}\varphi_1\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{y\varphi_1(\xi)\,d\xi}{y^2+(x+\xi)^2},\quad \left(\Pi_{4,0}\varphi_4\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{x\varphi_4(\eta)\,d\eta}{x^2+(y+\eta)^2},$$

$$\widetilde{w}_{00}(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^1\left[\frac{y}{y^2+(x+\xi)^2}-\frac{y}{y^2+(2-x-\xi)^2}\right]\varphi_1(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^1\left[\frac{x}{x^2+(y+\eta)^2}-\frac{x}{x^2+(2-y-\eta)^2}\right]\varphi_4(\eta)\,d\eta,$$

$$w_{10}=\Pi_1\varphi_1-\Pi_{1,1}\varphi_1+\Pi_2\varphi_2-\Pi_{2,0}\varphi_2,$$

$$\left(\Pi_{1,1}\varphi_1\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{y\varphi_1(\xi)\,d\xi}{y^2+(2-x-\xi)^2},\quad \left(\Pi_{2,0}\varphi_2\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{(1-x)\varphi_2(\eta)\,d\eta}{(1-x)^2+(y+\eta)^2},$$

$$\widetilde{w}_{10}\,(x,\,y)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{y}{y^2+(x+\xi)^2}-\frac{y}{y^2+(2-x-\xi)^2}\right]\varphi_1(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^1\left[\frac{1-x}{(1-x)^2+(y+\eta)^2}-\frac{1-x}{(1-x)^2+(2-y-\eta)^2}\right]\varphi_2(\eta)\,d\eta,$$

$$w_{11}=\Pi_2\varphi_2-\Pi_{2,1}\varphi_2+\Pi_3\varphi_3-\Pi_{3,1}\varphi_3,$$

$$\left(\Pi_{2,1}\varphi_2\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{(1-x)\varphi_2(\eta)\,d\eta}{(1-x)^2+(2-y-\eta)^2},$$

$$\left(\Pi_{3,1}\varphi_3\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{(1-y)\varphi_3(\xi)\,d\xi}{(1-y)^2+(x-\xi)^2},$$

$$\widetilde{w}_{11}\,(x,\,y)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1-x}{(1-x)^2+(y+\eta)^2}-\frac{1-x}{(1-x)^2+(2-y-\eta)^2}\right]\varphi_2(\eta)\,d\eta-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1-y}{(1-y)^2+(x+\xi)^2}-\frac{1-y}{(1-y)^2+(2-x-\xi)^2}\right]\varphi_3(\xi)\,d\xi,$$

$$w_{01}=\Pi_3\varphi_3-\Pi_{3,0}\varphi_3+\Pi_4\varphi_4-\Pi_{4,1}\varphi_4,$$

$$\left(\Pi_{3,0}\varphi_3\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{(1-y)\varphi_1(\xi)\,d\xi}{(1-y)^2+(x+\xi)^2},\quad \left(\Pi_{4,1}\varphi_4\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{x\varphi_4(\eta)\,d\eta}{x^2+(2-y-\eta)^2},$$

$$\widetilde{w}_{01}\,(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^1\left[\frac{1-y}{(1-y)^2+(x+\xi)^2}-\frac{1-y}{(1-y)^2+(2-x-\xi)^2}\right]\varphi_3(\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{x}{x^2+(y+\eta)^2}-\frac{x}{x^2+(2-y-\eta)^2}\right]\varphi_4(\eta)\,d\eta.$$

Обозначим через $K_{i\,j}$ открытый круг с центром, совпадающим с центром квадрата $G_{i\,j}$ и радиусом $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Очевидно, что $\overline{G}_{i\,j}\subset K_{i\,j}$.

Лемма 15.2. ***Функции*** $\widetilde{w}_{ij}$ ***и*** $\boldsymbol{u}_{ij}$ ***бесконечно дифференцируемы в замкнутом круге*** $\overline{\boldsymbol{K}}_{ij}$, $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}=\mathbf{0},\mathbf{1}$.

Доказательство. Знаменатели ядер всех интегральных операторов составляющих функций $\widetilde{w}_{ij}$ и u_{ij} являются положительными в замкнутом круге $\overline{K}_{ij}$. Следовательно, каждое слагаемое, входящее в $\widetilde{w}_{ij}$ и u_{ij}, является бесконечно дифференцируемым в $\overline{K}_{ij}$.

Лемма 15.2 доказана.

Наряду с операторами Π_1, $\Pi_{1,0}$, Π_4 и $\Pi_{4,0}$ введем операторы:

$$\left(\Pi_1^*\varphi_1\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{x-\xi}{y^2+\left(x-\xi\right)^2}\cdot\varphi_1(\xi)\,d\xi\,,$$

$$\left(\Pi_{1,0}^*\varphi_1\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{x+\xi}{y^2+\left(x+\xi\right)^2}\cdot\varphi_1(\xi)\,d\xi\,,$$

$$\left(\Pi_4^*\varphi_4\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{y-\eta}{x^2+\left(y-\eta\right)^2}\cdot\varphi_4(\eta)\,d\eta\,,$$

$$\left(\Pi_{4,0}^*\varphi_4\right)(x,\,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{y+\eta}{x^2+\left(y+\eta\right)^2}\cdot\varphi_4(\eta)\,d\eta\,.$$

Обозначим $v_{0,0}(x,\,y)\equiv 0$ и при $k\geq 1$ положим:

$$v_{k,0}=\frac{\partial v_{k-1,0}}{\partial x}-\frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2+(1-x)^2\right)}-\frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2+(1+x)^2\right)}+\frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2+(1-y)^2\right)}+$$

$$+\frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2+(1+y)^2\right)}+\frac{2y\left(\varphi_1^{(k-1)}(0)-\varphi_4^{(k-1)}(0)\right)}{\pi\left(x^2+y^2\right)},\ \text{если}\ k=4k_1+1, \tag{15.5}$$

$$v_{k,0}=\frac{\partial v_{k-1,0}}{\partial x}-\frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2+(1-x)^2\right)}+\frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2+(1+x)^2\right)}+$$

$$+\frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2+(1-y)^2\right)}-\frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2+(1+y)^2\right)},\ \text{если}\ k=4k_1+2 \tag{15.6}$$

$$v_{k,0}=\frac{\partial v_{k-1,0}}{\partial x}-\frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2+(1-x)^2\right)}-\frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2+(1+x)^2\right)}+\frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2+(1-y)^2\right)}-$$

$$-\frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2+(1+y)^2\right)}+\frac{2y\left(\varphi_1^{(k-1)}(0)+\varphi_4^{(k-1)}(0)\right)}{\pi\left(x^2+y^2\right)},\ \text{если } k=4k_1+3, \tag{15.7}$$

$$v_{k,0}=\frac{\partial v_{k-1,0}}{\partial x}-\frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2+(1-x)^2\right)}+\frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2+(1+x)^2\right)}-$$

$$-\frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2+(1-y)^2\right)}+\frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2+(1+y)^2\right)},\ \text{если } k=4k_1+4. \tag{15.8}$$

Лемма 15.3. ***Пусть вектор-функция*** $\overline{\Phi}=\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4\right)^{\mathrm{T}}$ ***на отрезке*** $[0,1]$ ***имеет все производные до порядка*** n ***включительно. Тогда для частных производных*** $\dfrac{\partial^k w_{00}}{\partial x^k}$, $k=\overline{1,n}$ ***справедливо представление***

$$\frac{\partial^k w_{00}}{\partial x^k}=\begin{cases} v_{k,0}+\Pi_1\varphi_1^{(k)}+\Pi_{1,0}\varphi_1^{(k)}-\Pi_4^*\varphi_4^{(k)}-\Pi_{4,0}^*\varphi_4^{(k)}, & k=4k_1+1,\\ v_{k,0}+\Pi_1\varphi_1^{(k)}-\Pi_{1,0}\varphi_1^{(k)}-\Pi_4\varphi_4^{(k)}+\Pi_{4,0}\varphi_4^{(k)}, & k=4k_1+2,\\ v_{k,0}+\Pi_1\varphi_1^{(k)}+\Pi_{1,0}\varphi_1^{(k)}+\Pi_4^*\varphi_4^{(k)}+\Pi_{4,0}^*\varphi_4^{(k)}, & k=4k_1+3,\\ v_{k,0}+\Pi_1\varphi_1^{(k)}-\Pi_{1,0}\varphi_1^{(k)}+\Pi_4\varphi_4^{(k)}-\Pi_{4,0}\varphi_4^{(k)}, & k=4k_1+4.\end{cases} \tag{15.9}$$

Доказательство справедливости утверждения данной леммы проверяется непосредственным вычислением частных производных под знаком интеграла, интегрированием по частям и использованием равенств:

$$\left(\frac{y}{y^2+(x\pm\xi)^2}\right)'_x=\pm\left(\frac{y}{y^2+(x\pm\xi)^2}\right)'_\xi,$$

$$\left(\frac{x}{x^2+(y\pm\eta)^2}\right)'_x=\mp\left(\frac{y\pm\eta}{x^2+(y\pm\eta)^2}\right)'_\eta,$$

$$\left(\frac{y-\eta}{x^2+(y\pm\eta)^2}\right)'_x=\pm\left(\frac{x}{x^2+(y\pm\eta)^2}\right)'_\eta.$$

Для $k=\overline{0,\,n}$ положим

$$v_{k,1}=\frac{\partial v_{k,0}}{\partial y}-\frac{(1-x)\varphi_1^{(k)}(1)}{\pi\left(y^2+(1-x)^2\right)}+\frac{(1+x)\varphi_1^{(k)}(1)}{\pi\left(y^2+(1+x)^2\right)}-\frac{x\varphi_4^{(k)}(1)}{\pi\left(x^2+(1-y)^2\right)}-$$
$$-\frac{x\varphi_4^{(k)}(1)}{\pi\left(x^2+(1+y)^2\right)}-\frac{2x\left(\varphi_1^{(k)}(0)-\varphi_4^{(k)}(0)\right)}{\pi\left(x^2+y^2\right)},\qquad \text{если}\qquad k=4k_1,\tag{15.10}$$

$$v_{k,1}=\frac{\partial v_{k,0}}{\partial y}-\frac{(1-x)\varphi_1^{(k)}(1)}{\pi\left(y^2+(1-x)^2\right)}-\frac{(1+x)\varphi_1^{(k)}(1)}{\pi\left(y^2+(1+x)^2\right)}-$$
$$-\frac{(1-y)\varphi_4^{(k)}(1)}{\pi\left(x^2+(1-y)^2\right)}-\frac{(1+y)\varphi_4^{(k)}(1)}{\pi\left(x^2+(1+y)^2\right)},\qquad \text{если}\qquad k=4k_1+1,\tag{15.11}$$

$$v_{k,1}=\frac{\partial v_{k,0}}{\partial y}-\frac{(1-x)\varphi_1^{(k)}(1)}{\pi\left(y^2+(1-x)^2\right)}+\frac{(1+x)\varphi_1^{(k)}(1)}{\pi\left(y^2+(1+x)^2\right)}+\frac{x\varphi_4^{(k)}(1)}{\pi\left(x^2+(1-y)^2\right)}+$$
$$+\frac{x\varphi_4^{(k)}(1)}{\pi\left(x^2+(1+y)^2\right)}-\frac{2x\left(\varphi_1^{(k)}(0)+\varphi_4^{(k)}(0)\right)}{\pi\left(x^2+y^2\right)},\qquad \text{если}\qquad k=4k_1+2,\tag{15.12}$$

$$v_{k,1}=\frac{\partial v_{k,0}}{\partial y}-\frac{(1-x)\varphi_1^{(k)}(1)}{\pi\left(y^2+(1-x)^2\right)}-\frac{(1+x)\varphi_1^{(k)}(1)}{\pi\left(y^2+(1+x)^2\right)}+$$
$$+\frac{(1-y)\varphi_4^{(k)}(1)}{\pi\left(x^2+(1-y)^2\right)}+\frac{(1+y)\varphi_4^{(k)}(1)}{\pi\left(x^2+(1+y)^2\right)},\qquad \text{если}\qquad k=4k_1+3.\tag{15.13}$$

Лемма 15.4 ***Пусть вектор-функция*** $\overline{\Phi}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)^{\mathrm{T}}$ ***на отрезке*** $[0,1]$ ***имеет все производные до порядка*** $\mathbf{n+1}$ ***включительно. Тогда для частных производных*** $\dfrac{\partial^{k+1}w_{00}}{\partial x^k\partial y}$, $k=\overline{0,\,n}$ ***справедливо представление***

$$\frac{\partial^{k+1}w_{00}}{\partial x^k\partial y}=\begin{cases}v_{k,1}-\Pi_1^*\varphi_1^{(k+1)}-\Pi_{1,0}^*\varphi_1^{(k+1)}+\Pi_4\varphi_4^{(k+1)}+\Pi_{4,0}\varphi_4^{(k+1)}, & k=4k_1,\\ v_{k,1}-\Pi_1^*\varphi_1^{(k+1)}+\Pi_{1,0}^*\varphi_1^{(k+1)}-\Pi_4^*\varphi_4^{(k+1)}+\Pi_{4,0}^*\varphi_4^{(k+1)}, & k=4k_1+1,\\ v_{k,1}-\Pi_1^*\varphi_1^{(k+1)}-\Pi_{1,0}^*\varphi_1^{(k+1)}-\Pi_4\varphi_4^{(k+1)}-\Pi_{4,0}\varphi_4^{(k+1)}, & k=4k_1+2,\\ v_{k,1}-\Pi_1^*\varphi_1^{(k+1)}+\Pi_{1,0}^*\varphi_1^{(k+1)}+\Pi_4^*\varphi_4^{(k+1)}-\Pi_{4,0}^*\varphi_4^{(k+1)}, & k=4k_1+3.\end{cases}\tag{15.14}$$

Доказательство справедливости утверждения данной леммы проверяется непосредственным вычислением частных производных под знаком интеграла, интегрированием по частям и использованием равенств:

$$\left(\frac{y}{y^2+(x\pm\xi)^2}\right)'_y = \mp\left(\frac{x\pm\xi}{y^2+(x\pm\xi)^2}\right)'_\xi,$$

$$\left(\frac{x}{x^2+(y\pm\eta)^2}\right)'_y = \pm\left(\frac{x}{x^2+(y\pm\eta)^2}\right)'_\eta,$$

$$\left(\frac{y\pm\eta}{x^2+(y\pm\eta)^2}\right)'_y = \pm\left(\frac{y\pm\eta}{x^2+(y\pm\eta)^2}\right)'_\eta.$$

Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_4(x)$ принадлежат пространству $C[0,1]$. Положим

$$z_1(x,\, y;\, \varphi_1) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{y}{y^2+(x-\xi)^2}\cdot\left[\varphi_1(x)-\varphi_1(\xi)\right]d\xi,$$

$$z_{1,0}(x,\, y;\, \varphi_1) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{y}{y^2+(x+\xi)^2}\cdot\left[\varphi_1(x)-\varphi_1(\xi)\right]d\xi,$$

$$z_4(x,\, y;\, \varphi_4) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x}{x^2+(y-\eta)^2}\cdot\left[\varphi_4(y)-\varphi_4(\eta)\right]d\eta,$$

$$z_{4,0}(x,\, y;\, \varphi_4) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x}{x^2+(y+\eta)^2}\cdot\left[\varphi_4(y)-\varphi_4(\eta)\right]d\eta,$$

$$z_1^*(x,\, y;\, \varphi_1) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x-\xi}{y^2+(x-\xi)^2}\cdot\left[\varphi_1(x)-\varphi_1(\xi)\right]d\xi,$$

$$z_{1,0}^*(x,\, y;\, \varphi_1) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x+\xi}{y^2+(x+\xi)^2}\cdot\left[\varphi_1(x)-\varphi_1(\xi)\right]d\xi,$$

$$z_4^*(x,\, y;\, \varphi_4) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{y-\eta}{x^2+(y-\eta)^2}\cdot\left[\varphi_4(y)-\varphi_4(\eta)\right]d\eta,$$

$$z_{4,0}^*(x,\, y;\, \varphi_4) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{y+\eta}{x^2+(y+\eta)^2}\cdot\left[\varphi_4(y)-\varphi_4(\eta)\right]d\eta.$$

Лемма 15.5. ***Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_4(x)$ удовлетворяют условию Липшица на отрезке $[0,1]$. Тогда гармонические функции z_i, $z_{i,0}$, z_i^* и $z_{i,0}^*$, $i=1;4$ имеют непрерывные продолжения на замкнутую область $\overline{G}$.***

Доказательство. Рассмотрим функции $z_1(x,y;\varphi_1)$ и $z_1^*(x,y;\varphi_1)$. Они определены и непрерывны для всех точек $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\Gamma_1$, где $\Gamma_1=[0,1]\times\{0\}$. Докажем существование предела функций $z_1(x,y;\varphi_1)$ и $z_1^*(x,y;\varphi_1)$ при $(x,y)\to(x_0,0)$, $(x,y)\in G$, $x_0\in[0,1]$. Последнее будет доказано, если будет доказано существование предела последовательностей $z_1(x_n,y_n;\varphi_1)$ и $z_1^*(x_n,y_n;\varphi_1)$ для любой последовательности $(x_n,y_n)\in G$, $(x_n,y_n)\to(x_0,0)$ при $n\to\infty$. Для этого воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. [12, с. 139].

Теорема Лебега [12, с. 139]. ***Пусть на измеримом множестве E задана последовательность $\{f_n(\xi)\}$ измеримых ограниченных функций, 1) сходящаяся по мере к измеримой ограниченной функции $F(\xi)$. Если существует постоянная K, такая, что при всех n и 2) при всех ξ***

$$\left|f_n(\xi)\right|<K,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(\xi)d\xi=\int\limits_E F(\xi)d\xi$.

Замечание 1. Условие 1) можно заменить на ***сходящуюся к функции $F(\xi)$ почти при всех $\xi\in E$.***

Замечание 2. Условие 2) можно заменить на ***почти при всех $\xi\in E$.***

Представим последовательность $z_1(x_n,y_n)$ в следующем виде

$$z_1(x_n,y_n)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\varphi_1(x_n)-\varphi_1(\xi)}{x_n-\xi}\frac{y_n(x_n-\xi)}{y_n^2+(x_n-\xi)^2}d\xi.$$

Последовательность функций

$$f_n(\xi)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_1(x_n)-\varphi_1(\xi)}{x_n-\xi}\cdot\dfrac{y_n(x_n-\xi)}{y_n^2+(x_n-\xi)^2}, & \xi\neq x_n,\\ 0, & \xi=x_n\end{cases}$$

при $n \to \infty$ и $\xi \neq x_0$ поточечно сходится к тождественно нулевой функции $F(\xi) \equiv 0$.

Так как функция $\varphi_1(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то имеем

$$\left|\varphi_1(x_n) - \varphi_1(\xi)\right| \leq k_1 |x_n - \xi|,$$

где k_1 – постоянная Липшица функции $\varphi_1(x)$. Поэтому

$$\left| f_n(\xi) \right| \leq \frac{\left|\varphi_1(x_n) - \varphi_1(\xi)\right|}{|x_n - \xi|} \cdot \frac{y_n |x_n - \xi|}{y_n^2 + (x_n - \xi)^2} \leq \frac{k_1 |x_n - \xi|}{|x_n - \xi|} \cdot \frac{\frac{1}{2}\left(y_n^2 + (x_n - \xi)^2\right)}{y_n^2 + (x_n - \xi)^2} = \frac{k_1}{2}.$$

Выполнены все условия теоремы Лебега. Следовательно, имеем

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_1(x_n) - \varphi_1(\xi)}{y_n^2 + (x_n - \xi)^2} d\xi = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^1 f_n(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^1 F(\xi) d\xi = 0.$$

Таким образом, нами доказано существование предела функции $z_1(x, y; \varphi_1)$ при $(x, y) \to (x_0, 0)$, $(x, y) \in G$, $0 \leq x_0 \leq 1$. Отсюда следует, что функция $z_1(x, y; \varphi_1)$ имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}$.

Представим последовательность $z_1^*(x_n, y_n; \varphi_1)$ в следующем виде

$$z_1^*(x_n, y_n; \varphi_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_1(x_n) - \varphi_1(\xi)}{x_n - \xi} \frac{(x_n - \xi)^2}{y^2 + (x_n - \xi)^2} d\xi$$

Последовательность функций

$$f_n(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_1(x_n) - \varphi_1(\xi)}{x_n - \xi} \cdot \dfrac{(x_n - \xi)^2}{y_n^2 + (x_n - \xi)^2}, & \xi \neq x_n, \\ 0, & \xi = x_n \end{cases}$$

при $n \to \infty$ и $\xi \neq x_0$ поточечно сходится к функции $F(\xi) = \dfrac{\varphi_1(x_0) - \varphi_1(\xi)}{x_0 - \xi}$.

Так как функция $\varphi_1(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то имеем

$$\left| f_n(\xi) \right| \leq \frac{\left|\varphi_1(x_n) - \varphi_1(\xi)\right|}{|x_n - \xi|} \cdot \frac{(x_n - \xi)^2}{y_n^2 + (x_n - \xi)^2} \leq \frac{k_1 |x_n - \xi|}{|x_n - \xi|} = k_1$$

Выполнены все условия теоремы Лебега. Следовательно, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_1(x_n)-\varphi_1(\xi)}{x_n-\xi}\frac{(x_n-\xi)^2}{y^2+(x_n-\xi)^2}d\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_1(x_0)-\varphi_1(\xi)}{x_0-\xi}d\xi\,.$$

Существование последнего интеграла гарантируется выполнением условия Липшица функцией $\varphi_1(x)$.

Таким образом, нами доказано существование предела функции $z_1^*(x, y; \varphi_1)$ при $(x, y)\to(x_0, 0)$, $(x, y)\in G$, $0\le x_0\le 1$. Отсюда следует, что функция $z_1^*(x, y; \varphi_1)$ имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}$.

Аналогично доказывается существование непрерывного продолжения на $\overline{G}$ остальных функций.

Лемма 15.5 доказана.

Замечание. Утверждение леммы 15.5 остается верным, если условие Липшица для функций φ_1 и φ_4:

1) заменить на условие непрерывности, в случае функций z_1, $z_{1,0}$, z_4 и $z_{4,0}$;

2) заменить на условие Гельдера с любым показателем $\alpha: 0<\alpha<1$, в случае функций z_1^*, $z_{1,0}^*$, z_4^* и $z_{4,0}^*$.

Рассмотрим случай 1). Пусть функция $\varphi_1(x)$ является непрерывной на отрезке $[0, 1]$ и $(x, y)\to(x_0, 0)$, $(x, y)\in G$, $0\le x_0\le 1$.

Исследуем на непрерывную продолжимость функцию $z_1(x, y; \varphi_1)$. Если $0<x_0<1$, то из леммы 2.1 получим

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}\frac{y}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_1(\xi)d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}=\varphi_1(x_0),$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}\frac{y\varphi_1(x)}{\pi}\int_0^1\frac{d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}=\varphi_1(x_0).$$

Поэтому

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}z_1(x,y;\varphi_1)=0,\qquad 0<x_0\le 1.$$

Если $x_0 = 0$, то, представив

$$z_1(x,\, y;\, \varphi_1) = \frac{y}{\pi}\int_0^\delta \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi)}{y^2 + (x-\xi)^2}\,d\xi + \frac{y}{\pi}\int_\delta^1 \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi)}{y^2 + (x-\xi)^2}\,d\xi,$$

оценим каждое слагаемое. Для первого слагаемого имеем

$$\left|\frac{y}{\pi}\int_0^\delta \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi)}{y^2 + (x-\xi)^2}\,d\xi\right| \le \max_{0\le\xi\le\delta}\left|\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi)\right|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{y\,d\xi}{y^2 + (x-\xi)^2} \le$$

$$\le \max_{0\le\xi\le\delta}\left|\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi)\right|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Величину $\delta > 0$ выберем такой, чтобы при $0 \le x \le \frac{\delta}{2}$ выполнялась оценка

$$\max_{0\le\xi\le\delta}\left|\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{15.15}$$

Фиксируем δ и рассмотрим второе слагаемое. Так как при $\delta \le \xi \le 1$ и $0 \le x \le \frac{\delta}{2}$ знаменатель подынтегральной функции больше нуля, то при $y \to 0+$ подынтегральная функция $\frac{y}{y^2 + (x-\xi)^2}\cdot\left(\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi)\right)$ равномерно по $\xi \in [\delta, 1]$ и $x \in \left[0, \frac{\delta}{2}\right]$ стремится к нулю. Поэтому существует $y_0 > 0$, такое, что при $0 < y \le y_0$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{y}{y^2 + (x-\xi)^2}\cdot\left(\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi)\right)\right| < \frac{\pi\varepsilon}{2}.$$

Отсюда для второго слагаемого получим

$$\left|\frac{y}{\pi}\int_\delta^1 \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi)}{y^2 + (x-\xi)^2}\,d\xi\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15.16}$$

Из неравенств (15.15) и (15.16) получим $\left|z_1(x,\, y;\, \varphi_1)\right| < \varepsilon$, при $x \in \left[0, \frac{\delta}{2}\right]$ и $y \in (0,\, y_0)$. Отсюда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, будем иметь

$$\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} z_1(x,\, y;\, \varphi_1) = 0.$$

Аналогично рассматривается случай $x_0 = 1$.

Таким образом, нами доказано существование предела функции $z_1(x, y; \varphi_1)$ при $(x, y) \to (x_0, 0)$, $(x, y) \in G$, $0 \le x_0 \le 1$. Отсюда следует, что функция $z_1(x, y; \varphi_1)$ имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}$.

Аналогичным образом доказывается существование непрерывного продолжения функций $z_{1,0}(x, y; \varphi_1)$, $z_4(x, y; \varphi_4)$ и $z_{4,0}(x, y; \varphi_4)$ на $\overline{G}$.

Рассмотрим случай 2). Пусть функция $\varphi_1(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha : 0 < \alpha < 1$, то есть

$$\left|\varphi_1(x'') - \varphi_1(x')\right| \le k_1 \left|x'' - x'\right|^{\alpha}.$$

Пусть $(x, y) \to (x_0, 0)$, $(x, y) \in G$, $0 \le x_0 \le 1$. Докажем, что

$$\lim_{(x,\, y) \to (x_0,\, 0)} z_1^*(x, y; \varphi_1) = z_1^*(x_0, 0; \varphi_1), \tag{15.17}$$

где $\displaystyle z_1^*(x_0, 0; \varphi_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_1(x_0) - \varphi_1(\xi)}{x_0 - \xi} d\xi$.

Отметим, что существование сингулярного интеграла в правой части этого равенства следует из гельдеровости функции $\varphi_1(x)$.

Пусть $\delta > 0$ – произвольное . Полагая

$$e_{\delta,0} = [0, 1] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad e_{\delta,1} = [0, 1] \setminus e_{\delta,0},$$

представим разность $z_1^*(x, y; \varphi_1) - z_1^*(x_0, 0; \varphi_1)$ в виде

$$z_1^*(x, y; \varphi_1) - z_1^*(x_0, 0; \varphi_1) = I_1 + I_2 + I_3,$$

где $\displaystyle I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{e_{\delta,0}} \frac{(x - \xi)(\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi))}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi$, $\displaystyle I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{e_{\delta,0}} \frac{\varphi_1(x_0) - \varphi_1(\xi)}{x_0 - \xi} d\xi$,

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \int_{e_{\delta,1}} \left[\frac{(x - \xi)(\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi))}{y^2 + (x - \xi)^2} - \frac{\varphi_1(x_0) - \varphi_1(\xi)}{x_0 - \xi} \right] d\xi$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное. Без ограничения общности будем считать, что $|x - x_0| < \dfrac{\delta}{2}$. Имеем

$$|I_1| \le \frac{1}{\pi} \int_{e_{\delta,0}} \frac{(x - \xi)^2}{y^2 + (x - \xi)^2} \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi)}{|x - \xi|^{\alpha}} \frac{d\xi}{|x - \xi|^{1-\alpha}} \le$$

$$\leq \frac{k_1}{\pi}\int\limits_{e_{\delta,0}} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{1-\alpha}} = \frac{k_1}{\pi}\left(\frac{|x-x_0+\delta|^{\alpha}}{\alpha}+\frac{|x_0-x+\delta|^{\alpha}}{\alpha}\right) < \frac{2k_1}{\alpha\pi}\left(\frac{3\delta}{2}\right)^{\alpha}.$$

Аналогично, имеем $|I_2| < \frac{2k_1}{\alpha\pi}\left(\frac{3\delta}{2}\right)^{\alpha}$. Величину $\delta > 0$ выберем такой, чтобы выполнялось неравенство $\frac{2k_1}{\alpha\pi}\left(\frac{3\delta}{2}\right)^{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда справедливы оценки

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |I_2| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{15.18}$$

Фиксируем величину δ. Тогда на множестве $e_{\delta,1}$ функция $\frac{(x-\xi)(\varphi_1(x)-\varphi_1(\xi))}{y^2+(x-\xi)^2}$ при $(x, y)\to(x_0, 0)$ стремится к функции $\frac{\varphi_1(x_0)-\varphi_1(\xi)}{x_0-\xi}$ равномерно по ξ. Поэтому существуют $\delta_1 : 0 < \delta_1 < \frac{\delta}{2}$ и $y_0 > 0$ такие, что при $|x-x_0| < \delta_1$ и $0 < y < y_0$ справедлива оценка

$$\left|\frac{(x-\xi)(\varphi_1(x)-\varphi_1(\xi))}{y^2+(x-\xi)^2} - \frac{\varphi_1(x_0)-\varphi_1(\xi)}{x_0-\xi}\right| < \frac{\pi\varepsilon}{3}.$$

Отсюда имеем

$$|I_3| \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{e_{\delta,1}} \frac{\pi\varepsilon}{3}d\xi < \frac{\varepsilon}{3}\int\limits_0^1 d\xi = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{15.19}$$

Из оценок (15.18) и (15.19) вытекает справедливость равенства (15.17).

Аналогичным образом доказывается существование непрерывного продолжения функций $z^*_{1,0}(x, y; \varphi_1)$, $z^*_4(x, y; \varphi_4)$ и $z^*_{4,0}(x, y; \varphi_4)$ на $\overline{G}$.

Определение. Будем говорить, что вектор-функция $\overline{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\mathrm{T}} \in \overline{C}^n[0,1]$ удовлетворяет ***условию согласованности порядка*** n, если для всех целых $k \geq 0$, для которых $2k \leq n$, выполняются равенства

$$\begin{cases} \varphi_4^{(2k)}(0) = (-1)^k \varphi_1^{(2k)}(0), \\ \varphi_1^{(2k)}(1) = (-1)^k \varphi_2^{(2k)}(0), \\ \varphi_2^{(2k)}(1) = (-1)^k \varphi_3^{(2k)}(1), \\ \varphi_3^{(2k)}(0) = (-1)^k \varphi_4^{(2k)}(1). \end{cases} \tag{15.20}$$

Основными результатами данного пункта являются следующие утверждения.

Теорема 15.1. ***Пусть вектор-функция*** $\overline{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\mathrm{T}}$ ***имеет все производные до порядка*** $n \geq 1$ ***включительно, причем*** n***-ая производная удовлетворяет условию Липшица. Если вектор-функция*** $\overline{\Phi}$ ***удовлетворяет условию согласованности порядка*** n***, то все частные производные*** $\dfrac{\partial^{n_1+n_2} u}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}}$***, где*** $n_1 + n_2 \leq n$***, имеют непрерывные продолжения на замкнутую область*** $\overline{G}$***.***

Теорема 15.2. ***Пусть вектор-функция*** $\overline{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\mathrm{T}}$ ***имеет все производные до порядка*** $n \geq 1$ ***включительно, причем*** n***-ая производная удовлетворяет условию Липшица. Если все частные производные*** $\dfrac{\partial^{n_1+n_2} u}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}}$***, где*** $n_1 + n_2 \leq n$***, ограничены в замкнутой области*** $\overline{G}$***, то вектор-функция*** $\overline{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\mathrm{T}}$ ***удовлетворяет условию согласованности порядка*** n***.***

Из теорем 15.1 и 15.2 в качестве следствия получим следующую теорему:

Теорема 15.3. ***Пусть вектор-функция*** $\overline{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\mathrm{T}}$ ***имеет все производные до порядка*** $n \geq 1$ ***включительно, причем*** n***-ая производная удовлетворяет условию Липшица. Тогда для того, чтобы все частные производные*** $\dfrac{\partial^{n_1+n_2} u}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}}$***, где*** $n_1 + n_2 \leq n$***, имели непрерывные продолжения на замкнутую область*** $\overline{G}$***, необходимо и достаточно, чтобы век-***

тор-функция $\overline{\Phi}=\left(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\right)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяла условию согласованности порядка n.

Доказательство теоремы 15.1. Пусть n_1 и n_2 – произвольные целые неотрицательные числа. Рассмотрим частную производную $\dfrac{\partial^{n_1+n_2}u}{\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}}$. Так как из гармоничности функции $u=u(x, y)$ вытекает равенство

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial y^{2k}}=(-1)^k\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}},\qquad k\ge 0,$$

то справедливо равенство

$$\frac{\partial^{n_1+n_2}u}{\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}}=\begin{cases}(-1)^{k_2}\dfrac{\partial^{n_1+n_2}u}{\partial x^{n_1+n_2}}, & \text{если}\quad n_2=2k_2,\\[2mm] (-1)^{k_2}\dfrac{\partial^{n_1+n_2}u}{\partial x^{n_1+n_2-1}\partial y}, & \text{если}\quad n_2=2k_2+1.\end{cases},$$

Поэтому достаточно исследовать на непрерывную продолжимость до замкнутой области $\overline{G}$ только частные производные:

а) $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$ при $k\ge 1$; б) $\dfrac{\partial^{k+1}u}{\partial x^k\partial y}$ при $k\ge 0$.

Рассмотрим случай а). Покажем непрерывную продолжимость функции $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$ на замкнутую область $\overline{G}$. Это эквивалентно существованию непрерывной продолжимости этой функции на каждую из замкнутых областей $\overline{G}_{ij}$, $i, j=0,1$.

Докажем непрерывную продолжимость функции $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$ на замкнутую область $\overline{G}_{00}$. Воспользуемся представлением (15.1). В силу леммы 15.2 функции $\widetilde{w}_{00}$ и u_{00} бесконечно дифференцируемы в замкнутом круге $\overline{K}_{00}\supset\overline{G}_{00}$. Следовательно, частные производные $\dfrac{\partial^k\widetilde{w}_{00}}{\partial x^k}$ и $\dfrac{\partial^k u_{00}}{\partial x^k}$ имеют непрерывные продолжения на $\overline{G}_{00}$ для любого $k\ge 1$.

Таким образом, существование непрерывного продолжения функции $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ на $\overline{G}_{00}$ эквивалентно существованию непрерывного продолжения функции $\frac{\partial^k w_{00}}{\partial x^k}$ на $\overline{G}_{00}$.

В лемме 15.3 приведено представление для $\frac{\partial^k w_{00}}{\partial x^k}$. Покажем непрерывность слагаемых $v_{k,0}$, $k \geq 1$, определенных в (15.5)-(15.9) в замкнутом круге $\overline{K}_{00} \supset \overline{G}_{00}$.

Пусть $k_1 = 0$. Рассмотрим $v_{k,0}$ при $k = 1$. Так как $v_{0,0}(x, y) \equiv 0$ и $\varphi_4(0) = \varphi_1(0)$, то из (15.5) имеем

$$v_{1,0} = -\frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2 + (1-x)^2\right)} - \frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2 + (1+x)^2\right)} + \frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2 + (1-y)^2\right)} + \frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2 + (1+y)^2\right)}. \qquad (15.21)$$

Знаменатель каждой дроби не меньше $\frac{\pi}{64}$ при $(x, y) \in \overline{K}_{00}$. Поэтому функция $v_{1,0}$ непрерывна в $\overline{K}_{00} \supset \overline{G}_{00}$.

Пусть $k = 2$. Тогда из (15.6) имеем

$$v_{2,0} = \frac{\partial v_{1,0}}{\partial x} - \frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2 + (1-x)^2\right)} + \frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2 + (1+x)^2\right)} + \frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2 + (1-y)^2\right)} - \frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2 + (1+y)^2\right)}. \qquad (15.22)$$

Непрерывность первого слагаемого $\frac{\partial v_{1,0}}{\partial x}$ в $\overline{K}_{00} \supset \overline{G}_{00}$ следует из (15.21), а непрерывность остальных слагаемых в этом множестве следует из того, что знаменатель каждой дроби не меньше $\frac{\pi}{64}$ при $(x, y) \in \overline{K}_{00}$.

Пусть $k=3$. Тогда из (15.7) и равенства $\varphi_4''(0)=-\varphi_1''(0)$ имеем

$$v_{3,0}=\frac{\partial v_{2,0}}{\partial x}-\frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2+(1-x)^2\right)}-\frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2+(1+x)^2\right)}+$$

$$+\frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2+(1-y)^2\right)}-\frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2+(1+y)^2\right)}. \tag{15.23}$$

Непрерывность первого слагаемого $\dfrac{\partial v_{2,0}}{\partial x}$ в $\overline{K}_{00}\supset\overline{G}_{00}$ следует из (15.22), а непрерывность остальных слагаемых в этом множестве следует из того, что знаменатель каждой дроби не меньше $\dfrac{\pi}{64}$ при $(x,\,y)\in\overline{K}_{00}$.

Пусть $k=4$. Тогда из (15.8) имеем

$$v_{4,0}=\frac{\partial v_{3,0}}{\partial x}-\frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2+(1-x)^2\right)}+\frac{y\varphi_1^{(k-1)}(1)}{\pi\left(y^2+(1+x)^2\right)}-$$

$$-\frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2+(1-y)^2\right)}+\frac{x\varphi_4^{(k-1)}(1)}{\pi\left(x^2+(1+y)^2\right)}. \tag{15.24}$$

Непрерывность первого слагаемого $\dfrac{\partial v_{3,0}}{\partial x}$ в $\overline{K}_{00}\supset\overline{G}_{00}$ следует из (15.23), а непрерывность остальных слагаемых в этом множестве следует из того, что знаменатель каждой дроби не меньше $\dfrac{\pi}{64}$ при $(x,\,y)\in\overline{K}_{00}$.

Таким образом, непрерывность функций (15.5)-(15.8) в $\overline{K}_{00}\supset\overline{G}_{00}$ при $k_1=0$ доказана.

Доказательство непрерывности $v_{k,0}$ при $k=4k_1+i,\ i=\overline{1,\,4}$ и $k_1\geq 1$ проводится аналогично, по индукции.

Докажем существование непрерывного продолжения на $\overline{G}_{00}$ суммы остальных слагаемых в правой части (15.9).

Пусть $k=1$. Тогда

$$\left(\Pi_1\varphi_1'\right)(x,\,y)+\left(\Pi_{1,0}\varphi_1'\right)(x,\,y)-\left(\Pi_4^*\varphi_4'\right)(x,\,y)-\left(\Pi_{4,0}^*\varphi_4'\right)(x,\,y)=$$

$$=z_{14}^{(1)}(x,\,y)+\tilde{z}_{14}^{(1)}(x,\,y),$$

где $$z_{14}^{(1)}(x,\, y_4) = -z_1(x,\, y;\, \varphi_1') - z_{1,0}(x,\, y;\, \varphi_1') + z_4^*(x,\, y;\, \varphi_4') + z_{4,0}^*(x,\, y;\, \varphi_4'),$$

$$\tilde{z}_{14}^{(1)}(x,\, y) = \frac{\varphi_1'(x)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y} + \operatorname{arctg}\frac{1+x}{y}\right) + \frac{\varphi_4'(y)}{2\pi}\ln\frac{x^2+(1-y)^2}{x^2+(1+y)^2}$$

Непрерывная продолжимость первого слагаемого $z_{14}^{(1)}$ на $\overline{G}_{00}$ следует из леммы 15.5, так как каждое из слагаемых, составляющее $z_{14}^{(1)}$, имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}$ и, в частности, на $\overline{G}_{00}$.

Проверим существование непрерывного продолжения у второго слагаемого $\tilde{z}_{14}^{(1)}$ на $\overline{G}_{00}$.

Пусть $(x,\, y) \to (x_0,\, 0)$, $(x,\, y) \in G_{00}$, $0 < x_0 \le \dfrac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{(x,\, y)\to(x_0,\, 0)} \tilde{z}_{14}^{(1)}(x,\, y) = \varphi_1'(x_0). \tag{15.25}$$

Пусть $(x,\, y) \to (0,\, y_0)$, $(x,\, y) \in G_{00}$, $0 < y_0 \le \dfrac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{(x,\, y)\to(0,\, y_0)} \tilde{z}_{14}^{(1)}(x,\, y) = \frac{2}{\pi}\varphi_1'(0)\operatorname{arctg}\frac{1}{y_0} + \frac{\varphi_4'(y_0)}{\pi}\ln\frac{1-y_0}{1+y_0}. \tag{15.26}$$

Кроме того, при $(x,\, y) \to (0,\, 0)$, $(x,\, y) \in G_{00}$ имеем

$$\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \tilde{z}_{14}^{(1)}(x,\, y) = \varphi_1'(0). \tag{15.27}$$

Заметим, что значение, полученное в (15.27), получится из (15.25) при $x_0 \to 0$ и из (15.26) при $y_0 \to 0$.

Непрерывная продолжимость $\tilde{z}_{14}^{(1)}$ на $\overline{G}_{00}$ доказана.

Таким образом, частная производная $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$ при $k = 1$ имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}_{00}$.

Пусть $k = 2$. Тогда

$$(\Pi_1\varphi_1'')(x,\, y) - (\Pi_{1,0}\varphi_1'')(x,\, y) - (\Pi_4\varphi_4'')(x,\, y) + (\Pi_{4,0}\varphi_4'')(x,\, y) =$$
$$= z_{14}^{(2)}(x,\, y) + \tilde{z}_{14}^{(2)}(x,\, y),$$

где $z_{14}^{(2)}(x,\,y)=-z_1(x,\,y;\,\varphi_1'')+z_{1,0}(x,\,y;\,\varphi_1'')+z_4(x,\,y;\,\varphi_4'')-z_1(x,\,y;\,\varphi_4'')$,

$$\tilde{z}_{14}^{(1)}(x,\,y)=\frac{\varphi_1''(x)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}-\operatorname{arctg}\frac{1+x}{y}\right)+$$

$$+\frac{\varphi_4''(y)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1+y}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1-y}{x}\right)+\frac{2}{\pi}\left(\varphi_1''(x)+\varphi_4''(y)\right)\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-\varphi_4''(y).$$

Непрерывная продолжимость первого слагаемого $z_{14}^{(2)}$ на $\overline{G}_{00}$ следует из леммы 15.5, так как каждое из слагаемых, составляющее $z_{14}^{(2)}$, имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}$ и, в частности, на $\overline{G}_{00}$.

Проверим существование конечного предела у второго слагаемого $\tilde{z}_{14}^{(2)}$ на $\overline{G}_{00}$.

Пусть $(x,\,y)\to(x_0,\,0)$, $(x,\,y)\in G_{00}$, $0<x_0\le\dfrac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,0)}\tilde{z}_{14}^{(2)}(x,\,y)=\varphi_1''(x_0). \tag{15.28}$$

Пусть $(x,\,y)\to(0,\,y_0)$, $(x,\,y)\in G_{00}$, $0<y_0\le\dfrac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,y_0)}\tilde{z}_{14}^{(2)}(x,\,y)=-\varphi_4''(y_0)\,. \tag{15.29}$$

Кроме того, из условия согласованности, при $(x,\,y)\to(0,\,0)$, $(x,\,y)\in G_{00}$, имеем

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\tilde{z}_{14}^{(1)}(x,\,y)=-\varphi_4''(0). \tag{15.30}$$

Заметим, что значение, полученное в (15.30), получится из (15.28) при $x_0\to 0$ и равенства $\varphi_4''(0)=-\varphi_1''(0)$, а из (15.29) – при $y_0\to 0$.

Непрерывная продолжимость $\tilde{z}_{14}^{(2)}$ на $\overline{G}_{00}$ доказана.

Таким образом, частная производная $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$ при $k=2$ имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}_{00}$.

Пусть $k=3$. Тогда

$$\left(\Pi_1\varphi_1''''\right)(x,\,y)+\left(\Pi_{1,0}\varphi_1''''\right)(x,\,y)+\left(\Pi_4^*\varphi_4''''\right)(x,\,y)+\left(\Pi_{4,0}^*\varphi_4''''\right)(x,\,y)=$$

$$=z_{14}^{(3)}(x,\,y)+\tilde{z}_{14}^{(3)}(x,\,y),$$

где $$z_{14}^{(3)}(x,\,y_4)=-z_1\left(x,\,y;\,\varphi_1''''\right)-z_{1,0}\left(x,\,y;\,\varphi_1''''\right)-z_4^*\left(x,\,y;\,\varphi_4''''\right)-z_{4,0}^*\left(x,\,y;\,\varphi_4''''\right),$$

$$\tilde{z}_{14}^{(3)}(x,\,y)=\frac{\varphi_1''''(x)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{1+x}{y}\right)-\frac{\varphi_4''''(y)}{2\pi}\ln\frac{x^2+(1-y)^2}{x^2+(1+y)^2}$$

Непрерывная продолжимость первого слагаемого $z_{14}^{(3)}$ на $\overline{G}_{00}$ следует из леммы 15.5, так как каждое из слагаемых, составляющее $z_{14}^{(3)}$, имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}$ и, в частности, на $\overline{G}_{00}$.

Проверим существование конечного предела у второго слагаемого $\tilde{z}_{14}^{(3)}$ на $\overline{G}_{00}$.

Пусть $(x,\,y)\to(x_0,\,0)$, $(x,\,y)\in G_{00}$, $0<x_0\le\frac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,0)}\tilde{z}_{14}^{(3)}(x,\,y)=\varphi_1''''(x_0). \tag{15.31}$$

Пусть $(x,\,y)\to(0,\,y_0)$, $(x,\,y)\in G_{00}$, $0<y_0\le\frac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,y_0)}\tilde{z}_{14}^{(3)}(x,\,y)=\frac{2}{\pi}\varphi_1''''(0)\operatorname{arctg}\frac{1}{y_0}-\frac{\varphi_4''''(y_0)}{\pi}\ln\frac{1-y_0}{1+y_0}. \tag{15.32}$$

Кроме того, при $(x,\,y)\to(0,\,0)$, $(x,\,y)\in G_{00}$ имеем

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\tilde{z}_{14}^{(1)}(x,\,y)=\varphi_1''''(0)\ . \tag{15.33}$$

Заметим, что значение, полученное в (15.33), получится из (15.31) при $x_0\to0$ и из (15.32) – при $y_0\to0$.

Непрерывная продолжимость $\tilde{z}_{14}^{(3)}$ на $\overline{G}_{00}$ доказана.

Таким образом, частная производная $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ при $k=3$ имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}_{00}$.

Пусть $k=4$. Тогда

$$\left(\Pi_1\varphi_1^{IV}\right)(x,\,y)-\left(\Pi_{1,0}\varphi_1^{IV}\right)(x,\,y)+\left(\Pi_4\varphi_4^{IV}\right)(x,\,y)-\left(\Pi_{4,0}\varphi_4^{IV}\right)(x,\,y)=$$
$$=z_{14}^{(4)}(x,\,y)+\tilde{z}_{14}^{(4)}(x,\,y)$$

где

$$z_{14}^{(4)}(x,\,y)=-z_1\left(x,\,y;\varphi_1^{IV}\right)+z_{1,0}\left(x,\,y;\,\varphi_1^{IV}\right)-z_4\left(x,\,y;\,\varphi_4^{IV}\right)+z_{4,0}\left(x,\,y;\varphi_4^{IV}\right),$$

$$\tilde{z}_{14}^{(4)}(x,\,y)=\frac{\varphi_1^{IV}(x)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}-\operatorname{arctg}\frac{1+x}{y}\right)-$$
$$-\frac{\varphi_4^{IV}(y)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1+y}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1-y}{x}\right)+\frac{2}{\pi}\left(\varphi_1^{IV}(x)-\varphi_4^{IV}(y)\right)\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\varphi_4^{IV}(y).$$

Непрерывная продолжимость первого слагаемого $z_{14}^{(4)}$ на $\overline{G}_{00}$ следует из леммы 15.5, так как каждое из слагаемых, составляющее $z_{14}^{(4)}$, имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}$ и, в частности, на $\overline{G}_{00}$.

Проверим существования конечного предела у второго слагаемого $\tilde{z}_{14}^{(4)}$ на $\overline{G}_{00}$.

Пусть $(x,\,y)\to(x_0,\,0)$, $(x,\,y)\in G_{00}$, $0<x_0\le\frac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,0)}\tilde{z}_{14}^{(4)}(x,\,y)=\varphi_1^{IV}(x_0). \tag{15.34}$$

Пусть $(x,\,y)\to(0,\,y_0)$, $(x,\,y)\in G_{00}$, $0<y_0\le\frac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,y_0)}\tilde{z}_{14}^{(4)}(x,\,y)=\varphi_4^{IV}(y_0)\,. \tag{15.35}$$

Кроме того, из условия согласованности, при $(x,\,y)\to(0,\,0)$, $(x,\,y)\in G_{00}$ имеем

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \tilde{z}_{14}^{(4)}(x,\,y) = \varphi_4^{IV}(0). \tag{15.36}$$

Заметим, что значение полученное в (15.36), получится из (15.34) при $x_0 \to 0$ и равенства $\varphi_1^{IV}(0) = \varphi_4^{IV}(0)$, а из (15.35) при $y_0 \to 0$.

Непрерывная продолжимость $\tilde{z}_{14}^{(4)}$ на $\overline{G}_{00}$ доказана.

Таким образом, частная производная $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$ при $k = 4$ имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}_{00}$.

Непрерывная продолжимость $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$ при $k \geq 5$ доказывается аналогично. Случай а) доказан.

Доказательство случая б). Аналогично случаю а), докажем непрерывную продолжимость частных производных $\dfrac{\partial^{k+1} u}{\partial x^k \partial y}$, $k \geq 0$ на замкнутую область $\overline{G}_{00}$.

Воспользуемся представлением (15.1). В силу леммы 15.2 функции $\tilde{w}_{00}$ и u_{00} бесконечно дифференцируемы в замкнутом круге $\overline{K}_{00} \supset \overline{G}_{00}$. Следовательно, частные производные $\dfrac{\partial^{k+1} \tilde{w}_{00}}{\partial x^k \partial y}$ и $\dfrac{\partial^{k+1} u_{00}}{\partial x^k \partial y}$ имеют непрерывные продолжения на $\overline{G}_{00}$ для всех $k \geq 0$.

Таким образом, существование непрерывного продолжения частных производных $\dfrac{\partial^{k+1} u}{\partial x^k \partial y}$ на $\overline{G}_{00}$ эквивалентно существованию непрерывного продолжения $\dfrac{\partial^{k+1} w_{00}}{\partial x^k \partial y}$ на $\overline{G}_{00}$ для всех $k \geq 0$.

В лемме 15.4 приведено представление для $\dfrac{\partial^{k+1} w_{00}}{\partial x^k \partial y}$ для всех $k \geq 0$. Покажем непрерывность слагаемых $v_{k,1}$, определенных в (15.10)-(15.13), в замкнутом круге $\overline{K}_{00} \supset \overline{G}_{00}$ для всех $k \geq 0$.

Пусть $k_1 = 0$. Рассмотрим $v_{k,1}$ при $k = 0$. Так как $v_{0,0} \equiv 0$ и $\varphi_4(0) = \varphi_1(0)$, то из (15.10), имеем

$$v_{0,1} = -\frac{(1-x)\varphi_1(1)}{\pi\left(y^2 + (1-x)^2\right)} + \frac{(1+x)\varphi_1(1)}{\pi\left(y^2 + (1+x)^2\right)} - \\ -\frac{x\varphi_4(1)}{\pi\left(x^2 + (1-y)^2\right)} - \frac{x\varphi_4(1)}{\pi\left(x^2 + (1+y)^2\right)} \tag{15.37}$$

Знаменатель каждой дроби в правой части (15.37), не меньше $\frac{\pi}{64}$ при $(x, y) \in \overline{K}_{00}$. Поэтому функция $v_{0,1}$ непрерывна в $\overline{K}_{00} \supset \overline{G}_{00}$.

Пусть $k = 1$. Тогда из (15.11) имеем

$$v_{1,1} = \frac{\partial v_{1,0}}{\partial y} - \frac{(1-x)\varphi_1'(1)}{\pi\left(y^2 + (1-x)^2\right)} - \frac{(1+x)\varphi_1'(1)}{\pi\left(y^2 + (1+x)^2\right)} - \\ -\frac{(1-y)\varphi_4'(1)}{\pi\left(x^2 + (1-y)^2\right)} - \frac{(1+y)\varphi_4'(1)}{\pi\left(x^2 + (1+y)^2\right)} \tag{15.38}$$

Непрерывность слагаемого $\frac{\partial v_{1,0}}{\partial y}$ в $\overline{K}_{00}$ следует из (15.21), а непрерывность остальных слагаемых в $\overline{K}_{00}$ следует из того, что знаменатель каждой дроби в правой части (15.38) не меньше $\frac{\pi}{64}$ при $(x, y) \in \overline{K}_{00}$.

Пусть $k = 2$. Тогда из (15.12), в силу равенства $\varphi_4''(0) = -\varphi_1''(0)$, имеем

$$v_{2,1} = \frac{\partial v_{2,0}}{\partial y} - \frac{(1-x)\varphi_1''(1)}{\pi\left(y^2 + (1-x)^2\right)} + \frac{(1+x)\varphi_1''(1)}{\pi\left(y^2 + (1+x)^2\right)} + \\ +\frac{x\varphi_4''(1)}{\pi\left(x^2 + (1-y)^2\right)} + \frac{x\varphi_4''(1)}{\pi\left(x^2 + (1+y)^2\right)} \tag{15.39}$$

Непрерывность слагаемого $\frac{\partial v_{2,0}}{\partial y}$ в $\overline{K}_{00}$ следует из (15.22), а непрерывность остальных слагаемых в $\overline{K}_{00}$ следует из того, что знаменатель каждой дроби, в правой части (15.39) не меньше $\frac{\pi}{64}$ при $(x, y) \in \overline{K}_{00}$.

Пусть $k=3$. Тогда из (15.13) имеем

$$v_{3,1}=\frac{\partial v_{3,0}}{\partial y}-\frac{(1-x)\varphi_1'''(1)}{\pi\left(y^2+(1-x)^2\right)}-\frac{(1+x)\varphi_1'''(1)}{\pi\left(y^2+(1+x)^2\right)}+$$
$$+\frac{(1-y)\varphi_4'''(1)}{\pi\left(x^2+(1-y)^2\right)}+\frac{(1+y)\varphi_4'''(1)}{\pi\left(x^2+(1+y)^2\right)} \qquad (15.40)$$

Непрерывность слагаемого $\frac{\partial v_{3,0}}{\partial y}$ в $\overline{K}_{00}$ следует из (15.23), а непрерывность остальных слагаемых в $\overline{K}_{00}$ следует из того, что знаменатель каждой дроби в правой части (15.40) не меньше $\frac{\pi}{64}$ при $(x,\, y)\in\overline{K}_{00}$.

Таким образом, непрерывность функций (15.10)-(15.13) в $\overline{K}_{00}$ при $k_1=0$ доказаны.

Доказательства непрерывности функций $v_{k,1}$ при $k=4k_1+i$, $i=\overline{0,3}$ и $k_1\ge 1$ проводятся аналогично, по индукции.

Докажем существование непрерывного продолжения на $\overline{G}_{00}$ суммы остальных слагаемых в правой части (15.14).

Пусть $k=0$. Тогда

$$-\Pi_1^*\varphi_1'-\Pi_{1,0}^*\varphi_1'+\Pi_4\varphi_4'+\Pi_{4,0}\varphi_4'=\xi_{14}^{(1)}+\tilde{\xi}_{14}^{(1)},$$

где
$$\xi_{14}^{(1)}=z_1^*(x,\, y;\, \varphi_1')+z_{1,0}^*(x,\, y;\, \varphi_1')-z_4(x,\, y;\, \varphi_4')-z_{4,0}(x,\, y;\, \varphi_4'),$$
$$\tilde{\xi}_{14}^{(1)}=\frac{\varphi_1'(x)}{2\pi}\ln\frac{y^2+(1-x)^2}{y^2+(1+x)^2}+\frac{\varphi_4'(y)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-y}{x}+\operatorname{arctg}\frac{1+y}{x}\right).$$

Непрерывная продолжимость слагаемого $\xi_{14}^{(1)}$ на $\overline{G}_{00}$ следует из леммы 15.5, так как каждое из слагаемых, составляющее $\xi_{14}^{(1)}$, имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}$ и, в частности, на $\overline{G}_{00}$.

Проверим существование непрерывного продолжения у функции $\tilde{\xi}_{14}^{(1)}$ на $\overline{G}_{00}$.

Пусть $(x,\, y)\to(x_0,\, 0)$, $(x,\, y)\in G_{00}$, $0<x_0\le\frac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{(x,\, y)\to(x_0,\, 0)}\tilde{\xi}_{14}^{(1)}(x,\, y)=\frac{\varphi_1'(x_0)}{\pi}\ln\frac{1-x_0}{1+x_0}+\frac{2\varphi_4'(0)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x_0}. \qquad (15.41)$$

Пусть $(x,\ y)\to(0,\ y_0)$, $(x,\ y)\in G_{00}$, $0<y_0\le\dfrac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ y_0)}\tilde{\xi}_{14}^{(1)}(x,\ y)=\varphi_4'(y_0). \tag{15.42}$$

Кроме того, при $(x,\ y)\to(0,\ 0)$, $(x,\ y)\in G_{00}$, имеем

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)}\tilde{\xi}_{14}^{(1)}(x,\ y)=\varphi_4'(0). \tag{15.43}$$

Заметим, что значение, полученное в (15.43), получается из (15.41) при $x_0\to 0$ и из (15.42) при $y_0\to 0$.

Непрерывная продолжимость функции $\tilde{\xi}_{14}^{(1)}$ на $\overline{G}_{00}$ доказана.

Пусть $k=1$. Тогда

$$-\Pi_1^*\varphi_1''+\Pi_{1,0}^*\varphi_1''-\Pi_4^*\varphi_4''+\Pi_{4,0}^*\varphi_1''=\xi_{14}^{(2)}+\tilde{\xi}_{14}^{(2)},$$

где

$$\xi_{14}^{(2)}=z_1^*(x,\ y;\ \varphi_1'')-z_{1,0}^*(x,\ y;\ \varphi_1'')+z_4^*(x,\ y;\ \varphi_4'')-z_{4,0}^*(x,\ y;\ \varphi_4''),$$

$$\tilde{\xi}_{14}^{(2)}=\frac{\varphi_1''(x)}{2\pi}\ln\left[\left(y^2+(1-x)^2\right)\left(y^2+(1+x)^2\right)\right]+$$

$$+\frac{\varphi_4''(y)}{2\pi}\ln\left[\left(x^2+(1-y)^2\right)\left(x^2+(1+y)^2\right)\right]+\frac{\varphi_1''(x)+\varphi_4''(y)}{\pi}\ln\left(x^2+y^2\right).$$

Непрерывная продолжимость слагаемого $\xi_{14}^{(2)}$ на $\overline{G}_{00}$ следует из леммы 15.5, так как каждое из слагаемых, составляющее $\xi_{14}^{(2)}$, имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}$ и, в частности, на $\overline{G}_{00}$.

Проверим существование непрерывного продолжения у функции $\tilde{\xi}_{14}^{(2)}$ на $\overline{G}_{00}$.

Пусть $(x,\ y)\to(x_0,\ 0)$, $(x,\ y)\in G_{00}$, $0<x_0\le\dfrac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{gathered}\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ 0)}\tilde{\xi}_{14}^{(2)}(x,\ y)=\frac{\varphi_1''(x_0)}{\pi}\ln\left(1-x_0^2\right)+\frac{\varphi_4''(0)}{\pi}\ln\left(1+x_0^2\right)+\\+\frac{2}{\pi}\left(\varphi_1''(x_0)+\varphi_4''(0)\right)\ln x_0\end{gathered}. \tag{15.44}$$

Пусть $(x, y) \to (0, y_0)$, $(x, y) \in G_{00}$, $0 < y_0 \le \dfrac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \tilde{\xi}_{14}^{(2)}(x, y) = \frac{\varphi_1''(0)}{\pi}\ln\left(1+y_0^2\right) + \frac{\varphi_4''(y_0)}{\pi}\ln\left(1-y_0^2\right) + \\ + \frac{2}{\pi}\left(\varphi_1''(0) + \varphi_4''(y_0)\right)\ln y_0 \,. \tag{15.45}$$

Из существования третьих производных $\varphi_1'''(0)$ и $\varphi_4'''(0)$ вытекает, что вторые частные производные $\varphi_1''(x)$ и $\varphi_4''(y)$ в точках $x = 0$ и $y = 0$ удовлетворяют условию Липшица:

$$\frac{\left|\varphi_1''(x) - \varphi_1''(0)\right|}{x} \le k_1^{(2)}, \quad \frac{\left|\varphi_4''(y) - \varphi_4''(0)\right|}{y} \le k_4^{(2)} \quad \left(k_1^{(2)} > 0,\ k_4^{(2)} > 0\right).$$

Отсюда и из условия согласованности $\varphi_1''(0) + \varphi_4''(0) = 0$, при $(x, y) \to (0, 0)$, $(x, y) \in G_{00}$, получим

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\tilde{\xi}_{14}^{(2)}(x, y)\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\pi}\left|\varphi_1''(x) + \varphi_4''(y)\right| \left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right| \le \\ \le \frac{1}{\pi}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\varphi_1''(x) - \varphi_1''(0)\right|}{x}\left|x\ln\left(x^2+y^2\right)\right| + \\ + \frac{1}{\pi}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\varphi_4''(y) - \varphi_4''(0)\right|}{y}\left|y\ln\left(x^2+y^2\right)\right| \le \\ \le \frac{k_1^{(2)}}{\pi}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|x\ln\left(x^2+y^2\right)\right| + \frac{k_4^{(2)}}{\pi}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|y\ln\left(x^2+y^2\right)\right| = 0 \tag{15.46}$$

Заметим, что значение, полученное в (15.46), получается из (15.44) при $x_0 \to 0$ и из (15.45) – при $y_0 \to 0$, в силу равенства $\varphi_1''(0) + \varphi_4''(0) = 0$.

Непрерывная продолжимость функции $\tilde{\xi}_{14}^{(2)}$ на $\overline{G}_{00}$ доказана.

Пусть $k = 2$. Тогда

$$-\Pi_1^*\varphi_1''' - \Pi_{1,0}^*\varphi_1''' - \Pi_4\varphi_4''' - \Pi_{4,0}\varphi_4''' = \xi_{14}^{(3)} + \tilde{\xi}_{14}^{(3)},$$

где $$\xi_{14}^{(3)} = z_1^*\left(x, y; \varphi_1'''\right) + z_{1,0}^*\left(x, y; \varphi_1'''\right) - z_4\left(x, y; \varphi_4'''\right) - z_{4,0}\left(x, y; \varphi_4'''\right),$$

$$\tilde{\xi}_{14}^{(3)} = \frac{\varphi_1'''(x)}{2\pi}\ln\frac{y^2 + (1-x)^2}{y^2 + (1+x)^2} - \frac{\varphi_4'''(y)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-y}{x} + \operatorname{arctg}\frac{1+y}{x}\right).$$

Непрерывная продолжимость слагаемого $\xi_{14}^{(3)}$ на $\overline{G}_{00}$ следует из леммы 15.5, так как каждое из слагаемых, составляющее $\xi_{14}^{(3)}$, имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}$ и, в частности, на $\overline{G}_{00}$.

Проверим существование непрерывного продолжения у функции $\xi_{14}^{(3)}$ на $\overline{G}_{00}$.

Пусть $(x,\, y) \to (x_0,\, 0)$, $(x,\, y) \in G_{00}$, $0 < x_0 \le \frac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{(x,\, y)\to(x_0,\, 0)} \tilde{\xi}_{14}^{(3)}(x,\, y) = \frac{\varphi_1'''(x_0)}{\pi} \ln\frac{1-x_0}{1+x_0} - \frac{2\varphi_4'''(0)}{\pi} \operatorname{arctg}\frac{1}{x_0}. \tag{15.47}$$

Пусть $(x,\, y) \to (0,\, y_0)$, $(x,\, y) \in G_{00}$, $0 < y_0 \le \frac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{(x,\, y)\to(0,\, y_0)} \tilde{\xi}_{14}^{(3)}(x,\, y) = -\varphi_4'''(y_0). \tag{15.48}$$

Кроме того, при $(x,\, y) \to (0,\, 0)$, $(x,\, y) \in G_{00}$, имеем

$$\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \tilde{\xi}_{14}^{(3)}(x,\, y) = -\varphi_4'''(0). \tag{15.49}$$

Заметим, что значение, полученное в (15.49), получается из (15.47) при $x_0 \to 0$ и из (15.48) – при $y_0 \to 0$.

Непрерывная продолжимость функции $\tilde{\xi}_{14}^{(3)}$ на $\overline{G}_{00}$ доказана.

Пусть $k = 3$. Тогда

$$-\Pi_1^*\varphi_1^{IV} + \Pi_{1,0}^*\varphi_1^{IV} - \Pi_4^*\varphi_4^{IV} + \Pi_{4,0}^*\varphi_4^{IV} = \xi_{14}^{(4)} + \tilde{\xi}_{14}^{(4)},$$

где $$\xi_{14}^{(4)} = z_1^*\left(x,\, y;\, \varphi_1^{IV}\right) - z_{1,0}^*\left(x,\, y;\, \varphi_1^{IV}\right) - z_4^*\left(x,\, y;\, \varphi_4^{IV}\right) + z_{4,0}^*\left(x,\, y;\, \varphi_4^{IV}\right),$$

$$\tilde{\xi}_{14}^{(4)} = \frac{\varphi_1^{IV}(x)}{2\pi} \ln\left[\left(y^2 + (1-x)^2\right)\left(y^2 + (1+x)^2\right)\right] -$$

$$-\frac{\varphi_4^{IV}(y)}{2\pi} \ln\left[\left(x^2 + (1-y)^2\right)\left(x^2 + (1+y)^2\right)\right] + \frac{\varphi_1^{IV}(x) - \varphi_4^{IV}(y)}{\pi} \ln\left(x^2 + y^2\right).$$

Непрерывная продолжимость слагаемого $\xi_{14}^{(4)}$ на $\overline{G}_{00}$ следует из леммы 15.5, так как каждое из слагаемых, составляющее $\xi_{14}^{(4)}$, имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}$ и, в частности, на $\overline{G}_{00}$.

Проверим существование непрерывного продолжения у функции $\tilde{\xi}_{14}^{(4)}$ на $\overline{G}_{00}$.

Пусть $(x, y) \to (x_0, 0)$, $(x, y) \in G_{00}$, $0 < x_0 \le \frac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{gathered}\lim_{(x, y)\to(x_0, 0)} \tilde{\xi}_{14}^{(4)}(x, y) = \frac{\varphi_1^{IV}(x_0)}{\pi}\ln\left(1 - x_0^2\right) - \frac{\varphi_4^{IV}(0)}{\pi}\ln\left(1 + x_0^2\right) + \\ + \frac{2}{\pi}\left(\varphi_1^{IV}(x_0) - \varphi_4^{IV}(0)\right)\ln x_0\end{gathered}. \quad (15.50)$$

Пусть $(x, y) \to (0, y_0)$, $(x, y) \in G_{00}$, $0 < y_0 \le \frac{3}{4}$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{gathered}\lim_{(x, y)\to(0, y_0)} \tilde{\xi}_{14}^{(4)}(x, y) = \frac{\varphi_1^{IV}(0)}{\pi}\ln\left(1 + y_0^2\right) - \frac{\varphi_4^{IV}(y_0)}{\pi}\ln\left(1 - y_0^2\right) + \\ + \frac{2}{\pi}\left(\varphi_1^{IV}(0) - \varphi_4^{IV}(y_0)\right)\ln y_0\end{gathered}. \quad (15.51)$$

Из существования производных пятого порядка $\varphi_1^{V}(0)$ и $\varphi_4^{V}(0)$ вытекает, что частные производные четвертого порядка $\varphi_1^{IV}(x)$ и $\varphi_4^{IV}(y)$ в точках $x = 0$ и $y = 0$ удовлетворяют условию Липшица:

$$\frac{\left|\varphi_1^{IV}(x) - \varphi_1^{IV}(0)\right|}{x} \le k_1^{(4)} \cdot x, \quad \frac{\left|\varphi_4^{IV}(y) - \varphi_4^{IV}(0)\right|}{y} \le k_4^{(4)} \cdot y \qquad \left(k_1^{(4)} > 0,\ k_4^{(4)} > 0\right).$$

Отсюда и из условия согласованности $\varphi_1^{IV}(0) - \varphi_4^{IV}(0) = 0$, при $(x, y) \to (0, 0)$, $(x, y) \in G_{00}$, получим

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\left|\tilde{\xi}_{14}^{(4)}(x,\,y)\right| = \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\frac{1}{\pi}\left|\varphi_1^{IV}(x)-\varphi_4^{IV}(y)\right|\left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right| \le \\
&\le \frac{1}{\pi}\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\frac{\left|\varphi_1^{IV}(x)-\varphi_1^{IV}(0)\right|}{x}\left|x\ln\left(x^2+y^2\right)\right| + \\
&+\frac{1}{\pi}\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\frac{\left|\varphi_4^{IV}(y)-\varphi_4^{IV}(0)\right|}{y}\left|y\ln\left(x^2+y^2\right)\right| \le \\
&\le \frac{k_1^{(4)}}{\pi}\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\left|x\ln\left(x^2+y^2\right)\right| + \frac{k_4^{(4)}}{\pi}\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\left|y\ln\left(x^2+y^2\right)\right| = 0
\end{aligned} \tag{15.52}$$

Заметим, что значение, полученное в (15.52), получается из (15.50) при $x_0 \to 0$ и из (15.51) – при $y_0 \to 0$, в силу равенства $\varphi_1^{IV}(0)-\varphi_4^{IV}(0)=0$.

Непрерывная продолжимость функции $\tilde{z}_{14}^{(4)}$ на $\overline{G}_{00}$ доказана.

Таким образом, частная производная $\dfrac{\partial^{k+1}u}{\partial x^k \partial y}$ при $k=3$ имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}_{00}$.

Непрерывная продолжимость $\dfrac{\partial^{k+1}u}{\partial x^k \partial y}$ при $k \ge 4$ доказывается аналогично. Случай б) доказан.

Теорема 15.1 доказана.

Доказательство теоремы 15.2. Пусть выполнены все условия теоремы 15.2. Докажем выполнение условия согласованности порядка n (15.20).

Докажем вначале справедливость первого из равенств (15.20). Воспользуемся представлением (15.1). Так как функции $\tilde{w}_{00}$ и u_{00} являются бесконечно дифференцируемыми в замкнутом круге $\overline{K}_{00} \supset \overline{G}_{00}$ (лемма 15.2), то все их частные производные ограничены в $\overline{G}_{00}$.

а) Рассмотрим частные производные $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$, $1 \le k \le n$. В этом случае ограниченность $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$ эквивалентна ограниченности $\dfrac{\partial^k w_{00}}{\partial x^k}$. Из ограниченности слагаемых $\Pi_1\varphi_1^{(k)}$, $\Pi_{1,0}\varphi_1^{(k)}$, $\Pi_4\varphi_4^{(k)}$, $\Pi_4^*\varphi_4^{(k)}$, $\Pi_{4,0}\varphi_4^{(k)}$, $\Pi_{4,0}^*\varphi_4^{(k)}$ и представления (15.9) вытекает, что ограниченность $\dfrac{\partial^k w_{00}}{\partial x^k}$ эквивалентна ограниченности функций $v_{k,0}$, определенных в (15.5)-(15.8).

Таким образом, имеем ограниченность функций $v_{k,0}$, $1 \le k \le n$.

Пусть $k=1$. Из ограниченности функции $v_{1,0}$, леммы 15.1 и представления (15.5) при $(x, y)\to(0, 0)$, $(x, y)\in G_{00}$ получим справедливость равенства $\varphi_1(0)-\varphi_4(0)=0$.

Пусть $k=3$. Из ограниченности функции $v_{3,0}$, леммы 15.1 и представления (15.7) при $(x, y)\to(0, 0)$, $(x, y)\in G_{00}$ получим справедливость равенства $\varphi_1''(0)+\varphi_4''(0)=0$.

Справедливость равенства $\varphi_1^{(2k)}(0)=(-1)^k\varphi_4^{(2k)}(0)$ для остальных значений k устанавливается аналогично.

б) Рассмотрим частные производные $\dfrac{\partial^{k+1}u}{\partial x^k\partial y}$, $0\le k\le n-1$. В этом случае ограниченность $\dfrac{\partial^{k+1}u}{\partial x^k\partial y}$ эквивалентна ограниченности $\dfrac{\partial^{k+1}w_{00}}{\partial x^k\partial y}$. Из ограниченности слагаемых $\Pi_1^*\varphi_1^{(k)}$, $\Pi_{1,0}^*\varphi_1^{(k)}$, $\Pi_4\varphi_4^{(k)}$, $\Pi_4^*\varphi_4^{(k)}$, $\Pi_{4,0}\varphi_4^{(k)}$, $\Pi_{4,0}^*\varphi_4^{(k)}$ и представления (15.14) вытекает, что ограниченность $\dfrac{\partial^{k+1}w_{00}}{\partial x^k\partial y}$ эквивалентна ограниченности функций $v_{k,1}$, определенных в (15.10)-(15.13).

Таким образом, имеем ограниченность функций $v_{k,1}$, $0\le k\le n-1$.

Пусть $k=0$. Из ограниченности функции $v_{0,1}$, леммы 15.1 и представления (15.10) при $(x, y)\to(0, 0)$, $(x, y)\in G_{00}$ получим справедливость равенства $\varphi_1(0)-\varphi_4(0)=0$.

Пусть $k=2$. Из ограниченности функции $v_{2,1}$, леммы 15.1 и представления (15.12) при $(x, y)\to(0, 0)$, $(x, y)\in G_{00}$ получим справедливость равенства $\varphi_1''(0)+\varphi_4''(0)=0$.

Справедливость равенства $\varphi_1^{(2k)}(0)=(-1)^k\varphi_4^{(2k)}(0)$ для остальных значений k устанавливается аналогично.

в) Рассмотрение остальных частных производных сводится к случаям а) или б). Действительно, из гармоничности функции $u=u(x, y)$ в области G следует справедливость равенства

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial y^{2k}}=(-1)^k\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^{n_1+n_2}u}{\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}} = (-1)^{k_2}\frac{\partial^{n_1+n_2}u}{\partial x^{n_1+n_2}}, \quad \text{если} \quad n_2 = 2k_2$$

и
$$\frac{\partial^{n_1+n_2}u}{\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}} = (-1)^{k_2}\frac{\partial^{n_1+n_2}u}{\partial x^{n_1+2k_2}\partial y}, \quad \text{если} \quad n_2 = 2k_2+1.$$

Теорема 15.2 доказана.

Доказательство теоремы 15.3. Достаточность. Утверждение достаточности этой теоремы совпадает с утверждением теоремы 15.1.

Необходимость. Пусть все частные производные $\dfrac{\partial^{n_1+n_2}u}{\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}}$ имеют непрерывные продолжения на $\overline{G}$. Тогда они ограничены в $\overline{G}$. Выполнение условия согласованности порядка n следует из теоремы 15.2.

Теорема 15.3 доказана.

16. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ПОМОЩЬЮ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО ОПЕРАТОРА ПУАССОНА

В теореме 1.3 утверждается, что для существования и единственности непрерывно продолжимого на $\overline{G}$ решения задачи Дирихле

$$\Delta = 0 \quad \text{в} \quad G, \quad u\big|_{\Gamma} = \Psi, \tag{16.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы граничная функция $\Psi(x, y)$ являлась непрерывной функцией на контуре Γ. Доказательство достаточности этой теоремы основано на представлении искомой граничной функции потенциалом двойного слоя $u = \Pi\Phi$, где $\Phi(x, y)$ – плотность потенциала является неизвестной функцией, определенной на контуре Γ. Существование и единственность такой плотности доказано в § 6. Она получается как решение системы интегральных уравнений

$$(I + A)\overline{\Phi} = \overline{\Psi}, \tag{16.2}$$

где $\overline{\Phi}$ и $\overline{\Psi}$ – вектор-функции, соответствующие контурным функциям Φ и Ψ. Строгое доказательство однозначной разрешимости системы интегральных уравнений (16.2) состояло из цепочки достаточно длинных выкладок. Причиной, являлся тот факт, что граничный оператор

$$A:\overline{C}[0,1]\to\overline{C}[0,1],$$

порожденный оператором Пуассона Π, не являлся вполне непрерывным и, более того, его норма и спектральный радиус равнялись единице, а матрица-оператор

$$I+A:\overline{C}[0,1]\to\overline{C}[0,1]$$

не являлся фредгольмовым. Это обстоятельство не позволяло применять теорию Фредгольма или искать искомую плотность в виде ряда Неймана.

Рассмотрим введенные выше регуляризатор Π^+ для оператора Пуассона Π, регуляризованный оператор $\Pi-\Pi^+$ и решение задачи (16.1), представленное в виде $u=\left(\Pi-\Pi^+\right)\Phi$, где плотность Φ определяется из условия $u\big|_{\Gamma}=\Psi$. Тогда для определения неизвестной плотности Φ получается аналогичная системе (16.2) система интегральных уравнений (см. следствия 13.1)

$$\left(I+B\right)\overline{\Phi}=\overline{\Psi}, \tag{16.3}$$

где $\overline{\Phi}$ и $\overline{\Psi}$ вектор-функции, соответствующие плотности Φ и граничному значению Ψ. Как показано в § 14, норма $\|B\|$ и спектральный радиус $r(B)$ граничного оператора B совпадают и меньше единицы. Поэтому разрешимость системы интегральных уравнений (16.3) является очевидным следствием общих теорем о сжимающихся отображениях. Это одно из важных свойств регуляризованного оператора Пуассона.

Для того чтобы отметить другое важное свойство регуляризованного оператора Пуассона, сначала заметим, что, зная граничное значение Ψ гармонической функции u, заданной в полуплоскости $y>0$ или единичном круге с центром вначале координат, однозначно можно восстановить саму гармоническую функцию как образ граничного значения при действии оператора Пуассона $u=\Pi\Psi$. Регуляризованный оператор является аналогом оператора Пуассона для квадрата, то есть для области с угловыми точками. Гармоническая функция получается как образ граничного значения при действии регуляризованного оператора:

$$u=\left(\Pi-\Pi^+\right)\Psi-u^+,$$

где u^+ бесконечно дифференцируемая вплоть до границы $\overline{G}$ гармоническая функция, однозначно определяемая граничным значением:

$$u^+ = \left(\Pi - \Pi^+\right)\Phi^+,$$

а Φ^+ – контурная функция, соответствующая вектор-функции $\overline{\Phi}^+$, решению системы интегральных уравнений $(I+B)\overline{\Phi} = B\overline{\Psi}$.

Граничный оператор B введен в § 13, а некоторые его свойства приведены в § 14. Приведем еще одно важное свойство оператора B.

Лемма 16.1. ***Пусть $\overline{\Phi} \in \overline{L}_\infty[0,1]$ – произвольная вектор-функция. Тогда вектор-функция $\overline{\Psi} = B\overline{\Phi}$ бесконечно дифференцируема и для любого $n \geq 0$ удовлетворяет условию согласованности порядка n.***

Доказательство. Докажем справедливость равенств

$$\begin{cases} \psi_4^{(2k)}(0) = (-1)^k \psi_1^{(2k)}(0), \\ \psi_1^{(2k)}(1) = (-1)^k \psi_2^{(2k)}(0), \\ \psi_2^{(2k)}(1) = (-1)^k \psi_3^{(2k)}(1), \\ \psi_3^{(2k)}(0) = (-1)^k \psi_4^{(2k)}(1) \end{cases} \tag{16.4}$$

для всех целых $k \geq 0$.

Покажем справедливость первого из равенств (16.4). Вычислим значения $\psi_1^{(n)}(0)$ и $\psi_4^{(n)}(0)$. Для этого запишем равенство $\overline{\Psi} = B\overline{\Phi}$ в развернутом виде:

$$\begin{cases} \psi_1(x) = B_{12}\varphi_2(x) + B_{13}\varphi_3(x) + B_{14}\varphi_4(x), \\ \psi_2(x) = B_{21}\varphi_1(x) + B_{23}\varphi_3(x) + B_{24}\varphi_4(x), \\ \psi_3(x) = B_{31}\varphi_1(x) + B_{32}\varphi_2(x) + B_{34}\varphi_4(x), \\ \psi_4(x) = B_{41}\varphi_1(x) + B_{42}\varphi_2(x) + B_{43}\varphi_3(x) \end{cases} \tag{16.5}$$

и представим функции $\psi_1(x)$ и $\psi_4(x)$ в виде суммы интегралов:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1} b_1(x,t)\varphi_2(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{1}{2}} b_2(x,t)\varphi_3(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1} b_3(x,t)\varphi_3(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1} b_4(x,t)\varphi_4(t)\,dt, \tag{16.6}$$

$$\psi_4(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} b_4(x,t)\varphi_1(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} b_2(x,t)\varphi_2(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} b_3(x,t)\varphi_2(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} b_1(x,t)\varphi_3(t)\,dt, \qquad (16.7)$$

где

$$b_1 = \frac{1-x}{(1-x)^2+t^2} - \frac{1-x}{(1-x)^2+(2-t)^2}, \quad b_2 = \frac{1}{1+(x-t)^2} - \frac{1}{1+(x+t)^2},$$

$$b_3 = \frac{1}{1+(x-t)^2} - \frac{1}{1+(2-x-t)^2}, \quad b_4 = \frac{x}{x^2+t^2} - \frac{x}{x^2+(2-t)^2}.$$

Вычисляя производные под знаком интеграла, получим

$$\psi_1^{(n)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\partial^n b_1(x,t)}{\partial x^n}\varphi_2(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^n b_2(x,t)}{\partial x^n}\varphi_3(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\partial^n b_3(x,t)}{\partial x^n}\varphi_3(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\partial^n b_4(x,t)}{\partial x^n}\varphi_4(t)\,dt, \qquad (16.8)$$

$$\psi_4(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\partial^n b_4(x,t)}{\partial x^n}\varphi_1(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^n b_2(x,t)}{\partial x^n}\varphi_2(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\partial^n b_3(x,t)}{\partial x^n}\varphi_2(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\partial^n b_1(x,t)}{\partial x^n}\varphi_3(t)\,dt. \qquad (16.9)$$

Для удобства вычисления производных $\psi_1^{(n)}(x)$ и $\psi_4^{(n)}(x)$ для произвольного значения n, разложим функции b_i, $i=\overline{1,4}$ в сумму простейших дробей:

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x-1-it} - \frac{1}{x-1+it} + \frac{1}{x-1-i(2-t)} + \frac{1}{x-1+i(2-t)}\right),$$

$$b_2 = \frac{1}{i2}\left(\frac{1}{x-t-i} - \frac{1}{x-t+i} - \frac{1}{x+t-i} + \frac{1}{x+t+i}\right),$$

$$b_3 = \frac{1}{i2}\left(\frac{1}{x-t-i} - \frac{1}{x-t+i} - \frac{1}{x+t-2-i} + \frac{1}{x+t-2+i}\right),$$

$$b_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-it} + \frac{1}{x+it} - \frac{1}{x-i(2-t)} - \frac{1}{x+i(2-t)}\right).$$

Для вычисления производных n-го порядка функций $b_i(x, t)$, $i = \overline{1, 4}$ по переменной x, воспользуемся формулой для производной n-го порядка функции $g(x) = \dfrac{1}{x+a}$:

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}},$$

которая справедлива для любого натурального числа n и комплексного a. В силу этой формулы будем иметь

$$\frac{\partial^n b_1(x, t)}{\partial x^n} = \frac{(-1)^{n+1} n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1-it)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1+it)^{n+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x-1-i(2-t))^{n+1}} - \frac{1}{(x-1+i(2-t))^{n+1}}\right],$$

$$\frac{\partial^n b_2(x, t)}{\partial x^n} = \frac{(-1)^n n!}{i2}\left[\frac{1}{(x-t-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-t+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+t-i)^{n+1}} + \frac{1}{(x+t+i)^{n+1}}\right],$$

$$\frac{\partial^n b_3(x, t)}{\partial x^n} = \frac{(-1)^n n!}{i2}\left[\frac{1}{(x-t-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-t+i)^{n+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x+t-2-i)^{n+1}} + \frac{1}{(x+t-2+i)^{n+1}}\right],$$

$$\frac{\partial^n b_4(x, t)}{\partial x^n} = \frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x-it)^{n+1}} + \frac{1}{(x+it)^{n+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x-i(2-t))^{n+1}} - \frac{1}{(x+i(2-t))^{n+1}}\right].$$

Значениями этих производных в точке $x=0$ являются:

$$\frac{\partial^n b_1(0,t)}{\partial x^n}=\frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(1+it)^{n+1}}+\frac{1}{(1-it)^{n+1}}-\frac{1}{(1+i(2-t))^{n+1}}-\frac{1}{(1-i(2-t))^{n+1}}\right],$$

$$\frac{\partial^n b_2(0,t)}{\partial x^n}=\frac{n!}{i2}\left[-\frac{1+(-1)^{n+1}}{(t+i)^{n+1}}+\frac{1+(-1)^{n+1}}{(t-i)^{n+1}}\right],$$

$$\frac{\partial^n b_3(0,t)}{\partial x^n}=\frac{n!}{i2}\left[-\frac{1}{(t+i)^{n+1}}+\frac{1}{(t-i)^{n+1}}+\frac{1}{(-t+2+i)^{n+1}}-\frac{1}{(-t+2-i)^{n+1}}\right]=$$

$$=\frac{n!}{2}\left[\frac{(-i)^n}{(1-it)^{n+1}}+\frac{i^n}{(1+it)^{n+1}}-\frac{(-i)^n}{(1-i(2-t))^{n+1}}-\frac{i^n}{(1+i(2-t))^{n+1}}\right],$$

$$\frac{\partial^n b_4(0,t)}{\partial x^n}=\frac{n!}{2}\left[-\frac{1}{(it)^{n+1}}-\frac{1}{(-it)^{n+1}}+\frac{1}{(i(2-t))^{n+1}}+\frac{1}{(-i(2-t))^{n+1}}\right]=$$

$$=\frac{n!}{2}\left[-\frac{(-i)^{n+1}+i^{n+1}}{t^{n+1}}+\frac{(-i)^{n+1}+i^{n+1}}{(2-t)^{n+1}}\right].$$

В нас дальнейшем будут интересовать только четные значения n:

Случай а) $n=4k,\quad k\ge 0$, случай б) $n=4k+2,\quad k\ge 0$.

Случай а). Пусть $n=4k$. Так как

$$\frac{\partial^{4k} b_1(0,t)}{\partial x^{4k}}=\frac{(4k)!}{2}\left[\frac{1}{(1+it)^{4k+1}}+\frac{1}{(1-it)^{4k+1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(1+i(2-t))^{4k+1}}-\frac{1}{(1-i(2-t))^{4k+1}}\right],$$

$$\frac{\partial^{4k} b_2(0,t)}{\partial x^{4k}}=\frac{(4k)!}{i2}\left[-\frac{1+(-1)^{4k+1}}{(t+i)^{4k+1}}+\frac{1+(-1)^{4k+1}}{(t-i)^{4k+1}}\right]\equiv 0,$$

$$\frac{\partial^{4k} b_3(0,t)}{\partial x^{4k}}=\frac{(4k)!}{2}\left[\frac{(-i)^{4k}}{(1-it)^{4k+1}}+\frac{i^{4k}}{(1+it)^{4k+1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{(-i)^{4k}}{(1-i(2-t))^{4k+1}}-\frac{i^{4k}}{(1+i(2-t))^{4k+1}}\right]=\frac{(4k)!}{2}\left[\frac{1}{(1-it)^{4k+1}}+\frac{1}{(1+it)^{4k+1}}-\right.$$

$$-\frac{1}{\left(1-i\left(2-t\right)\right)^{4k+1}}-\frac{1}{\left(1+i\left(2-t\right)\right)^{4k+1}}\Bigg]=\frac{\partial^{4k}b_1\left(0,t\right)}{\partial x^{4k}},$$

$$\frac{\partial^{4k}b_4\left(0,t\right)}{\partial x^{4k}}=\frac{\left(4k\right)!}{2}\left[-\frac{-i+i}{t^{4k+1}}+\frac{-i+i}{\left(2-t\right)^{4k+1}}\right]\equiv 0,$$

то подставляя эти значения в (16.8) и (16.9), получим

$$\psi_1^{(4k)}\left(0\right)=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k}b_1\left(0,t\right)}{\partial x^{4k}}\varphi_2\left(t\right)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k}b_3\left(0,t\right)}{\partial x^{4k}}\varphi_3\left(t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k}b_1\left(0,t\right)}{\partial x^{4k}}\varphi_2\left(t\right)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k}b_1\left(0,t\right)}{\partial x^{4k}}\varphi_3\left(t\right)dt \qquad (16.10)$$

$$\psi_4^{(4k)}\left(0\right)=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k}b_3\left(0,t\right)}{\partial x^{4k}}\varphi_2\left(t\right)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k}b_1\left(0,t\right)}{\partial x^{4k}}\varphi_3\left(t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k}b_1\left(0,t\right)}{\partial x^{4k}}\varphi_3\left(t\right)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k}b_1\left(0,t\right)}{\partial x^{4k}}\varphi_2\left(t\right)dt \qquad (16.11)$$

Из равенства правых частей (16.10) и (16.11) вытекает равенство левых частей: $\psi_4^{(4k)}\left(0\right)=\psi_1^{(4k)}\left(0\right), \quad k\geq 0$.

Случай а) доказан.

Случай б). Пусть $n=4k+2$. Так как

$$\frac{\partial^{4k+2}b_1\left(0,t\right)}{\partial x^{4k+2}}=\frac{\left(4k+2\right)!}{2}\Bigg[\frac{1}{\left(1+it\right)^{4k+3}}+\frac{1}{\left(1-it\right)^{4k+3}}-$$

$$-\frac{1}{\left(1+i\left(2-t\right)\right)^{4k+3}}-\frac{1}{\left(1-i\left(2-t\right)\right)^{4k+3}}\Bigg],$$

$$\frac{\partial^{4k+2}b_2\left(0,t\right)}{\partial x^{4k+2}}=\frac{\left(4k+2\right)!}{i2}\left[-\frac{1+\left(-1\right)^{4k+3}}{\left(t+i\right)^{4k+3}}+\frac{1+\left(-1\right)^{4k+3}}{\left(t-i\right)^{4k+3}}\right]\equiv 0,$$

$$\frac{\partial^{4k+2}b_3\left(0,t\right)}{\partial x^{4k+2}}=\frac{\left(4k+2\right)!}{2}\Bigg[\frac{\left(-i\right)^{4k+2}}{\left(1-it\right)^{4k+3}}+\frac{i^{4k+2}}{\left(1+it\right)^{4k+3}}-$$

$$-\frac{(-i)^{4k+2}}{\left(1-i(2-t)\right)^{4k+3}}-\frac{i^{4k+2}}{\left(1+i(2-t)\right)^{4k+3}}\Bigg]=\frac{(4k+2)!}{2}\Bigg[-\frac{1}{(1-it)^{4k+3}}-\frac{1}{(1+it)^{4k+3}}+$$

$$+\frac{1}{\left(1-i(2-t)\right)^{4k+3}}+\frac{1}{\left(1+i(2-t)\right)^{4k+3}}\Bigg]=-\frac{\partial^{4k+2}b_1(0,t)}{\partial x^{4k+2}},$$

$$\frac{\partial^{4k+2}b_4(0,t)}{\partial x^{4k+2}}=\frac{(4k+2)!}{2}\left[-\frac{-i+i}{t^{4k+3}}+\frac{-i+i}{(2-t)^{4k+3}}\right]\equiv 0,$$

то подставляя эти значения в (16.8) и (16.9), получим

$$\psi_1^{(4k+2)}(0)=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k+2}b_1(0,t)}{\partial x^{4k+2}}\varphi_2(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k+2}b_3(0,t)}{\partial x^{4k+2}}\varphi_3(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k+2}b_1(0,t)}{\partial x^{4k+2}}\varphi_2(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k+2}b_1(0,t)}{\partial x^{4k+2}}\varphi_3(t)\,dt, \qquad (16.12)$$

$$\psi_4^{(4k+2)}(0)=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k+2}b_3(0,t)}{\partial x^{4k+2}}\varphi_2(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k+2}b_1(0,t)}{\partial x^{4k+2}}\varphi_3(t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k+2}b_1(0,t)}{\partial x^{4k+2}}\varphi_3(t)\,dt-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\partial^{4k+2}b_1(0,t)}{\partial x^{4k+2}}\varphi_2(t)\,dt. \qquad (16.13)$$

Правые части равенств (16.12) и (16.13) отличаются только знаками, следовательно, и левые части отличаются только знаками:

$$\psi_4^{(4k+2)}(0)=-\psi_1^{(4k+2)}(0), \qquad k\ge 0.$$

Случай б) доказан.

Справедливость остальных равенств (16.4) доказываются аналогично.

Лемма 16.1 доказана.

Пусть $\Psi\in C(\Gamma)$ и $\overline{\Psi}$ соответствующая ей вектор-функция. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$(I+B)\overline{\Phi}^{+}=B\overline{\Psi}, \qquad (16.14)$$

где $\overline{\Phi}^{+}$ – неизвестная вектор-функция. По теореме 14.1 оператор B действует в пространстве вектор-функций $\overline{C}[0,1]$ и его норма $\|B\|_{\overline{C}[0,1]\to\overline{C}[0,1]}$ равна спектральному радиусу $r(B)$, причем

$$r(B) = r = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{3}{4} \qquad (0,2048 < r < 0,2049).$$

Поэтому система интегральных уравнений (16.14) имеет в пространстве $\overline{C}[0,1]$ единственное решение

$$\overline{\Phi}^{+} = (I+B)^{-1}B\overline{\Psi} = B(I+B)^{-1}\overline{\Psi}. \tag{16.15}$$

В силу теоремы 13.2 вектор-функция $\overline{\Phi}^{+}$ является бесконечно дифференцируемой на отрезке $[0,1]$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 16.1. ***Пусть*** $\boldsymbol{\Psi \in C(\Gamma)}$***.Тогда все частные производные гармонической функции***

$$\boldsymbol{u^{+} = (\Pi - \Pi^{+})\Phi^{+}}, \tag{16.16}$$

где $\boldsymbol{\overline{\Phi}^{+}}$ ***определена в (16.15), имеют непрерывные продолжения на*** $\boldsymbol{\overline{G}}$***.***

Доказательство. Пусть Φ^{+} контурная функция, соответствующая вектор-функции $\overline{\Phi}^{+}$ и $u^{+} = (\Pi - \Pi^{+})\Phi^{+}$. Из представления (16.15) и леммы 16.1 следует, что вектор-функция $\overline{\Phi}^{+}$ бесконечно дифференцируема на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяет условию согласованности любого порядка. Поэтому, в силу теоремы 15.1, регуляризованная гармоническая функция $u = (\Pi - \Pi^{+})\Phi^{+}$ и все ее частные производные имеют непрерывные продолжения на замкнутую область $\overline{G}$.

Теорема 16.1 доказана.

Теорема 16.2. ***Пусть*** $\boldsymbol{\Psi \in C(\Gamma)}$***. Тогда решение задачи Дирихле*** **(16.1)** ***представимо в виде***

$$\boldsymbol{u = (\Pi - \Pi^{+})\Psi - u^{+}}, \tag{16.17}$$

где $\boldsymbol{u^{+}}$ ***определена в (16.16).***

Доказательство. В силу теоремы 15.2 функция $(\Pi - \Pi^{+})\Psi$ имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}$. Следовательно, гармоническая функция

$$u = (\Pi - \Pi^{+})\Psi - u^{+}$$

имеет непрерывное продолжение на $\overline{G}$, и вектор-функция $\overline{u\big|_\Gamma}$, соответствующая ее граничному значению $u\big|_\Gamma$, удовлетворяет равенству:

$$\overline{u\big|_\Gamma} = (I+B)\overline{\Psi} - (I+B)\Big((I+B)^1 B\overline{\Psi}\Big).$$

Отсюда, имеем $u_\Gamma = \Psi$.

Теорема 16.2 доказана.

Теорема 16.3. ***Пусть вектор-функция $\overline{\Psi}$ имеет непрерывные производные до порядка $\mathbf{n}$ включительно, причем $\mathbf{n}$-я производная удовлетворяет условию Липшица. Если вектор-функция $\overline{\Psi}$ удовлетворяет условию согласованности порядка $\mathbf{n}$, то все частные производные до порядка $\mathbf{n}$ решения (16.17) задачи Дирихле (16.1) имеют непрерывные продолжения на замкнутую область $\overline{\mathbf{G}}$, где $\mathbf{u}^+$ определена в (16.16).***

Доказательство. В силу теоремы 15.1 все частные производные до порядка n гармонической функции $\left(\Pi - \Pi^+\right)\Psi$ имеют непрерывные продолжения на $\overline{G}$.

В теореме 16.1 доказано, что все частные производные гармонической функции u^+ имеют непрерывные продолжения на $\overline{G}$. Следовательно, все частные производные до порядка n их разности

$$u = \left(\Pi - \Pi^+\right)\Psi - u^+$$

имеют непрерывные продолжения на $\overline{G}$.

Теорема 16.3 доказана.

Так как норма оператора $B:\overline{C}[0,1] \to \overline{C}[0,1]$ меньше единицы, то справедливо разложение

$$(I+B)^{-1} = I - B + B^2 - B^3 + \ldots \qquad (16.18)$$

и имеет место оценка скорости сходимости

$$\left\| (I+B)^{-1} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k B^k \right\|_{\overline{C}[0,1]\to\overline{C}[0,1]} \le \frac{r^{n+1}}{1-r}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (16.19)$$

Наряду с гармонической функцией $u = u(x,y)$ рассмотрим последовательность гармонических функций

$$u_n(x,y) = \left(\Pi - \Pi^*\right)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k B^k \overline{\Psi}, \quad n = 1,2,\ldots. \qquad (16.20)$$

Отметим, что функция $u=u(x,y)$ и функции $u_n=u_n(x,y)$ ни при одном значении n, вообще говоря, не являются непрерывными вплоть до границы. Однако разность этих функций $u-u_n$ является непрерывной вплоть до границы. Более точно справедливо следующее утверждение.

Теорема 16.2. ***Для любой функции $\Psi\in L_\infty(\Gamma)$ решение обобщенной задачи Дирихле (16.1) представимо в виде ряда:***

$$\boldsymbol{u=\left(\Pi-\Pi^*\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\Phi_k(x,y),} \tag{16.21}$$

где $\Phi_k(x,y)=B^k\overline{\Psi}$ и справедлива оценка скорости сходимости

$$\boldsymbol{\left\|u(x,y)-u_n(x,y)\right\|_{C(\overline{G})}\le M\,r^n,\quad n=1,2,\ldots,}$$

а $\boldsymbol{M=\dfrac{1}{1-r}\left\|\Pi-\Pi^*\right\|_{\overline{C}[0,1]\to C(\overline{G})}\left\|B\overline{\Psi}\right\|_{\overline{C}[0,1]}}$.

Доказательство. Действительно, из равенств (16.18)-(16.20) и неравенства $r<1$ вытекает справедливость разложения (16.21).

Справедливо равенство

$$u-u_n=\left(\Pi-\Pi^+\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k\,B^k\overline{\Psi}=$$

$$=(-1)^{n+1}\left(\Pi-\Pi^+\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,B^k\right)B^n\left(B\overline{\Psi}\right), \tag{16.22}$$

где $n=1,2,\ldots$. В силу леммы 10.3 вектор-функция $B\overline{\Psi}$ является непрерывной на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяет условию согласованности. Поэтому из равенства (16.22) вытекает непрерывность вплоть до границы функции $u-u_n$.

Переходя к нормам в равенстве (16.22), получим

$$\left\|u-u_n\right\|_{C(\overline{G})}\le\left\|\left(\Pi-\Pi^*\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,B^k\right)B^n\left(B\overline{\Psi}\right)\right\|_{C(\overline{G})}\le$$

$$\le\left\|\Pi-\Pi^+\right\|_{\overline{C}[0,1]\to C(\overline{G})}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left\|B\right\|^k_{\overline{C}[0,1]\to\overline{C}[0,1]}\right)\left\|B\right\|^n_{\overline{C}[0,1]\to\overline{C}[0,1]}\left\|B\overline{\Psi}\right\|_{\overline{C}[0,1]}=$$

$$=\frac{r^n}{1-r}\left\|\Pi-\Pi^+\right\|_{\overline{C}[0,1]\to C(\overline{G})}\left\|B\overline{\Psi}\right\|_{\overline{C}[0,1]}.$$

Теорема 16.2 доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н.Тихонов, А.А. Самарский. -М.:Наука, 1966. – 724 с.
2. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский.-М.:Физматгиз, 1961. – 400 с.
3. Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф.Рисс, Б.Сёкефальви-Надь.-М.:Мир, 1979. – 587 с.
4. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С.Владимиров. - М.: Наука,1967. – 436 с.
5. Стейн, И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И.Стейн, Г.Вейс. -М.:Мир, 1974. – 333 с.
6. Рудин, У. Теория функций в поликруге / У.Рудин. - М.:Мир, 1974. – 160 с.
7. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н.Тихонов, В.Я. Арсенин. -М.: Наука, 1979. – 222 с.
8. Тихонов, А.Н. Методы регуляризации некорректно поставленных задач / А.Н.Тихонов, В.А.Морозов.// Вычислительные методы и програм-ммирование. 1981. – Т. 35. С. 3-35.
9. Морозов, В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В.А.Морозов. – М.: МГУ, 1974. – 187 с.
10. Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов. -М.:Наука, 1967. – 304 с.
11. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д.Кудрявцев. Т.2. -М.:Дрофа, 2004. – 720 с.
12. Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. С-Пб.:-Лань, 1999. – 560 с.
13. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. -М.:Наука, 1999. -496 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ